

会員ニュース

平地健吾氏の井上學術賞受賞に寄せて

宮嶋公夫
鹿児島大学理学部

第 29 回 (2012 年度) 井上學術賞に平地健吾氏の「共形幾何および CR 幾何における放物型不変式論」が選ばれました。複素解析学から微分幾何学へまたがる新しい視点からの研究を推進し新境地を拓いた平地氏に心からのお祝いを申し上げます。私自身は平地氏とは重なる研究はないものの CR 構造に係る同じ分野の研究者として簡単にご紹介をさせて頂きたいと思います。

平地氏の研究の端緒は、強擬凸領域の複素解析学の研究に新しい方向を指し示した C. Fefferman 1979 年の「複素解析における放物型不変式論」にあります。そこで提案された研究プログラムは、多変数複素解析学で最も基本的役割を果たすベルグマン核をリーマン幾何において成功を収めた熱核の類似として扱い、その境界での特異性の漸近展開を通じて有界領域の双正則幾何学を展開しようというものでした。この所謂 Fefferman プログラムには数多くの研究者が参加し、1994 年までにはベルグマン核の境界付近での漸近展開 $K(z, z) = \varphi(z)r(z)^{-n-1} + \psi(z) \log r(z)$ のうち、 $\varphi(z)$ の部分の境界 CR 不変量による記述が完成しましたが、対数項 $\psi(z) \log r(z)$ については残されたままで、新しいアイデアが求められていました (ここで、 $r(z)$ は境界の滑らかな定義関数を表しています。) 平地氏は 2000 年の論文で、 $\psi(z) \log r(z)$ の漸近展開を Weyl 不変量という形の CR 不変量で記述することに成功し、同時に、すべてのスカラー CR 不変量は Weyl 不変量の形になることを示しました。

CR 幾何は共形幾何と密接な関係を持っています。放物型幾何の観点からは、 $2n+1$ 次元 CR 多様体を $SU(n+1, 1)/(\text{放物型部分群})$ の湾曲モデル、 n 次元共形多様体を $SO(n+1, 1)/(\text{放物型部分群})$ の湾曲モデルと見なせば、CR 幾何は共形幾何の複素版ということが出来ます。C. Fefferman の放物型不変式論が共形幾何へと広がって行ったのも必然的な流れだと言えます。共形幾何における放物型不変式論の研究においても、1985 年頃には、 n 次元共形構造を ambient 空間と呼ばれる $n+2$ 次元空間上の Ricci 平坦 Lorenz 計量に結びつけ、そこから共形構造の不変量を引き出す ambient metric の手法が確立されます。このとき、共形不変量構成の問題は、jet 空間として表したリーマン計量共形類の空間から曲率の空間への写像が放物型部分群に関して同変な埋め込み写像であることを問うという形に定式化されますが、その曲率空間への写像の構成は ambient

metric を用いて行われます。この手法により、奇数次元の共形構造に対しては、共形不変量構成が成功しますが、偶数次元では ambient metric の構成が一意的でないことから、高次のウェイトの Weyl 不変量の構成に障害が起こっていました。R. Graham との共同研究を通じて平地氏は、CR 不変量の構成問題に現れる Monge–Ampère 方程式の持つ難点を克服した視点から共形不変量構成の場合の Einstein 方程式に取り組んで、この困難を回避する途があることを突き止め、共形幾何における放物型不変式論においての大きな一歩を進めました。

また、C. Fefferman との共同研究を通じて、共形幾何と CR 幾何の基本的不変量として近年盛んに研究されている Q -曲率に関して、ambient metric の手法を採ることにより 2 つの Q -曲率を一元的に統御できることを明らかにしています。さらに最近では、共形幾何と CR 幾何で著しい違いを見せる全 Q -曲率 (Q -曲率の積分値) に関する、ambient metric の手法によってその違いを埋められることを明らかにしています。

このように、強擬凸領域の複素解析の研究から出発した平地氏の研究は、複素解析の枠組みを越えて微分幾何学、Monge–Ampère 方程式、Einstein 方程式、超局所解析、放物型不変式論という広範囲の数学的手法を駆使する独自の世界を形成しています。私が平地氏の講演に初めて接したのは、故村立信吾先生の退官記念を兼ねた Osaka International Conference on Complex Geometry and Related Topics (1990 年 12 月) においてで、このときの駆け出しの研究者とは思えない明快な話の運びに「今回のシンポジウムで最もよくわかった講演であった」と感心した TH 大学の U 先生が、その場で集中講義をお願いされていたのが印象に残っています。そのシンポジウムの中で R. Graham は放物型不変式論における ambient metric construction に生じる問題点について講演しています。平地氏は、CR 幾何の場合を解決した後、C. Fefferman や R. Graham との共同研究を通じて ambient metric construction method を研ぎすまし、共形幾何に通用するところまで持ってこられました。共形幾何における ambient metric construction からは、無限遠境界上に元の n 次元共形構造を伴った $n+1$ 次元完備負曲率 Einstein 空間という、超弦理論における AdS/CFT 対応の基本設定がもたらされます。しかも、共形全 Q -曲率は、AdS 空間の体積発散の漸近展開における対数項係数に対応しています。CR 幾何、共形幾何と広がって来た放物型不変式論は、さらに大きい広がりが期待される状況になっています。

平地氏はこれまでに建部賢弘特別賞 (1999 年)、幾何学賞 (2003 年)、Stephen Bergman 賞 (2006 年、米国数学会) を受賞されていますが、今回、CR 幾何学と共形幾何学においての大きな功績が放物型不変式論の観点から認められたことは誠に意義深いことで、心からお祝いを申し上げます。