

# 美の背後に潜む数理

東京理科大学理数教育研究センター長 秋山 仁

古今東西を問わず、絵画や彫刻などの美術作品の背後に数学の理論が潜んでいることが  
旺々にしてあります。よく知られたところでは、グラナダのアルファンブラ宮殿で、そこ  
には対称群で分類される 17 種類すべての繰り返し模様が作品として紹介されています。

ルネッサンス期以前の絵画には、遠近法は用いられていませんでしたが、L. ダビンチ等  
による遠近法の導入によって、目で見たままの自然な風景が描写されるようになりました。  
それらの作品の背後には、射影幾何の理論が潜んでいます。

デューラの繊細な銅版画“メレンコリア I” (1514 年作) には、謎の八面体が描かれてい  
ます。この八面体は、ある平行六面体の“対角の位置にある尖った 2 頂点”のまわりを切  
頂して得られたもので、2 つの正三角形と 6 つの合同な五角形の面を持ちます。この立体の  
美の背景を、画家の榎本和子を始め多くの人々が研究し[16, 25]、そこにはこの八面体が球  
に内接することや無限の入れ子構造が存在すること等、数学的にも興味深い事実が多く指  
摘されています (図 1)。

近年では、エッシャーの繰り返しパターンの版画が、数理的背景を持つ作品としてつと  
に有名で、そこにも数学的に分類される 17 種類の繰り返しパターン模様の多くが美術作品  
にされています。

一方、日本でも、江戸時代の末期になって数学的な作図法を背景にもつ名作が葛飾北斎  
などによって描かれました。たとえば、美術評論家の中村英樹[22]によると、富嶽三十六景  
のなかの“神奈川沖浪裏”という作品はその代表格で、この作品の構図は少なくとも 3 本  
の直線と 19 個の円弧で構成されているそうです。画面の 2 本の対角線のうち、右下がりの  
対角線と四分の一円弧の交点の位置に富士山の頂上が、そして、右上がりの対角線と円弧  
の交点に大波の先端がくるように描かれていて、見る人の視線が自然と富士山に誘導され  
るような効果を生んでいるのだそうです (図 2)。

このような名作の数々に刺激されて、背後に数学的理論が潜む新しい作品を自分でも創  
り出してみたいと思うようになりました。数学的背景を持つ幾つかの拙作を以下、紹介致  
しましょう。

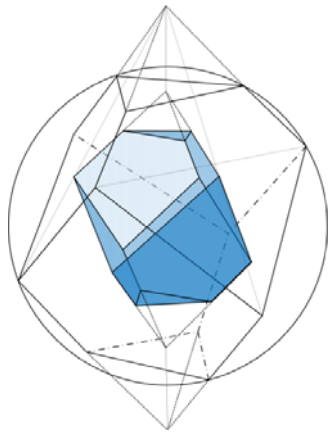


図 1

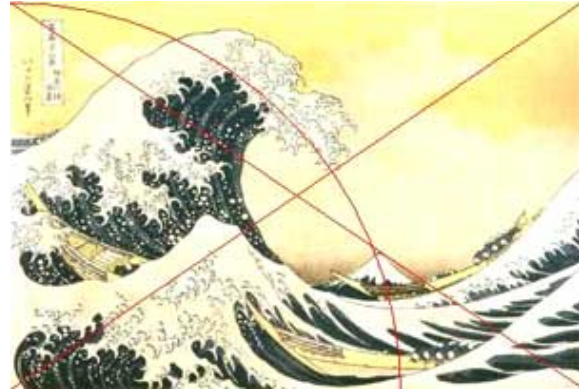


図 2

### その 1. 四面体タイル定理とエッシャー風貼り絵

“平面を何種類かの図形を使って隙間なくダブリもなく敷き詰める”というタイル張りの問題の歴史を現存する文献で辿ると、古代ギリシャの時代にまで遡ることができます。たとえば古代ギリシャの人々は、正六角形だけで平面を敷き詰めた形状に巣をつくる蜂たちを賢くて働き者の生き物とみなしていたというし[23, 30 等]、また、任意の三角形、任意の四角形 1 種類だけを使って平面をタイル張りできるという事実もこの時代から知られていたといわれています[14, 23 等]。

タイル張りの研究は、「どんな図形を使えば平面をタイル張りできるのか？特に、1 種類の図形だけで平面をタイル張りできる図形はどんな形か？」という問題から始まります。その過程で発見されたタイル張り模様がどれも、1 モチーフ（基本領域）を平行移動すればピッタリ重なる平面の周期性をもっていた（すなわち繰り返し模様になっていた）ことから、何百年にも亘ってほとんどの研究者たちが“おそらく周期的なタイル張りしか存在しないのだろう”と考えていました。そのような状況の中で、“タイル張りできる図形をみつける”という個別な図形についての研究が続けられると同時に「周期的なタイル張りで本質的に異なるものは何種類存在するのか？」という大局的に状況を捉えようという研究と、「何種類かのタイルを用いた非周期的なタイル張りは本当に存在しないのか？」という 2 つの研究の流れが生まれてきたのです。

