第１４回藤岡市おもしろ数学教室

星の王子さまと数学者

坪井　俊

２００９年の藤岡市おもしろ数学教室は，１０月２０日（火）に藤岡市立東中学校体育館で，全校生徒を相手に開催された．藤岡市教育長，東中学校長のあいさつの後，私と，同行していただいた数学会教育委員会の岡部恒治氏が紹介された．その後，１４時から６０分間のおもしろ数学教室の講演を行い，質問を受け，最後に生徒からのあいさつを受けた．

このおもしろ数学教室では，生徒には，資料として，８ページのＡ４，１枚の図を前もって配布していただいた．講演全体について後で思い出すための鍵となる図であると考えたからである．数学的な内容として，中学生でもすこし考えればわかるだろうと思うものである．

講演の前に，準備のために体育館に行き，用意されたプロジェクターに持参したＰＣをつなぎ，パワーポイントのファイルの写り方を確認した．また，小道具として，直径４０ｃm位のビーチボールのような地球儀と直径９０ｃmの球形にふくらむ風船をふくらませた．このときに，６００人の生徒が（各学年が５または６クラスあるので多分これくらいの人数と思われるが）それぞれの椅子を持って，体育館に集まってきた．この人数には圧倒される感じがあった．

このおもしろ教室の「星の王子さまと数学者」という講演題目は，１枚の配布物から想像されるように，もともと「球面上の世界」という題名で話をすることを提案したものであった．しかし，その題名に対し，難しすぎるという意見がきて，その後，しばらく考えてたどり着いた題名である．この内容は，東京大学玉原国際セミナーハウスで，群馬県沼田市の中学生を相手に,「中学生のための玉原数学教室」として話したものをもとにしたのだが，この報告を準備していて，内容的には１９９８年の第３回藤岡市おもしろ数学教室で砂田利一先生がお話になったことの部分集合となっていることに気がついた．１０年前であるが，そのときの内容では，今回は難しすぎるということになったのではないかと思う．

「星の王子さまと数学者」は，球面上の幾何学は，平面上の幾何学とは異なっていることを説明するのが目的である．なぜそうするかということの説明に，地球の形宇宙の形を知りたいという願望からということで話を組み立てた．副題として,「地球の上に住んでいる私たちが，丸さを感じないのはなぜ？」というものを出していた．

講演の概要は以下の通りである．サンテグジュペリは郵便飛行機の操縦士であり，その当時としては地球を外から見ることの出来た数少ない人物であったことを述べ，飛行機からすこしは丸くみえること，現在では宇宙から地球の形を見ることができることを見せた．しかし，地球が球体であることは，様々

な理由から２０００年以上前から気付かれていたことと，素数を残すエラトステネスの篩でも名を残すエラトステネスが地球の半径を測る方法を提示したことを述べた．星の王子さまの星は小さくて丸いので，星の王子さまの星では，星が丸いことが最初からわかったはずである．星の王子さまの星で成立する幾何学は，ユークリッドの平面幾何とは違うものではないかという話をし，平面では，三角形の内角の和は１８０度だということを示して，球面のうえで考えようと進めた．ところが，平面は，球面の上に乗っていないので，普通の三角形は描くことが出来ない．そこで，球面上の線分の定義，三角形の定義が必要になることを述べて，球面の地球儀，風船の上に，輪ゴムをつないだ紐で，２点を結ぶ最短線分を提示して見せた．そのことから，大円航路などについて少し説明した．実際には，地球上で使う緯度と経度を使って２地点の距離が計算できることを述べた．球面の面積，体積をアルキメデス，関孝和が求めた話をして，その考え方で地球の直径から地球の体積，面積がわかること，地球の体積がほぼ１兆立方キロメートルとなり，面積がほぼ５億平方キロメートルとなる話をした．そのあとで，球面三角形の面積が角度で表されることを，風船の上に，３色の輪ゴムの大円をおいて，その図形の対称性を提示して示した．その後で，現在宇宙の形を知ろうという研究がＩＰＭＵを含め多くの研究者の手で行われていることなどに触れて講演を終えた．

小道具を使ったことが多少とも功を奏したのか，感想もおおむね好意的であった．直後の質問では，円周率はどうやって求めるか，どれくらいの高さまで行けば，地球は丸くみえるかという話した内容を深めるような質問が出た．後で送られてきた感想の中には，宇宙の形に興味を持った，アルキメデスや関孝和などの歴史上の数学者の発見に感心したというものとともに，話の途中で，私が「数学は一度証明するとどこでも正しい」,「知識は限られているが，想像力は無限」と言ったことが印象に残ったというものもあり，講演の中で何気なくしゃべっていることにも重要さがあることに気付かされた．

