調和級数から指数定理へ

森吉 仁志（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

2010 年 3 月 28 日の日本数学会において,「調和級数から指数定理へ」という題目で市民講演を行いました．ここで講演内容を御報告する次第です.

まず簡単に講演内容をご紹介します．数学者であるならば，あるいは数学者でなくとも，調和数列 (harmonic sequence) や調和級数 (harmonic series) の定義はよくご存知のことと思います．この調和 (harmonic) という形容詞は少々奇異に映るかもしれませんが，この数列に応じて弦を分割すると，いわゆるピタゴラス音階が現れてくるためにこのような名前が与えられています．市民講演では調和級数の定義から始め，ピタゴラス音階や「コインの斜塔」のクイズなど，それとは気づかれぬものの我々の身近に潜んでいる調和数列・級数に関連する話題を取り上げ，つぎに調和級数からリーマンのゼータ関数へと話を移し，その特殊値として現れる関・ベルヌーイ数に言及しました．そして関・ベルヌーイ数の母関数として現れるトッド関数

$$\mathrm{Td}(x) = \frac{x}{1-e^{-x}}$$

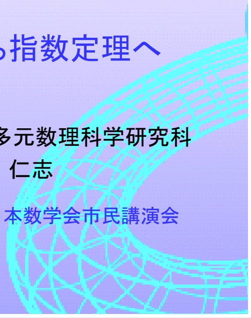
にまつわるいくつかの話題を取り上げました．トッド関数は関・ベルヌーイ数の母関数として現れるだけでなく，黒体輻射に関するプランクの公式やリーマン・ロッホ問題の位相幾何公式にもその姿を現します．そして上の式を，通常のコホモロジー理論と K 理論とにおけるオイラー類の比と理解し直すことで，アティヤー・シンガー指数定理の公式にも結びついて行きます．落語の三題噺の趣は拭えませんが，こうして調和級数から始めた話を指数定理に収束させました．参加された市民の皆さんの興味を惹いたかどうかについては，今後の反応を待ちたいと思います.

最後に「市民の数学」について少しばかりお話をしました．石川英輔「大江戸テクノロジー事情」は，一つの章を割いて和算について述べています．江戸時代に，他分野からの影響を受けたわけでもなく，独自に高度な発展を遂げた和算の原動力となったのは，人格を高めようとする心であったというのです．中国の古典「周礼」（しゅらい）では，身分あるものが備えるべき基本教養として六芸（りくげい）即ち，礼 =礼節（道徳教育）・楽 =音楽・射 =弓術・御 = 馬車を操る技術 ・書 =文学 ・数 =数学を挙げています．この一つである数学を学ぶことで人格を高めようとする心が和算の原動力であったと石川は言います．その心は，現代の市民の数学にも資するものでしょうか.

以下は市民講演会のために作成した PPT ファイルです．御参考までに皆様の一覧に供します.

1

調和級数から指数定理へ



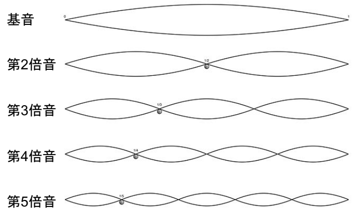
名古屋大学大学院多元数理科学研究科
森吉　仁志

2010年3月28日　日本数学会市民講演会

2

調和数列＝ harmonic series

- 調和級数と音階（ハーモニー）に密接な関連がある（管楽器では倍音により様々な音色が出る）



調和級数とは何か

- 調和数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots \qquad a_n=\frac{1}{n}$$

- 調和級数

$$s_1=1,\quad s_2=1+\frac{1}{2},\quad s_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\quad \cdots$$

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

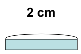
耳は調和数列を知っている

ピタゴラス音階

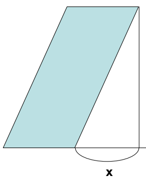
http://www.animato-jp.net/~se/baion.html

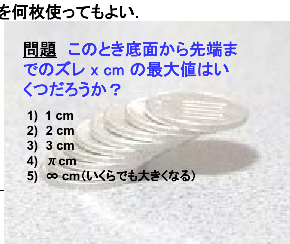
3

コインの斜塔



1枚の重さが1グラムで直径2cm (半径1cm)のコインを積み上げてゆく.
コインを何枚使ってもよい.