後者については、簡単に結果だけを述べれば、数種数のタイルを用いた非周期的なタイル張りが存在しました。たとえば英国の R. ペンローズが見つけた“ペンローズ・タイル”

によるタイル張りが有名です[19, 27, 28 等]. 前者について, 歴史的に際立っているのが, 前述の 13 世紀から 14 世紀にかけて建造されたアルファンブラ宮殿です. この宮殿には, 床, 壁, 天井というありとあらゆる面に周期的な幾何学模様が施されていますが, 周期的な幾何学模様として本質的に異なるものが全部で 17 種類残されています. 周期的なタイル張りの種類は, これら 17 種類ですべてなのかどうかは 19 世紀になるまで未解決のままです. この問題に決着を付けたのは誰かについては諸説ありますが, 年代的に最も古いのは, 1891 年のロシアの結晶学者 E. S. フォードロフのようです[19, 24, 28 等]. その研究は, 平面のあらゆる周期的タイル張りが 17 種類の対称群のいずれかに属することを証明し, 平面における周期的な幾何学模様はアルファンブラ宮殿の職人たちが突きとめていた 17 種類ですべてであることを明らかにしたのです.

アルファンブラ宮殿を訪れて, この周期的な幾何学模様に触発されて創られたのが, エッシャーの有名な一連の繰り返し模様の作品群です.

エッシャーがどのように繰り返し模様のモチーフを生み出していたのかは, 彼が遺した製作ノートに幾つか描かれています. 平面を埋め尽くす基本的な形を変形させながら意味のある形のタイルを創り出していくという結構大変な作業だったようです[14, 18, 20, 21, 26 等].

しかし, もっと簡単に, いろいろな形のタイルをつくり出す方法が見つけられました. それが「四面体タイル定理」を使う方法です (図 3).

#### 四面体タイル定理[4]

正四面体のいかなる展開図もタイル張り可能である.

正四面体を切り開いて得られる展開図は無数の異なる図形になり得ます. しかし, この定理が保証していることは, それがどんな形であっても平面をタイル張りするという事です.

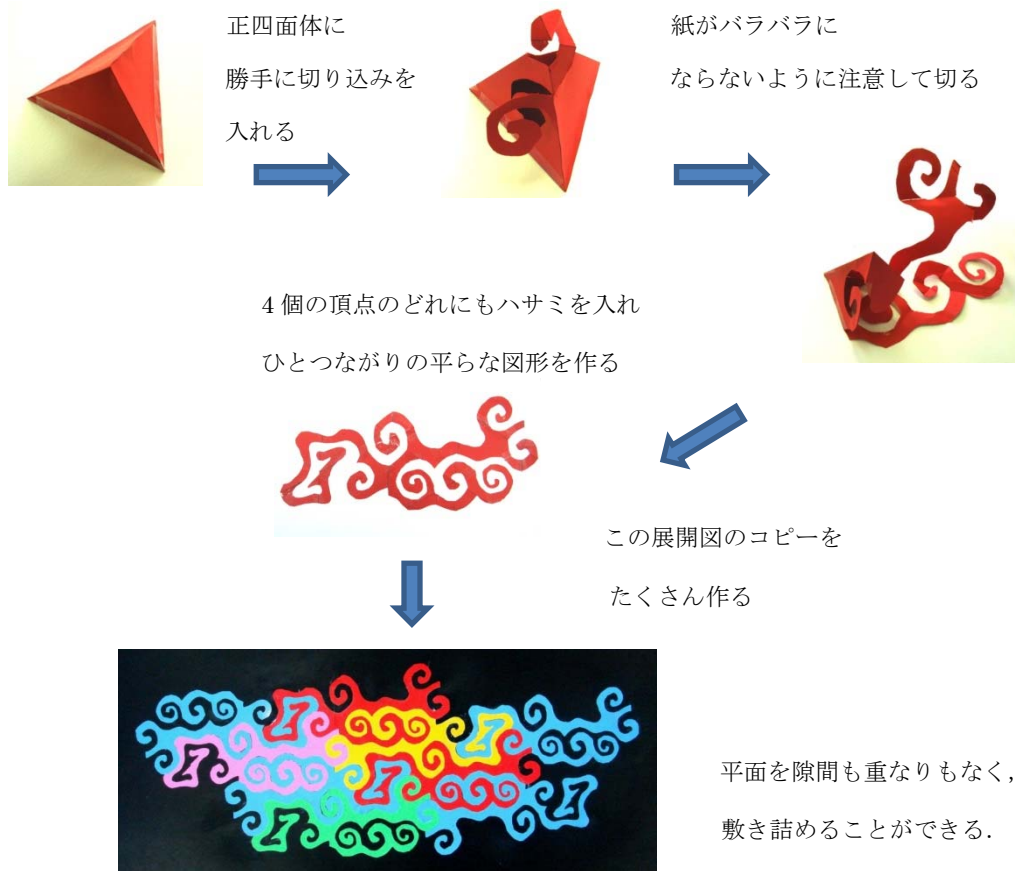


図 3

簡単な操作なので何十種類ものタイルを創作しているうちに、タイルの形自身が具体的な意味を持つエッシャーのような作品をつくってみたいくなりました[5]。最初に作った作品が“Donkey”です(図4)。