以下に講演のパワーポイントのファイルを披露させていただき，講演の報告とさせていただく．

（つぼい　たかし）

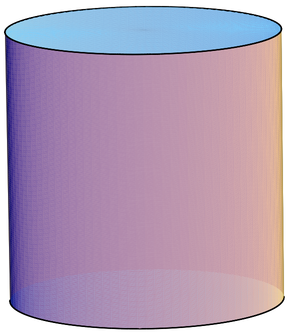
日本数学会
藤岡市おもしろ数学教室
坪井　俊　（東京大学）

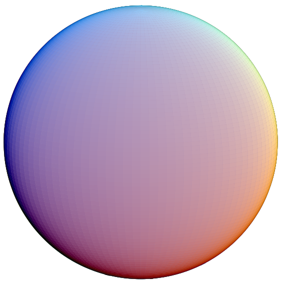
藤岡市教育委員会
藤岡市立東中学校
2009年10月20日

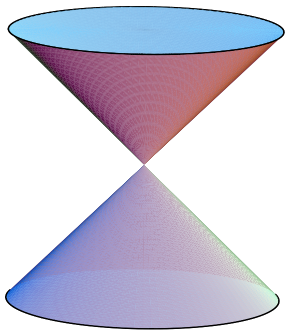
「星の王子さまと数学者」

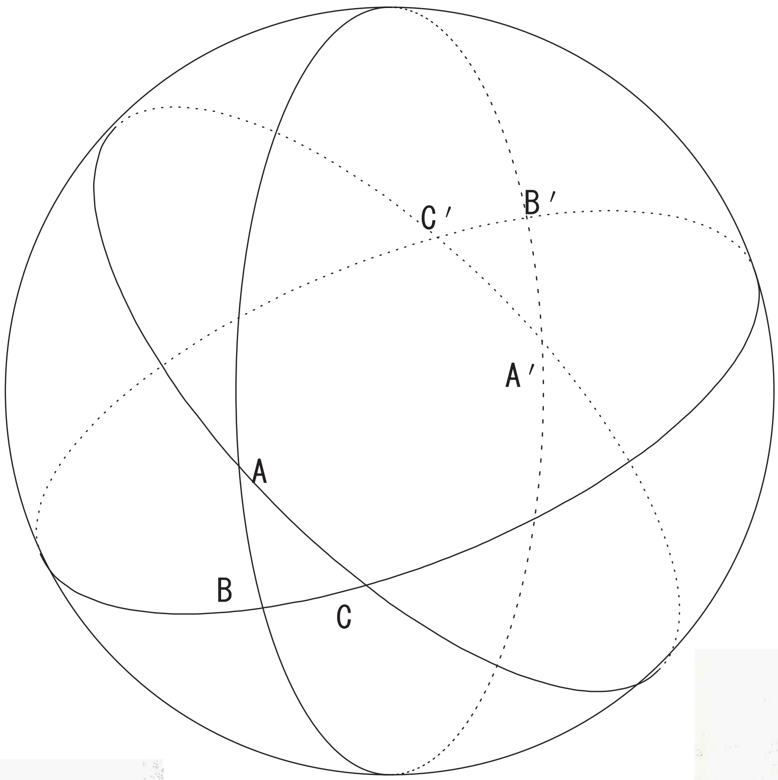
王子さまの星は、小さくて丸い…

王子さまの星で三角形を描くと、内角の和は…









日本数学会
藤岡市おもしろ数学教室
坪井 俊 （東京大学）

藤岡市教育委員会
藤岡市立東中学校
2009年10月20日

星の王子さまと数学者

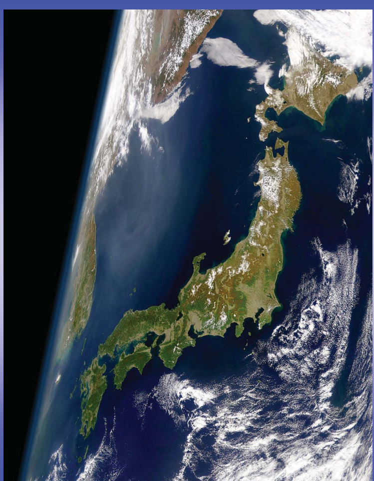
サン=テグジュペリ(1900－1944)は、郵便輸送飛行士であった。

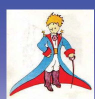
飛行機から見た情景などのちりばめられた小説を書き、また、「星の王子さま」を書いた。

