

# 結び目理論をゲームに応用する

清水理佳 (広島大学大学院理学研究科 特任助教)

## 1 ゲームの背景—領域交差交換

結び目理論を応用したゲームで、「領域選択ゲーム」というものがある。昨年12月には Android 搭載スマートフォンのアプリにもなり、そのインストール数は公開後3ヶ月で5,000を超え、子どもからお年寄りまで広く親しまれるゲームとなった。(iPhone版もリリース予定である。また、大阪市立大学数学研究所のホームページにて数問を公開中である [7].) このゲームは、結び目理論における「領域交差交換」という変形の研究から生まれたものである。本稿では、この領域選択ゲームの起こりと今後の展望について解説する。

2010年秋、大阪市立大学の結び目ゼミで、当時数学研究所の研究所員であった岸本健吾氏(現大阪工業大学)が次のような問題を提起した。

結び目図式における領域交差交換は、結び目解消操作か？

領域交差交換とは岸本氏によって定義された、結び目や絡み目の図式における変形のことである。ここで結び目とは、円周の、3次元球面への埋め込みの像のことである。また、図1の  $D$  や  $D'$  のような、結び目を2次元球面  $S^2$  に描き表したものを、その結び目の図式という。ただし2本の弧が横断的に交わるような弧の交わり方のみ許されるものとする。交差点を  $n$  個持つような結び目図式は  $S^2$  を  $n+2$  個の部分に分ける。この分けられた個々の部分を領域という。結び目図式  $D$  をある領域  $R$  で領域交差交換するとは、図1のように、その領域の境界上にある全ての交差点において上下を入れ替えることである。

岸本氏の問いは、言い換えると、任意の結び目図式を有限回の領域交差交換によって、ほどけた結び目を表す図式に変形することができるか、ということになる。この



図 1: 領域交差交換

問いに答えるために、当時大阪市立大学の大学院生であった著者は次の定理を示した ([6]).

定理. 任意の結び目図式において、有限回の領域交差交換によって任意の交差点の上下を入れ替えることができる.

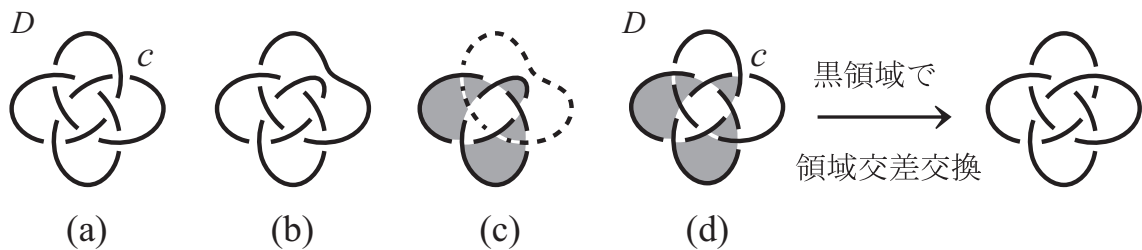


図 2:

例えば図 2 (a) において、図式  $D$  の交差点  $c$  の上下を入れ替えるには次のようにすればよい。まず  $c$  に、スプライスという繋ぎ換えの操作をすることによって、 $D$  を 2 成分絡み目の図式に変形する (b)。次に片方の結び目成分の図式に対してチェッカーボード彩色という白黒の塗り分けを行い (c)、その黒色領域に対応する  $D$  の 5 つの領域で領域交差交換する (d)。どのような結び目図式でも、いくつかの交差点の上下を入れ替えることによって、ほどけた結び目の図式に変形できることが知られている。よって岸本氏の問いを肯定的に解決することができた。その後、Z. Cheng 氏、H. Gao 氏、また橋爪恵氏により絡み目への一般化がなされた ([5], [4], [1])。

## 2 ゲームへの応用

岸本氏の問いから、タッチパネルの電子機器等を用いて、領域交差交換によって画面上の結び目図式をほどくゲームが考えられる。しかしこれは、一般に幅広く受け入れられるゲームとしての実現は難しい。というのも、結び目図式を、特に交点数の多い結び目図式を、ぱっと見ただけではそれがほどけているのか絡まっているのかわからないからである。そこで、指導教員の河内明夫教授が次のようにゲームを改良した。まず、結び目図式の全ての交差点を、オン/オフが切り替えられるランプに置き換える（これをランプ付き結び目射影図と呼ぶ）。ランプ付き結び目射影図における領域交差交換は、領域の境界上にある全てのランプのオン/オフを切り替える操作とする。すると、上の定理から、次のことがわかる。

任意のランプ付き結び目射影図において、有限回の領域交差交換によって任意のランプのオン/オフを切り替えることができる。

つまり、どのような結び目射影図でも、そしてどのようなランプの点灯状態であっても、領域交差交換によってランプを全点灯状態にすることができるということである。そこで生まれたのが領域選択ゲームである。すなわち、与えられたランプ付き結び目射影図の領域を選択していき、全てのランプを点灯させるゲームである（図3）。このゲームは河内明夫教授、岸本健吾氏と著者の共同発明であり、ゲーム装置および