図 4 Donkey の貼り絵



図 5 ブリカマ

余談になりますが、この定理誕生のキッカケは、ブリカマに見立てた正四面体(図5)を工作用紙で作リ、それを切り開いて(展開して)どんな多角形ができるかについて調べてい

たときのことでした。正四面体の3本の辺をカッターで切って開けば正三角形や平行四辺形が得られます。面を切ることも許せば、長方形や凸五角形、凸六角形、ひし形や台形なども簡単に得ることができます[3]。しかし、凸多角形に限れば、どうしても七角形以上の形は作れません。なぜだろうと思案しているとき、1927年にK. ラインハルト[14]によって証明された“タイル張り”の結果が脳裏を寄切りました：『凸多角形に限定するならば、七角形以上のタイルでは平面をタイル張りすることはできない』。その時、「あっ、もしかしたら、正四面体のどんな展開図でも平面をタイル張りできるのではないか？」と考えたのです。

## その2. —内外逆転変身多角形定理と変身アート—

### 問題

正三角形の布を4つの断片に切り離し、それを並べ換えて1枚の正方形の布をつくることはできるか？

これは、英国の伝説的なパズル作家 H. E. デュードニー (1857–1930 年) が 1902 年と 1905 年に雑誌に掲載した有名な問題で、彼の著書「カンタベリーパズル」[15]に収められています。

デュードニーは解答の最後に次のように書いています：

『よく磨いたマホガニーの板を真鍮のちょうつがいをつないで、正三角形から正方形に、正方形から正三角形にする方法を図示しておく。4つの断片はチェーンのようにつながり、一方向に巻きつけると正三角形になり、逆に巻き付けると正方形になる。』

すなわち、このパズルでは単なる裁ち合わせの問題（断片を並び替えるだけ）ではなく、“断片をちょうつがいをつなぐこと”と、“境界辺が内部に、内部の切断線が新しい図形の境界辺になること”の2つの条件を付加した“内外逆転変身”が暗に示唆されています。このユニークな問題に触発されて、どんな多角形どうしが互いに内外逆転して変身できるのかを考えてみようと、“内外逆転変身多角形”の研究と作品づくりを始めました（図6）。



図6

凸多角形  $\alpha$  と  $\beta$  が内外逆転変身可能とは、 $\alpha$  を有限個の断片に切り分け、各断片の適当な頂点に蝶番をつけ、断片をチェーン状につなぎます。そして、端の断片を固定し、一方向に巻きつけると  $\alpha$  になり、逆方向に巻きつけると  $\beta$  になることです。ただし、 $\alpha$  や  $\beta$  を切り分けるとき、その分断線は決してどの頂点も通らないとし、変身後、 $\alpha$  の周辺は完全に  $\beta$  の内部に隠れ、 $\beta$  の周辺は  $\alpha$  の内部だけから構成されていることとします。

図形  $\alpha$  と  $\beta$  が内外逆転変身可能ならば、いうまでもなく、これらの面積が等しい(等積)ことは自明です。実際、裁ち合わせの問題ならば、多角形  $\alpha$  と  $\beta$  の等積性だけで必要十分になることはゲルウィン等 [13] によって証明されています。

以後、 $\alpha$  と  $\beta$  はいつも等積で、かつ、共に凸多角形に限定することとします。デュードニーの問題を一般化するとどうなるのでしょうか？

ひとつはどんな多角形どうしが互いに内外逆転変身可能かを決定する問題、もうひとつは、 $\alpha$ 、 $\beta$  を空間の多面体としたらどうなるかという 3次元バージョンの問題です。

このどちらの問題についても、現在では随分多くのことが解明されました。まず、平面多角形の場合を一気に片づけてくれる鍵となった結果を紹介しましょう。

**変身なら  $P_2$ -タイル定理[1, 2]**  
 $\alpha$  と  $\beta$  が内外逆転変身可能ならば、 $\alpha$  も  $\beta$  も  $180^\circ$  回転と平行移動によってタイル張り可能である。