飛行機から見る地球は、感動的な姿をしている

しかし、地球の全体の形がわかるほどではない

王子さまの星は、
小さくて丸い…





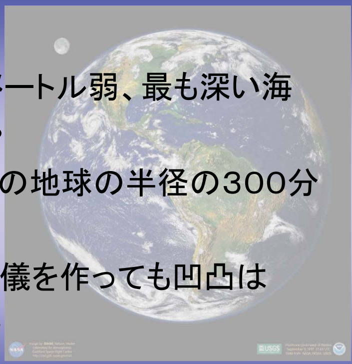
私たちは地球も丸いことを知っています

NASA提供

宇宙から見ると、こんなふうにみえる

NASA提供

- 地球は赤道の長さが4万キロメートルの球である。
- 最も高い山は9キロメートル弱、最も深い海溝は11キロメートル。
- 約6400キロメートルの地球の半径の300分の1程度の凹凸。
- 直径1メートルの地球儀を作っても凹凸は1．7ミリメートルほど。
- 赤道半径が6378km、極半径が6356kmで、その差のほうが大きい。

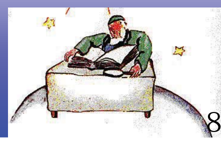


2009年10月20日 藤岡おもしろ数学教室 星の王子さまと数学者 坪井 俊

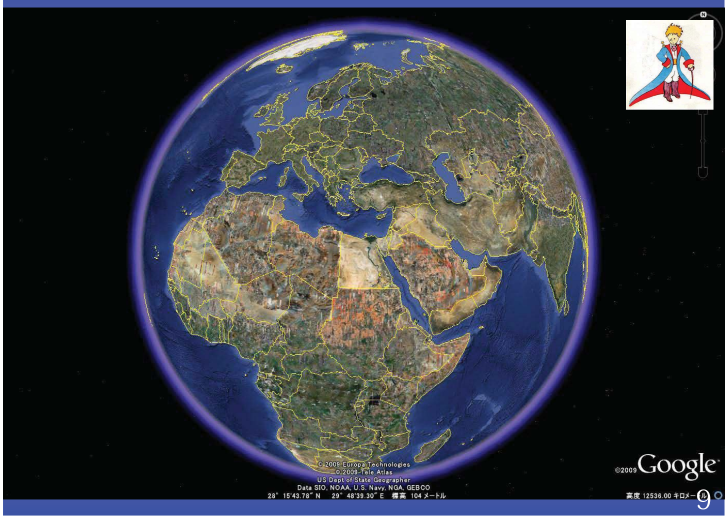
2000年以上前から、地球は丸いということに気がついている人たちがいました

- 地球の大きさを測る
アレクサンドリアとアスワンで夏至の日の南中時の太陽の高さを測り、その角度の差と、アレクサンドリアとアスワンの間の距離から地球の半径を求めた

エラトステネス
（276BC－194BC）



2009年10月20日 藤岡おもしろ数学教室 星の王子さまと数学者 坪井 俊



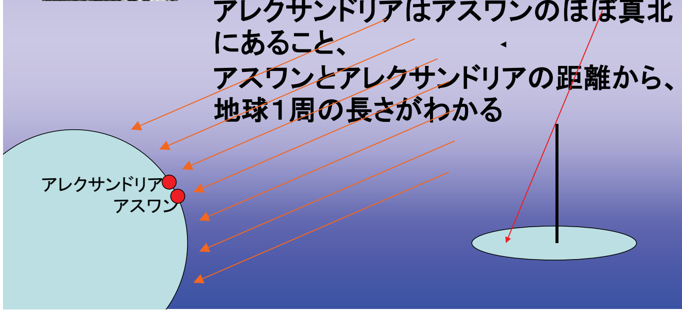
2009年10月20日 藤岡おもしろ数学教室 星の王子さまと数学者 坪井 俊

アスワン 北緯24度6分東経32度54分
アレクサンドリア 北緯31度12分東経29度54分
北回帰線 北緯23度26分

2009年10月20日 藤岡おもしろ数学教室 星の王子さまと数学者 坪井 俊

エラトステネス（276BC－194BC）

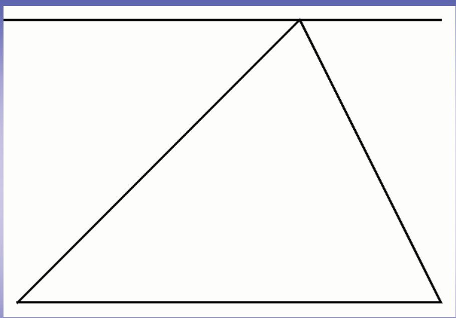
夏至の日の南中する太陽の高度が、アスワンでは、ほぼ90度、アレクサンドリアでは、ほぼ82度であること、
アレクサンドリアはアスワンのほぼ真北にあること、
アスワンとアレクサンドリアの距離から、
地球1周の長さがわかる



