望月拓郎氏の日本学士院賞受賞に寄せて

IPMU 主任研究員　斎藤恭司

望月拓郎さんは受賞対象と成った「純ツイスター D-加群の理論」と言う幾何，解析，代数が交錯する理論を打ち立て，その応用として柏原予想として知られる半単純なホロノミック D-加群に対して強 Lefschetz 定理，分解定理等の性質を示すとともに，半単純性が固有写像により保存されるという，非常に深くかつ強力な結果を示しました．筆者もその全容をフォロウしきれていませんが，ここにささやかなお祝いの言葉を述べ，そのお仕事の一端の紹介を試みたいと思います．

望月さんがお仕事を始める 10 年余り前に複素幾何学の中で起きた，代数幾何と微分幾何とを繋げる或る研究の流れの説明から始めましょう．

小林–Hitchin 対応と呼ばれる数学結果が有ります．それは 複素射影多様体 X 上のベクトル束 E が μ_L-多重安定性と呼ばれる代数幾何的条件を満たす事と Hermitian–Einstein と呼ばれる良い微分幾何的計量を持つ事が等価である 事を主張するものです（Uhlenbeck–Yau(1986), Donaldson(1987)）．一方ベクトル束 E にその上の平坦接続を退化させた構造 $\theta \in \mathrm{End}(E) \otimes \Omega^{1,0}$ $(\theta \wedge \theta = 0)$ とを組み合わせた組 (E, θ) の事を Higgs 束と呼びますが，Simpson(1988[21]) は Higgs 束に対しても小林–Hitchin 対応が成立する事を示しました．

さらにその束 E の Chern class が 0 に成る場合は Corlette(1988[3]) による結果も併せて，滑らかな射影多様体の上では次の 3 概念が等価になる事が示されます：1. Chern 類が 0 となる多重安定な Higgs 束，2．調和束，3．半単純平坦束．[1] ここで，1．と 2．の同値が小林–Hitchin 対応の一般化ですが，それが 2．の計量の存在を通して 1. の安定性と 3．の半単純性とが同値に成る事（Corlette–Simpson 対応）がこれからの話の鍵になります．

先に行く前にこの結果の応用として「準射影的[2]多様体の基本群は $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ $(n \geq 3)$ を含まない.」が出る事に注意します．ベクトル束に関するこの様な抽象的理論が基本群に関する結果を導く事 (Simpson) にすごさを感じます．

望月さんのお仕事は，上記の射影多様体 X 上のベクトル束に対する等価性を滑らかな準射影多様体の場合に拡張する事から始まった様に見えます．[3]

---

[1] ここで新たな概念が二つ登場したので，簡単に説明します．多様体 X 上の調和束とは基本群の表現 $\pi_1(X, x) \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ と不変被覆空間 $\tilde{X}$ から対称空間 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})/\mathrm{U}(n)$ への π_1-同変な多重調和写像の事 (Corlette) です．一方，平坦束とは曲率がゼロと成る (可積分な) 接続を持つ束の事で，その接続の線形微分方程式系を積分する事により解達のなす多様体上の局所系を与える事と同値ですが，更に，その局所系を与える事とそれ等の解の大域的モノドロミーを用いて基本群の有限次元線形表現を与える事と同値です．その時，局所系が半単純であるとは対応する基本群の表現が半単純である事を言います.

[2] 準射影的な場合は後の望月氏による一般化を用います.

[3] ここで準射影多様体とは Zariski 位相に関して局所閉な射影多様体の部分集合の事です．滑らかな準射影多様体は射影多様体の Zariski 開集合ともみなせ，広中の定理を使えば，或る射影多様体 X から正規交差する因子 (余次元 1 の部分空間) D を取り除いた残り $X \setminus D$ と見なして良いことに成ります．1 次元 (曲線) の X 上でのベクトル束にたいする上記の等価については，既に Simpson が手がけていますが，一般の次元迄広げる事により，各種の概念が空間の幾何学的操作で安定である事迄確立したのはこれから述べる望月さんのお仕事と思います.