$\alpha$ 、 $\beta$  を形の異なる六角形としたときを例に取り、証明のポイントを以下に図解しましょう (図 7)。

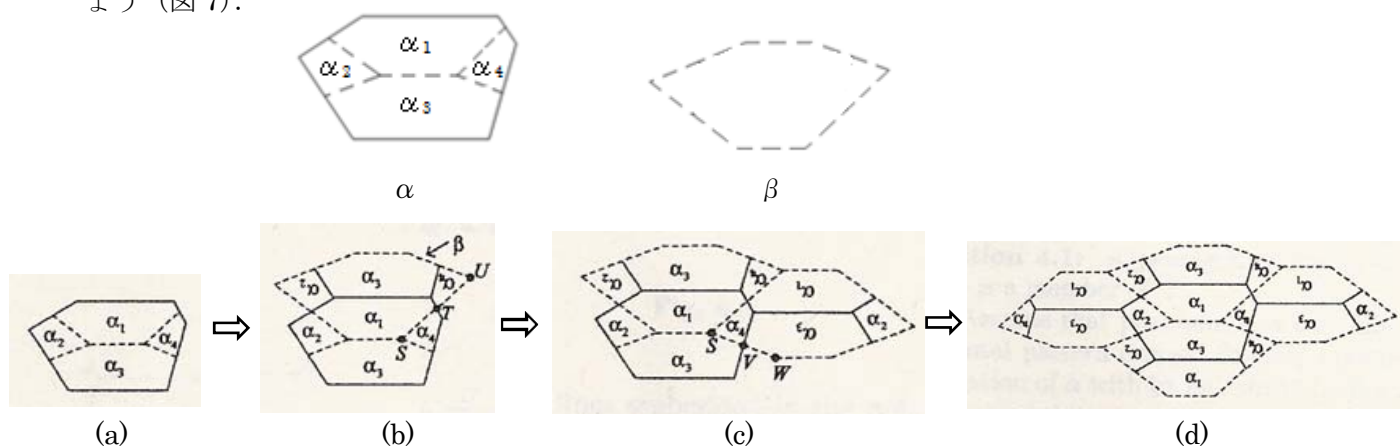


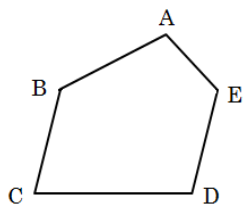
図 7

この定理は“図形が変身する”という概念が、これとは一見関係の無さそうな“タイル張りの理論”と、実は密接な関係にあることを示唆しています。

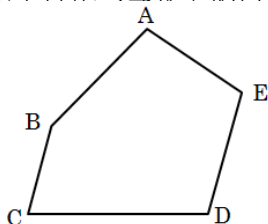
この定理を用いて、内外逆転変身図形のペアは本質的には 15 通りしか存在しないことや、切断の仕方も次の定理によって明らかにされました。

準平行多角形の 5 つの族とは、3 角形( $P_1$ )、凸四角形( $P_2$ )、ハウス型 5 角形( $P_3$ )、

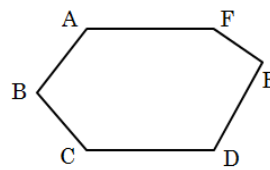
非ハウス型 5 角形( $P_4$ ), 一対の辺が平行かつ等長である 6 角形( $P_5$ )のことである.



$P_3 : BC \parallel ED, BC = ED$



$P_4 : BC \parallel ED, BC \neq ED$



$P_5 : AF \parallel CD, AF = CD$

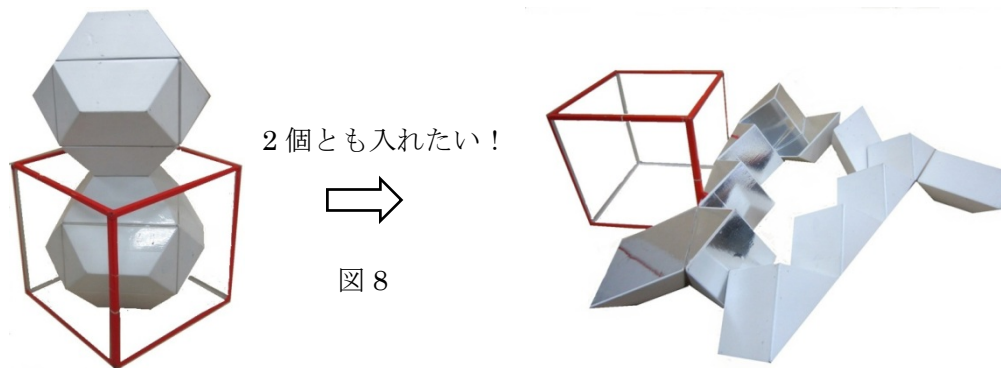
#### 内外逆転変身多角形定理[11]

内外逆転変身図形は、準平行多角形の族  $P_1 \sim P_5$  のいずれかに属する。また、5 種類の準平行多角形 ( $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ) のどの 2 つの族も相互に内外逆転変身可能である。ここに、 $P_i$  と  $P_j$  が内外逆転変身可能とは、 $P_i$  の任意の準平行多角形と  $P_j$  のある準平行多角形が変身可能になることである。

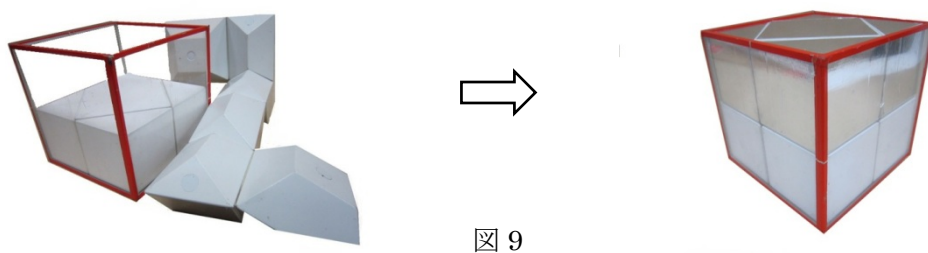
### その 3. 一平行多面体と変身立体アートー

この節では、内外逆転変身多角形の 3 次元バージョン、すなわち、表裏逆転変身多面体に関する理論と作品を紹介しましょう。まず、マジック (?) から始めましょう。

2 個の合同な切頂八面体を、その切頂八面体に外接する立方体型のプラスチックの空箱のなかに収納したいのですが、入るでしょうか? (図 8)