問題　このとき底面から先端までのズレ x cm の最大値はいくつだろうか？

1) 1 cm
2) 2 cm
3) 3 cm
4) π cm
5) ∞ cm(いくらでも大きくなる)

4

調和級数が現れる

- 重心の位置を求めよう

$$\begin{aligned}x_{n+1}\times(n+1)&=x_n\times n+(x_n+1)\times 1\\&=x_n(n+1)+1\end{aligned}$$

従って

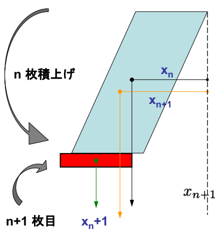
$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{n+1}$$

つまり

$$x_1=1,\quad x_2=1+\frac{1}{2},\quad x_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},$$

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$　これは調和級数！

重心の漸化式



- x_n ＝n枚積み上げたコインの重心から端までの長さ
- x_{n+1} ＝n+1枚目を加えたコイン全体の重心から端までの長さ
- 重心の漸化式

n+1枚目の重心（半径1cm）

$$\begin{aligned}x_{n+1}\times(n+1)&=x_n\times n+(x_n+1)\times 1\\&=x_n(n+1)+1\end{aligned}$$

n+1 グラム

調和級数は発散する

実は

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\infty$$

なぜなら

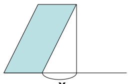
$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 4+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\quad\to\infty$$

無限に延びるコインの斜塔

従って、底面から先端までの長さ
x はいくらでも大きくできる.



冪乗和の公式

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k = \sum_{l=0}^{k} B_l \frac{n^{k+1-l}}{k+1-l}$$

B_n (n=0,1,2,･･･) は関・ベルヌーイ数

例えば

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

Riemannのゼータ関数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \infty$$

しかし冪乗の(逆数)和

$$\zeta(s) = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots \qquad s>1\text{:実数}$$

は収束する. 例えば

$$\zeta(2) = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

B_{2k} は関・ベルヌーイ数

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2}\frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!}B_{2k}$$

関・ベルヌーイ数

- 括要算法(1712)　垜積(だせき)術解の章　方垜(ほうだ)の項
- Ars Conjectandi (1713)　「推測法」

関・ベルヌーイ数 B_n (n=0,1,2,･･･) は次の式より帰納的に定まる

$$\sum_{i=0}^{n} {}_{n+1}C_i B_i = n+1$$

例えば

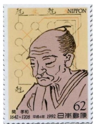
$$B_0 = 1, \quad B_0+2B_1 = 2, \quad B_0+3B_1+3B_2 = 3,$$

ゆえに

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 1/2, \quad B_2 = 1/6, \cdots$$

関孝和

1642(1637?)～1708
群馬県藤岡生まれ



- 括要算法(1712)

関孝和の遺稿をまとめて弟子によって刊行された(荒木村英検閲、大高由昌校訂).
垜積術解の章　方垜(ほうだ:冪乗和)の項

関・ベルヌーイ数の母関数

$$\mathrm{Td}(x) := \frac{x}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

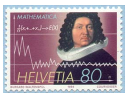
与えられた数列を係数とする冪級数を母関数
(generating function) と呼ぶ.

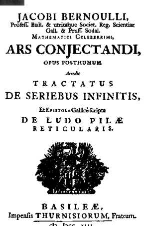
関・ベルヌーイ数 B_n に対する母関数は Todd 関数
Td(x) である.

John Arthur Todd (1908～1994)　イギリスの数学者

Jakob Bernoulli

ヤコブ・ベルヌーイ
1654～1705
スイス バーゼル生まれ
ベルヌーイ家が輩出した数学者8名のうちの最年長者




JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
clɔ Iɔcc xiii.

- Ars Conjectandi

「推測法」(1713)
冪乗和の公式
ベルヌーイの大数の法則

Todd 関数と量子力学

(Planck の公式:1900)
U :振動子1個あたりのエネルギー
T :温度
ν :振動数
このとき次式が成立

$$U = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

ただし　h:プランク定数
k:ボルツマン定数

hνの単位＝kTの単位＝エネルギーの単位 [ML²/T²]

ここで x=hν/kT とおくと

$$U = kT\frac{x}{e^x-1} = kT\cdot\mathrm{Td}(-x)$$

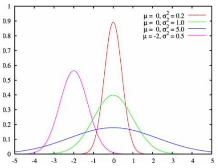
粒子的エネルギーと
連続的エネルギーの比?

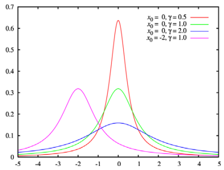
Todd 関数と統計学

- ガウス分布
- コーシー(ローレンツ)分布

中央値はあるが平均値がなく、大数の法則が不成立

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{x^2+\gamma^2}$$





Todd 関数と射影空間

$\mathbb{C}P^n$:n 次元複素射影空間

$H^{\otimes k} \to \mathbb{C}P^n$:複素射影空間上の超平面切断束の k 次テンソル積

$H^0(\mathbb{C}P^n;\ \mathcal{O}_{H^{\otimes k}})$:正則切断の空間

$H^0(\mathbb{C}P^n;\ \mathcal{O}_{H^{\otimes k}})$ は n+1 個の変数に関する斉次 k 次多項式の全体と同一視できる