対象を射影多様体から準射影的空間に拡張した事は，一見何気なく見えるかもしれませんが，二つただならぬ意味を持っていたと思います．第一には問題が開多様体に成った時点で，計量を定める非線形微分方程式は境界 D で特異性を持つのでその挙動の解析をする大仕事が必要です．[4] 他方，接続の定める線形微分方程式系は無限遠（境界 D) で特異となり，その解は境界に近づいた時複雑な挙動を示します．これは古典的には複素線形常微分方程式系（ホロノミック系）の特異性に関する事ですが，普通は接続の線形微分方程式系が境界上でも有理関数を用いて書ける（高々極しか持たない）と言う制限のもとで研究されています．それでも，一般的解析は難しく“ wild ”と呼ばれており，望月さん（Simpson に始まる）はまずは制限を設けて“ tame ”(従順) と呼ばれる，解の発散が高々多項式位数の場合（微分方程式の言葉では確定特異点と呼ばれる．対して“ wild ”は不確定特異点と呼ばれる）について，ほぼ完全な形で安定 Higgs 束と調和束との小林–Hitchin 対応関係を与える仕事を数年がかりでやり遂げました．

次に，研究対象を射影多様体から準射影多様体に広げる第二の意味はそれによって応用が格段に広まった点です．この拡張により，代数幾何に於ける多くのモヂュライ空間を対象に含ませたと言って良いでしょう（更に，代数空間や代数的スタック迄広げるという課題は未だ残っていると思いますが）．例えば伝統的に研究されて来た多様体の Hodge 構造の変形を考えると，その変形のパラメーター空間 X は普通はコムパクトではなく何処かで Hodge 構造が退化する様な境界点（つまり因子 D の点）に突き当たります．例えば楕円曲線 $\mathbf{C}/\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$ は複素上半平面に有るパラメーター τ を動かす事により変形されますがその τ が無限遠点また境界の有理点に近づく応じて，種々の退化現象を起こす事は小平先生の仕事により良く知られています．より一般に因子 D の補集合の各点で定義された偏極（つまり内積）付き Hodge 構造の族が因子の周りでどのように振る舞うかについては Cattani–Kaplan–Schmid, Kashiwara–Kawai 等による研究が有ります．一方 Simpson はホッジ構造の一般化と言えるツイスター構造を導入し，harmonic bundle がツイスター構造の変動とみなせる事を示しました．望月さんは $X-D$ 上の tame な調和束が，自然に有理型な平坦束やヒッグス束として X 上に延長する事，さらに境界の付近ではホッジ構造とほぼ同様に振る舞い，Limit 混合ツイスター構造が得られる事，等を示しました．

準射影多様体 $X-D$ 上のベクトル束とその上の接続の概念は自然にその上の D-加群として記述できますが, さらにその接続の線形微分方程式系が境界 D 上で高々極しか持たなければ，それは自然に射影多様体 X 上のホロノミックな D-加群（佐藤–柏原–河合）に広げられます．その解たちは単に $X-D$ 上の局所系を与えるのみでなく，境界 D 上で定まった高次コホモロジカルな解達と併せて X 上の構成可能層の複体で偏屈層と呼ばれるものを定めます．このとき X 上で確定特異点を持

[4]滑らかな準射影多様体上の平坦束に関して多重調和計量の存在については Jost–Zuo による先行研究 [6][7] が有りましたが，[13] では，それ等が tame かつ虚であることを示し，さらに，tame かつ虚な多重調和計量の一意性や，逆にそのような多重調和計量が存在すればその平坦束は半単純と成る事が示されています．[14] では異なる方法で tame かつ虚な多重調和計量を構成していますが，一意性が有る為に，結果として同じものに成ります．[14] の方法は後に wild の場合迄拡張出来ますが， [7] や [13] の方法で拡張出来るかは今の所知られていない様です．

つホロノミック D-加群の圏と偏屈層のなす圏はド．ラム関手により同値に成る事 (Riemann–Hilbert 対応) が柏原, Mebkhout 等により示されています．その正標数版として Beilinson–Bernstein–Deligne–Gabber によりガロア群の作用のもとに，正標数構成可能偏屈層が強 Lefschetz 定理，分解定理，半単純性などの深い性質が知られており [1]，対応して標数ゼロの場合にはホッジ加群の理論（斎藤盛彦 [17][18]）において同様な構造の研究がなされてきました．ホッジ加群の場合には局所モノドロミーの固有値は 1 の冪根ですが，その制限を取り払い，更に一般の不確定特異点をも持つ場合も許して，1996 年に柏原正樹は射影多様体上の任意の半単純ホロノミック D-加群に対しても強 Lefschetz 定理，分解定理等の性質が成り立つであろうと予想しました [8]．勿論，この予想は，確定特異点をもつホロノミック D-加群の圏に制限すれば，標数ゼロの場合の半単純構成可能偏屈層に対して強 Lefschetz 定理，分解定理等の性質が成り立つ事を主張するものです．