無理そうですが、やってみましょう。空箱の切頂八面体を裏返して変身させると立方体の半分の直方体になりました。よって、2 つの八面体がぴったりと空箱に納まりました (図 9)。



切頂八面体は空間を隙間なく埋め尽くすので“空間充填立体”と呼ばれる立体のグループのひとつです。空間充填立体は身の回りに沢山あります。テトラパックと呼ばれる牛乳パックの特殊な三角錐，方解石の結晶の平行六面体，鉛筆や燃料棒の六角柱，等軸晶系の鉱物の結晶などの菱形十二面体などです。特に，平面の場合，“内外逆転変身多角形”を見つける鍵になったのが，“平面のタイル張り”だったのと同様に，空間の“表裏逆転変身多面体”を見つける鍵になるのは“空間充填体”，それも平行移動だけによって空間を埋め尽くす平行多面体や平行移動と180度回転のみによって空間を埋め尽くす“準平行多面体( $P_2$ -充填多面体)”が鍵になります。

平行多面体は平行六面体（直方体や立方体を含む）の族  $F_1$ ，斜六角柱（直六角柱も含む）の族  $F_2$ ，切頂八面体の族  $F_3$ ，菱形十二面体の族  $F_4$  と長菱形十二面体（8個の菱形面と4個の六角形面から成る立体）の族  $F_5$  の5種類しか存在しないことが，ロシアの結晶学者 E.S. フォードロフ [12, 17] やドイツの数学者ミンコウスキー[12] によって証明されています（図 10）。