複素多様体とリーマン-ロッホ問題

M :n 次元複素閉多様体

L:M 上の正則直線束

$H^0(M;\ \mathcal{O}_L)$:正則切断の空間

リーマン-ロッホの問題

$H^0(M;\ \mathcal{O}_L)$ **の次元はいくつか?**

射影空間上のリーマン-ロッホ問題

- 射影空間上では

$\dim H^0(\mathbb{C}P^n;\ \mathcal{O}_{H^{\otimes k}})$

= n+1 個の変数 に関する斉次 k 次多項式空間の次元

= n+1 種から k 個を取り出す重複組合せの総数 $_{n+1}H_k$

= $_{n+k}C_k$

では一般の複素閉多様体上で
リーマン-ロッホ問題はどのように解決されるか

ヒルツェブルフ-リーマン-ロッホ定理

M : コンパクト複素閉多様体
E : 正則ベクトル束
$\chi(M,\mathcal{O}_E)$ = E を係数とする Dolbeault コホモロジー群の オイラー標数
このとき次の公式が成立する.

$$\chi(M,\mathcal{O}_E) = \int_M \mathrm{Td}(M)ch(E)$$

射影空間上では小平消滅定理により
$\chi(\mathbb{C}P^n,\mathcal{O}_{H^{\otimes k}}) = \dim H^0(\mathbb{C}P^n;\ \mathcal{O}_{H^{\otimes k}}) \qquad (k>0)$
が成立する

特性類の Todd 関数

$$\int_{\mathbb{C}P^n}\mathrm{Td}(\mathbb{C}P^n)ch(H^{\otimes k})$$
$$= \text{degree } n \text{ part of} \left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^{n+1} e^{kx}$$

留数定理

$$= \oint \frac{dx}{x^{n+1}}\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^{n+1} e^{kx}$$
$$= \oint du \frac{1}{u^{n+1}(1-u)^{k+1}} \qquad (u := 1-e^{-x})$$

Newton の
一般2項定理

$$= \oint du\, u^{-n-1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{-k(-k-1)(-k-2)\cdots(-k-p+1)}{p!}(-1)^k u^p$$
$$= \oint du \sum_{p=0}^{\infty}\frac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+p-1)}{p!}u^{p-n-1}$$

留数定理

$$= {}_{n+k}C_n = {}_{n+k}C_k$$

アティヤー・シンガー指数定理
The Atiyah-Singer Index Theorem

一般の閉多様体上で、楕円型微分作用素の指数などの解析的不変量と、特性類や曲率を用いて記述される幾何不変量との関係を導く公式

$$\chi(M,\mathcal{O}_E) = \int_M \mathrm{Td}(M)ch(E)$$

解析的不変量　　幾何的不変量

Td(M)ch(E) は何だろうか？

K 群 とコホモロジー群
K*(M) v.s. H*(M)

K群からコホモロジー群への自然変換 ch (Chern character) は、ポアンカレ双対写像 P.D. と可換ではなく、 Todd 類だけの食違い(=オイラー類の違い)が生じる.

$$\begin{array}{ccc}
K^0(TM,STM) & \xrightarrow{P.D.} & K_0(TM) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Td}(TM\otimes\mathbb{C})\cup ch^*} & & \downarrow{\scriptstyle ch_*} \\
H^{ev}(TM,STM) & \xrightarrow{P.D.} & H_{ev}(TM)
\end{array}$$

オイラー類の比＝Todd 類

M 上の直線束 L に対して

$x = c_1(L)$: 1^{st} Chern class

＝コホモロジー群 H*(M) におけるオイラー類

一方、K群 K*(M) におけるオイラー類＝ $1 - L^*$

$$ch(1 - L^*) = 1 - e^{-x}$$

従って

K*(M) と H*(M) における L のオイラー類の比

$$= \frac{x}{1 - e^{\;x}} = \mathrm{Td}(x)$$

市民の数学

- **六芸**（りくげい）
  - 礼 - 礼節
  - 楽 - 音楽
  - 射 - 弓術
  - 御 - 馬車を操る技術
  - 書 - 文学
  - 数 - 数学

養国士以道、乃教之六芸：
一日五礼、二日六楽、三日五射、四日五御、五日六書、六日九数
–「周礼」（しゅらい）

では六芸を学ぶことの意味は何か

人格を高めること ＝ 市民の数学

市民の数学

- **六芸**（りくげい）
  - 礼 - 礼節
  - 楽 - 音楽
  - 射 - 弓術
  - 御 - 馬車を操る技術
  - 書 - 文学
  - 数 - 数学

養国士以道、乃教之六芸：
一日五礼、二日六楽、三日五射、四日五御、五日六書、六日九数
–「周礼」（しゅらい）

では六芸を学ぶことの意味は何か

御清聴有難うございました