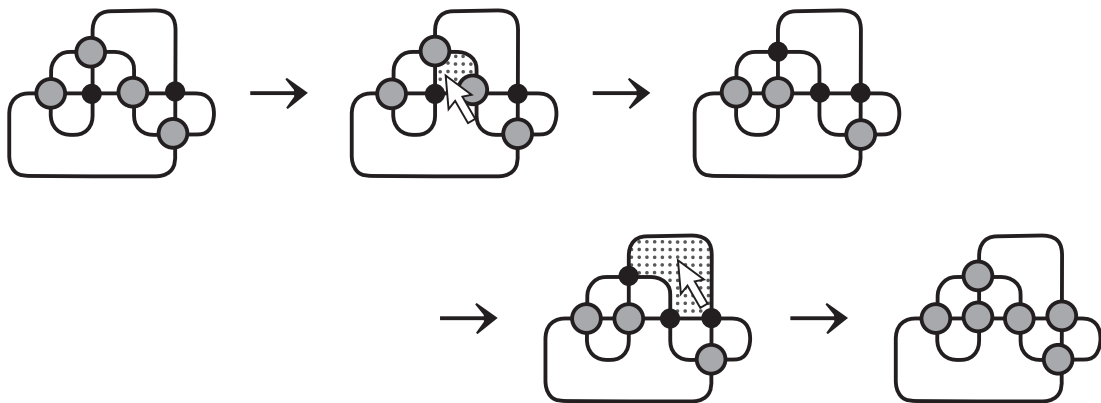


図 3: 領域選択ゲーム

ゲームプログラムとして特許出願中である。その後、発明者らによって提案された領域選択ゲームの双対版や、阿原一志氏と鈴木正明氏によって well-definedness が示された、ランプのオン/オフを一般化し  $n$  色のランプを用いたゲーム ([3])、山口大学の松本知子氏の卒業研究の中で提案された弧選択ゲーム [2] 等、関連ゲームが豊富に提案されている。

### 3 今後の展望

純粋数学の一分野から生まれた、言葉も数式もないこのゲームには、実に様々な応用の可能性が考えられる。例えば教育分野への応用である。領域選択ゲームは結び目の射影図を用いた新感覚パズルゲームであり、解くほどに図形的センスや直感が磨かれていくように著者は考えている。このゲームを子どもが繰り返し遊ぶことで、図形に親しみ柔軟に学習していくことを期待する。そのためには図 4、あるいは [8] のような親しみやすいデザインが求められる。医療への応用についても、例えば

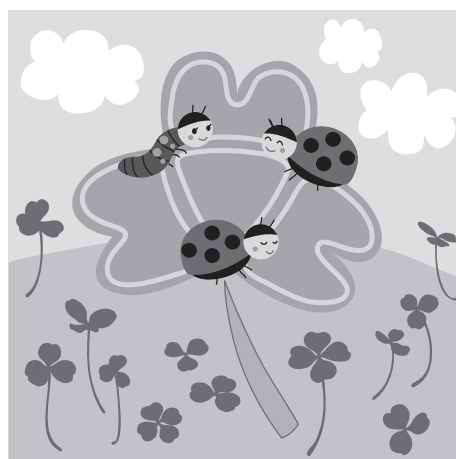


図 4: りょういきせんたくゲーム

認知症患者のリハビリで、領域選択ゲームを使って図形や空間を認識する能力を鍛える、あるいは一般に脳のトレーニングとしても使える。このように教育や医療、さらには工学や産業にまで幅広く応用することを期待しており、その一部は実現に向

---

本ゲームの産業分野への技術移転につきましてお世話になりました、大阪市立大学新産業創生研究センターの倉田昇さん、井上孝志さんに、この場を借りてお礼申し上げます。特許出願や知的財産に関する知識が乏しかった発明者達を手厚くサポートしてくださいました。

けて動き出している。純粹で抽象的な数学から生まれたゲームであるからこそ、応用の幅はとても広く、限らない可能性を秘めているのではないか。

## 参考文献

- [1] 橋爪恵: リンクダイアグラムの鏡像を与える領域交差変換について, <http://megumihashizume.web.fc2.com/data/scienceic.pdf>
- [2] 松本知子: 結び目理論によるパズル解析, 平成 23 年度山口大学理学部数理科学科卒業論文, <http://www.skaji.org/lectures/undergraduate>
- [3] K. Ahara and M. Suzuki: *An integral region choice problem on knot projection*, arXiv: 1201.4539.
- [4] Z. Cheng: *When is region crossing change an unknotting operation?*, arXiv: 1201.1735.
- [5] Z. Cheng and H. Gao: *On region crossing change and incidence matrix*, to appear in Science China Mathematics.
- [6] A. Shimizu: *Region crossing change is an unknotting operation*, arXiv:1011.6304.
- [7] 領域選択ゲーム: <http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/math/OCAMI/news/gamehp/gametop.html>
- [8] りょういきせんたくゲーム(こどもよう): <http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/math/OCAMI/news/gamehp/c3game/game3/top.html>