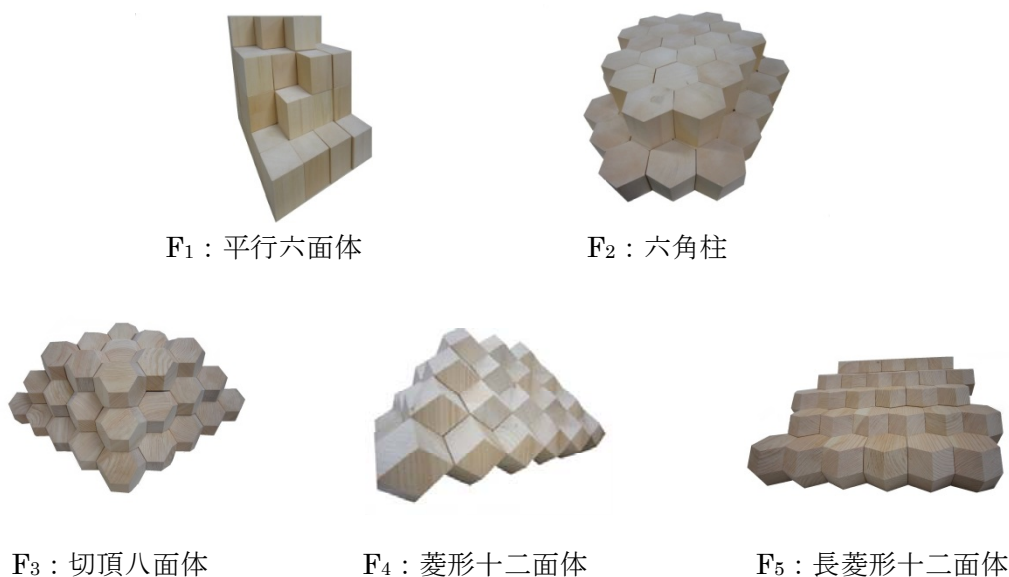


図 10

これら5種類の族から成る平行多面体の族のどの2個も表裏逆転変身可能であることが最近，証明されました。

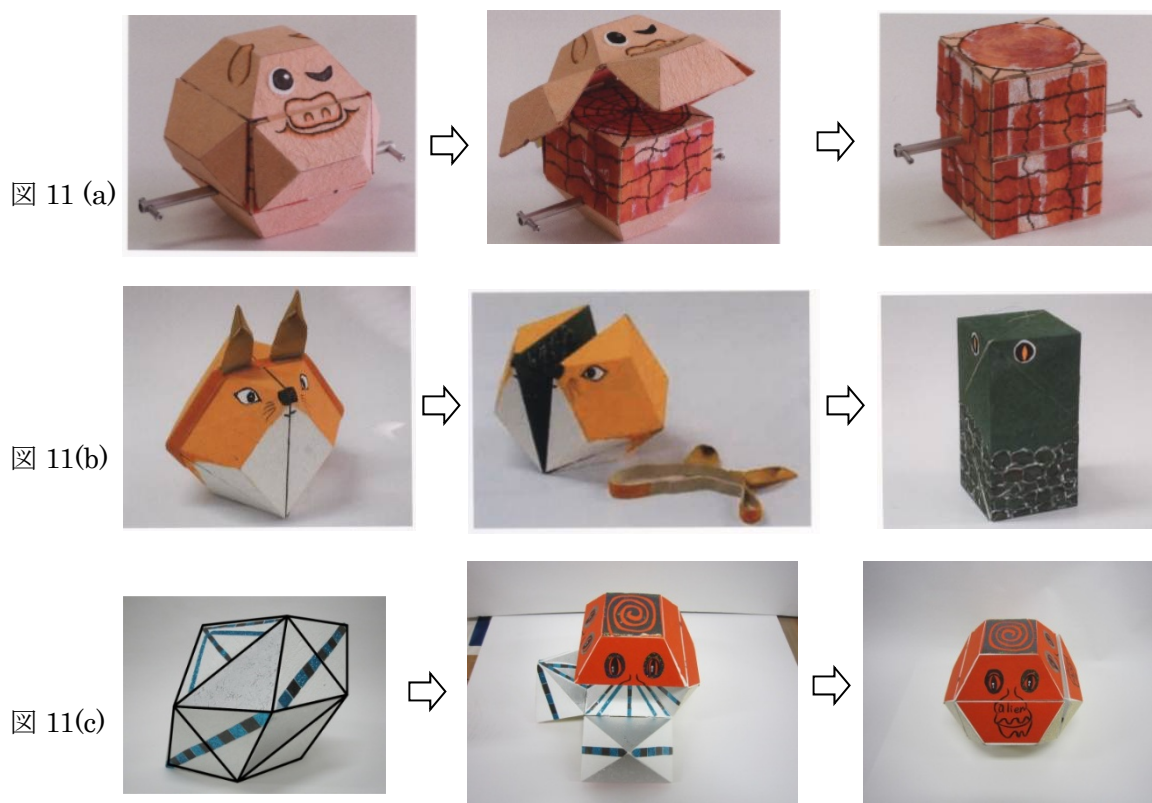
平行多面体変身定理[10]

5種類の平行多面体 ( $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ ) のどの2つの族も相互に表裏逆転変身可能である。ここに， $F_i$  が  $F_j$  へ表裏逆転変身可能とは， $F_i$  の任意の直平行多面体を辺を通らない分割面で  $m$  個の断片に切り分け， $m-1$  個の辺に蝶番をつけて，樹木状につなぎ，回転させると表裏が逆転して  $F_j$  のある直平行多面体を得られることである。ここに，直平行多面体とはある直交座標系のいずれの軸に対しても対称であることである。



上述の定理によって、これらの中のいずれの2種の多面体どうしでも変身可能になることが保証されているので、数学的に異なる(5H<sub>2</sub> ⇒)15種類の作品が得られます。それらの中から3点だけを選んで作品にしたものを紹介しましょう。

最初の作品(図11(a))は切頂八面体の表面に豚の絵を描き、それを6個の断片に切り分け、辺と辺を貼り合わせ樹木状につなぎ、鉄棒に据え付けた作品です。豚が鉄棒のまわりを1回転すると、直方体状のハムに変身します。次は“キツネへび”という作品です(図11(b))。菱形十二面体の表面にキタキツネの絵が描かれていて、それが8個の断片に切り分けられています。それを回転させると緑のへびに変身します。3つ目の作品は(図11(c))“UFO”といって、菱形十二面体が切頂八面体に変身する作品です。



#### その4. 一かたちの元素(もと)を探そう

科学における研究の大きな流れのひとつは、「対象とするものを細分化し、その元素(原子)を探し出そう」という研究です。化学では、周期表を見ると118個の元素が知られています。色の素は、三原色と呼ばれる赤と緑と青で、これらを混ぜ合わせると、いろいろな色が合成できます。数学では、“整数の素”，すなわち、素数に関する研究がギリシャ時代から今日まで活発に行われてきました。ここでは“かたち”の素について解説しましょう。

どんな多角形も、その頂点のみを頂点に用いて内部を三角形に分割できます。この意味で、三角形の族は多角形の族に対する元素と云えます。ところが、2次元で成り立つこの事実を3次元の多面体に拡張することはできません。というのは、その頂点のみを頂点に用いて内部を4面体に分割できない多面体が存在することが知られているからです[29].

与えられた多面体の族に対して元素を捜すのは一般に困難ですが、よく知られる多面体の族に対する元素が最近見つけられたので、それらを紹介しましょう。その前に元素の定義を示しておきましょう。

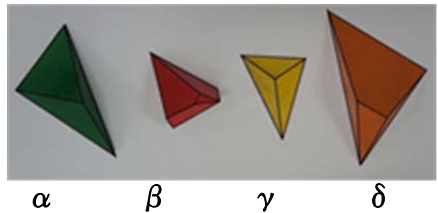
**元素の定義:** 多面体の集合  $\Sigma$  と  $\Omega$  を考える。  $\Sigma$  のどの多面体  $P$  も、  $\Omega$  に属する有限個の多面体の面と面を張り合わせて  $P$  と相似なものを作れるとき、  $\Omega$  を  $\Sigma$  の**元素集合**と言ひ、  $E(\Sigma)$  と書く。元素集合の要素のことを**元素**という。すなわち、

$$\forall P \in \Sigma, \quad P = \bigcup n_i \sigma_i \quad \text{ただし, } n_i \in \mathbb{N}, \sigma_i \in \Omega.$$