C. Sabbah(2005[19]) は柏原予想の解決のプログラムとしてホッジ-加群のツイスター版である純ツイスター D-加群の概念を導入しその基本的性質を研究しました．一方，準射影多様体 $X-D$ 上定義された単純平坦束は先に示した望月さんによる良い調和計量を持つ事を用いて，境界 D 迄含めた X 上の偏極付き純 twistor D-加群にまで延長する事が示せます．こうして望月さんは $X-D$ 上の単純平坦束を，X 上の偏屈層迄広げ，X 上の純 twistor D-加群の分解定理に帰着させる事により，Sabbah のプログラムを完成させて，tame の場合の柏原予想を解決するに至ったのです．

望月さんはその後，此れ等の結果を平坦接続に対応する有理型線形微分方程式の特異点が確定型 (tame) の場合から不確定型 (wild) の場合に迄拡張しています．不確定型特異点の場合，解の漸近挙動が入れ替わる turning point [5] が存在します．その様な turning point は，適当な双有理射影射 $X' \to X$ による引き戻しにより解消されるであろうと予想されてましたが (Sabbah), 望月さんが代数曲面上の平坦束の場合 turning point の解消の存在定理を示す事により，突破口が開かれた様です [15] (より一般的な場合は [9][10] 参照)．これ等の結果は複素微分方程式の研究にとっても驚く結果の様に見えますが，射影多様体上の半単純な有理型特異点を持つ様な平坦束で不確定特異点を持つ様な wild な場合に対して，多重調和計量を構成する上でも重要な様です（筆者はフォロウ出来ていません）．こうして任意のホロノミック D-加群に純ツイスター D-加群の構造が入り，望月さんは，wild な場合も含めた柏原予想の完全な解決に至った様です [16]．

この様な純代数（解析）的に述べられる分解定理が良い計量の存在と言う微分幾何的な構造をとおして示された事に不思議さを感じます．

一方，柏原予想の確定特異点の場合は Riemann–Hilbert 対応を通して偏屈層の予想になりますが，Drinfeld [4] は数論幾何の標準的な手法を用いて正標数に帰着させ関数体の Langlands 対応を用いることで de Jong 予想と呼ばれる予想に帰着させました．その予想も肯定的に解かれているそうです [2][5].

[5] ここで，点 $p \in D$ が接続 ∇ の turning point で有るとは，その点での接続の formal completion が分岐被覆をとってもしかるべき条件を満たす $\bigoplus R_{a_i} \otimes L_{a_i}$ なる分解を持たない事，ただし R_{a_i} は確定特異点を持ち L_{a_i} は階数 1 で e^{-a_i} $(a_i \in \mathbf{C})$ を平坦セクションに持つものとします．

こうして見て来ると，望月さんのお仕事は，数学の大きな流れに有る諸問題を，大きな所から的確に捉え吸収しながら，それをより大きな自然なものへ昇華させて行った事が分ります．一方，望月さんのこれらの研究の背景には日本で発展した数学（複素常微分方程式の特異点の研究（福原スクール），D-加群（佐藤–柏原–河合）や Hodge-加群 (斎藤盛彦）の研究，原始形式の研究（筆者）等）とも深い接点を持ちながらそれを超えて行った事についても触れる意味も有ると思います．私は第三の視点から，望月氏の研究の発展を見守って来たのですが，この様にあれよあれよと言う間に，一般化されて行ったその勢いに驚かされたものです.

なお今回の受賞対象ではないですが，望月氏は純ツイスター D-加群関連のお仕事の他に Donaldson 不変量関連でも一連のお仕事（壁越え公式等）をしていますが，この記事では深入りしません．それ等のお仕事については一部の専門家を除いてはあまりしられていないようですが，別途プロフェッショナルな方々による正当な評価が必要と思います.

望月さんのお仕事は既に述べた様に，今後数学の幾何 (微分幾何，複素幾何，代数幾何)，解析（複素解析，常微分方程式，D-加群），表現論　等を含む広汎な領域に影響を及ぼして行くと思われますが，私自身，その影響がどのような広がりを見せるのか想像出来ません．一方その高度に技術的な側面から望月さんのお仕事は未だ広く理解されているとはいえません．例えば，広中さんの特異点解消の定理は，有る程度代数幾何の基礎訓練を受けたものであるならば，誰で使える状態にあると言って良いと思いますが，それに近い状態にしたいものです．此れは寧ろ“ 受益者側 ”の問題で有ると思います．もっと望月さんのお仕事と諸分野との接点での研究活動がそれぞれの分野のイニシアチブで活発に起きてくる事を期待したいものです．そこには非常に豊富で深い新たな数学が生まれて来る事を期待して良いでしょう．それこそこの受賞の本当の意味と言って良いかもしれません.