$\Sigma$  の**元素数**  $e(\Sigma)$  とは、  $\Sigma$  の元素集合の中で要素数が最小のものである。

$$e(\Sigma) = \min_{\Omega \in E(\Sigma)} |\Omega|,$$

正多面体の元素定理[6]  
 正多面体の族に対する元素数は4であり、元素集合は図12に示す4個の多面体  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  である。



正四面体      立方体      正八面体      正十二面体      正二十面体  
 $\alpha$  8       $\alpha$  8  $\beta$  12  $\gamma$  12       $\beta$  24  $\gamma$  24       $\alpha$  8  $\beta$  12  $\gamma$  12  $\delta$  12       $\beta$  24

図 12

正多面体の族に対する元素数が3以下でないことを示すには、M.デーゲンがヒルベルトの第3問題を解決するために用いたデーゲンの不変量が有効です[13].

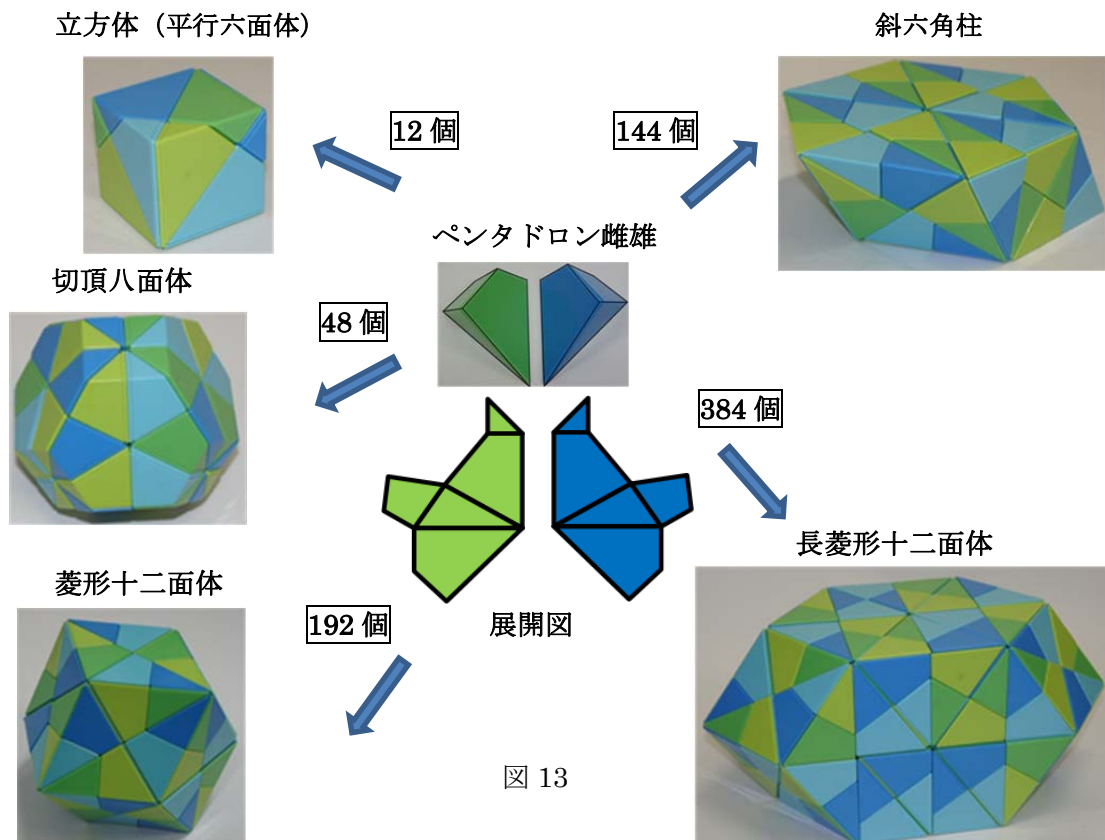
上の結果は3次元の正多面体の族に対する元素でしたが、4次元以上の正多胞体の族に対しても以下のように、元素数や元素集合が決定されています。

**n-次元正多胞体元素定理[7, 8]**  
 正4-多胞体の元素数は4であり、 $n \geq 5$ に対して、 $n$ -正多胞体  $\Pi_n$  の元素数は3である。

次元 $n$	$n$ -正多胞体の個数	元素数 $e(\Pi_n)$
2	$\infty$	$\infty$
3	5	4
4	6	4
$\geq 5$	3	3

次に、先程紹介した平行多面体の5つの族（平行六面体、切頂八面体、菱形十二面体、斜六角柱および長菱形十二面体）に対する元素数と元素集合を示しましょう。ただし、ここでの元素集合の定義は正多面体の族に対する元素集合の定義と少し異なり、元素集合に属するブロックの面と面を貼り合わせることによって、5つの族のいずれの族についても、その族に属する少なくともひとつの多面体を作ることができることとします。

**平行多面体の元素定理[9]**  
 平行多面体のどの族に対しても、その族に属するある多面体をペンタドロン（図13中央）で作れる。ペンタドロンには、右手と左手のように互いに鏡に映した関係にあるペア（雄と雌）がある。



参考文献

1. J. Akiyama and G. Nakamura, Determination of All Convex Polygons which are Chameleons, IEICE Transactions, E86-A, 978-986 (2003)
2. J. Akiyama and G. Nakamura : “Congruent Dudeney dissections of triangles and quadrilaterals” , *Algorithms and Combinatorics* **25**, 43-73 (2003)
3. J. Akiyama, K. Hirata, M. Kobayashi and G. Nakamura: Convex developments of a regular tetrahedron, *Computational Geometry* **34**, 2-10 (2006)
4. J. Akiyama, “Tile-makers and semi-tile-makers” , *American Math. Monthly* **114**, 602-609 (2007)
5. J. Akiyama and M. J. Ruiz 著, “A Day’s Adventure in Math Wonderland” , *World Scientific*, 2008 年
6. J. Akiyama, H. Maehara, G. Nakamura and I. Sato : “The element number of the platonic solids. ” *Geom. Dedicata* **145**, 181-193 (2009)
7. J. Akiyama and I. Sato : “The element number of the convex regular polytopes.” *Geom. Dedicata* **151**, 269-278 (2011)
8. J. Akiyama, S. Hitotumatu and I. Sato : “Determination of the element numbers of the regular polytopes” , *Geom. Dedicata* **159**, 89-97 (2012)
9. J. Akiyama, M. Kobayashi, H. Nakagawa, G. Nakamura and I. Sato : “Atoms for parallelohedra” , “Geometry-intuitive, discrete and convex” , *Bolyai Society Mathematical Studies, Springer, Berlin* (to appear)
10. J. Akiyama, I. Sato and H. Seong : “On the reversibilities among parallelohedra to appear in ” *Proc. of the XIV Spanish Conf. on Comp. Geom.*
11. J. Akiyama and H. Seong : “Determination of all reversible polygons (to be published)”
12. A. D. Alexandrov : “Convex polyhedra” , *Springer Monographs in Mathematics*, (2005)
13. V. G. Boltyanskii : “Equivalent and equidecomposable figures,” *D. C. Heath and Co.*, (1963). Translated and adapted from the first Russian edition (1956) by A. K. Henn and C. E. Watts.
14. COMAP, Inc. 編 “For all Practical Purposes ~ Introduction to CONTEMPORARY MATHEMATICS~ Fourth Edition” (W. H. Freeman and Company, NY) 1997 年

15. H. E. Dudeney 著 2002 年, 伴田良輔訳 「カンタベリー・パズル」(ちくま学芸文庫) 2009 年
16. 榎本和子著 「無限」のヴィジョン・8 面体 A. デューラー (メレンコリア I) (第 18 回オマージュ瀧口修造展 図録 佐谷画廊) 1998 年
17. E. S. Fedorov : “An introduction to the theory of figures” , *Notices of the Imperial Mineralogical Society Ser.2, Vol.21*, 1-279 (1885). Republished with comments by *Akad. Nauk. SSSR*, Moscow, 1953, in Russian.
18. 伏見康治, 安野光雅, 中村義作著 「美の幾何学」(中公新書) 1979 年
19. P. M. ヒギンス著 富永星訳, 「想像力で解く数学～幾何の発想をきたえる～」, 白揚社, 2005 年
20. C. H. マックギラフィ著, 有馬朗人訳, 伏見康治解説 「エッシャー《シンメトリーの世界》」(サイエンス社) 1980 年
21. 中村義作著 「エッシャーの絵から結晶構造へ」(海鳴社) 1998 年
22. 中村英樹著 「新・北斎万華鏡」(美術出版社) 2004 年
23. I. Peterson 著 “Islands of Truth” (W. H. Freeman and Company) 1990 年
24. C. A. Pickover 著 “The M $\alpha$  TH  $\beta$  OOK” (STERLING) 2009 年
25. F. Saxl, E. Panofsky, R. Klibansky 著, 田中英道監訳, 榎本, 尾崎, 加藤訳「土星とメランコリー」(晶文社) 1991 年
26. D. Schattschneider, “M. C. Escher : Visions of Symmetry”, *Harry N. Abrams Inc.*, (2004)
27. M. D. ソートイ著, 富永星訳 「シンメトリーの地図帳」(新潮社) 2010 年
28. I. Stewart 著, 梶山あゆみ訳, 「自然界の秘められたデザイン」(河出書房新社) 2009 年
29. 杉原厚吉, 3 次元単体メッシュ生成の課題—計算幾何学の立場から—数理解析研究所講究録, 1084 巻 (1999 年), 124-134.
30. G. G. Szpiro 著, 青木薫訳, 「ケプラー予想」(新潮社) 2005 年