此れ迄に，色々な研究集会やスクール等の機会に望月さんと知合う機会がありましたが，そこでは，望月さんの謙虚で誠実なお人柄，また数学に対する真摯で真っすぐな姿勢に強く印象づけられました．望月さんのお仕事が多くの数学者に認知されて行くのは嬉しい事です．望月さんが今後更にどのような研究の発展をみせて頂けるのか楽しみでもあり怖くも有ります.

参考文献

[1] A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne: Faisceaux pervers, In: Analysis and topology on singular spaces, I, Luminy, 1981, Astérisque, **100**, Soc. Math. France, Paris (1982), 5–171.

[2] G. Böckle and C. Khare, Mod ℓ representations of arithmetic fundamental groups II (A conjecture of A. J. de Jong), Compos. Math., **142** (2006), 271–294.

[3] K. Corlette: Flat G-bundles with canonical metrics, J. Differential Geom., **28** (1988), 361–382.

[4] V. Drinfeld, On a conjecture of Kashiwara, Math. Res. Lett., **8** (2001), 713–728.

[5] D. Gaitsgory, On de Jong 's conjecture, Israel J. Math., **157** (2007), 155–191.

[6] J. Jost and K. Zuo: Harmonic maps and $Sl(r, C)-$ representations of fundamental groups of quasiprojective manifolds, J. Algebraic Geometry, **5** (1996), 77–106.

[7] J. Jost and K. Zuo: Harmonic maps of infinite energy and rigidity results for representations of fundamental groups of quasiprojective varieties, J. Differential Geom., **47** (1997), 469–503.

[8] M. Kashiwara: Semisimple holonomic D-modules, in: Topological field theory, primitive forms and related topics, Kyoto, 1996, Progr. Math., **160**, Birkhäuser, Boston (1998), 267–271.

[9] K. Kedlaya, Good formal structures for flat meromorphic connections, I; Surfaces, Duke Math. J., **154**, No. 2 (2010), 343–418, math:0811.0190.

[10] K. Kedlaya, Good formal structures for flat meromorphic connections, II; Excellent schemes, J. Amer. Math. Soc., **24** (2011), 183–229, arxiv:1001.0544.

[11] T. Mochizuki: Asymptotic behaviour of tame nilpotent harmonic bundles with trivial parabolic structure, J. Differential Geom., **62** (2002), 351–559.

[12] T. Mochizuki: Kobayashi–Hitchin correspondence for tame harmonic bundles and an application, Astérisque, **309**, Soc. Math. France, Paris (2006).

[13] T. Mochizuki: Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules, I, II, Mem. Amer. Math. Soc., **185** (2007), I: no.869, II: no.870.

[14] T. Mochizuki: Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles, II, Geometry & Topology, **13** (2009), 359–455.

[15] T. Mochizuki: Good formal structure for meromorphic flat connections on smooth projective surfaces, In :"Algebraic Analysis and Around", Advanced Studies in Pure Mathematics, **54** (2009), 223–253.

[16] T. Mochizuki: Wild harmonic bundles and wild pure twistor D-modules, to appear in Astérisque, arxiv:0803.1344.

[17] M. Saito: Modules de Hodge polarisables, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **24** (1988), no. 6 (1989), 849–995.

[18] M. Saito: Mixed Hodge modules, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **26** (1990), 221–333.

[19] C. Sabbah: Polarizable twistor $\mathcal{D}$-modules, Astérisque, **300**, Soc. Math. France, Paris (2005).

[20] C. Sabbah: Wild twistor $\mathcal{D}$-modules, In: Algebraic analysis and around, Adv. Stud. Pure Math., **54**, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2009), 293–353, math.AG/0803.0287.

[21] C. Simpson: Constructing variations of Hodge structure using Yang–Mills theory and applications to uniformization, J. Amer. Math. Soc., **1** (1988), 867–918.

[22] C. Simpson: Harmonic bundles on noncompact curves, J. Amer. Math. Soc., **3** (1990), 713–770.

[23] C. Simpson: Higgs bundles and local systems, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **75** (1992), 5–95.