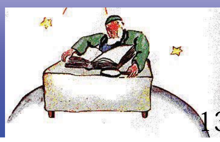
2009年10月20日 藤岡おもしろ数学教室 星の王子さまと数学者 坪井 俊

紀元前300年頃にユークリッド(325 BC — 265 BC)の原論が著わされ、公理に基づく証明の方法が確立してきた。

平面上では、三角形の内角の和は180度になる



平行線の公理から、平面上の三角形の内角の和が180度であることが証明される



王子さまの星は、小さくて丸い…

王子さまの星で三角形を描くと、内角の和は…

三角形って、何だったのか？

平面上の三角形は、3点の2つずつを結ぶ3つの線分を辺とする図形である

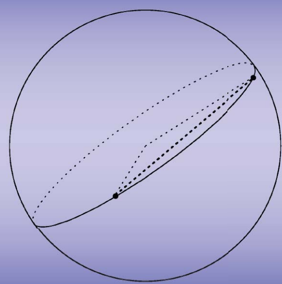
星の2点を真直ぐ結ぶ線は、トンネルを掘らないと描けない

でも、一番近い道はある

球面上の線分とはなんだろうか

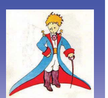
球面上の三角形とは何だろうか

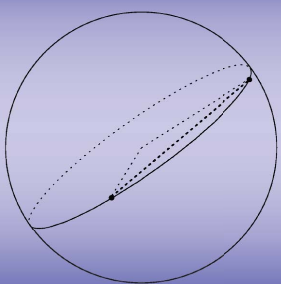
球面上の2点をむすぶ3次元空間の線分は、球の内部にあって、球面上では見ることができない



その線分を真下に見る球面上の線を考えることができる

真下にあるとは、数学的には、中心の方向にあるということと解釈する。重力は地球の中心に向かっているからである





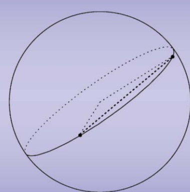
この線は、地球の中心と線分を含む平面と球面の交わりとして現れていることがわかる。

だから、この線は円の一部である。

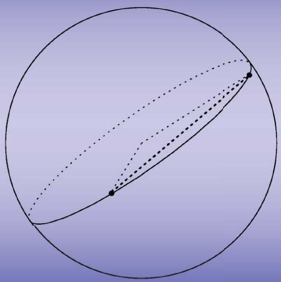
球面の中心を通る平面との交わりとして得られる円の半径は、球面の半径と一致する。このような円を大円と呼ぶ。

球面上の2点をむすぶ3次元空間の線分を真下に見る球面上の線は大円の一部であることがわかる。

- 2点が近くにあれば、「線分を真下に見ること」は「中心の方向にある」ということで、はっきり定義されている。
- このことの例外、すなわち地球の中心と線分を含む平面が定まらない例外の場合がある。
- 北極と南極を結ぶ線分は、中心を通っているから、線分を含むすべての平面が平面が地球の中心を通る。
- この場合どの平面を取っても、交わりは大円であり、この大円の半分の半円をとれば、どれも同じ長さである。
- このときは2点を結ぶどの大円を取っても良いことにする。



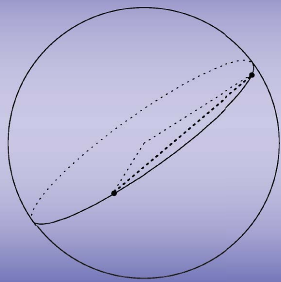
円周の長さは、(直径×円周率)で求まる。



円周の一部をなす円弧の長さは、中心角(円の中心から円弧の両端への2つの線分のなす角度)に比例するから、

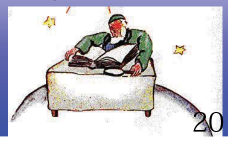
半径×円周率×$\dfrac{\text{中心角}}{\text{平角}}$ である。

球面上の2点の距離を、その2点を通る大円の2点を端点とする劣弧の長さと定めることができる。



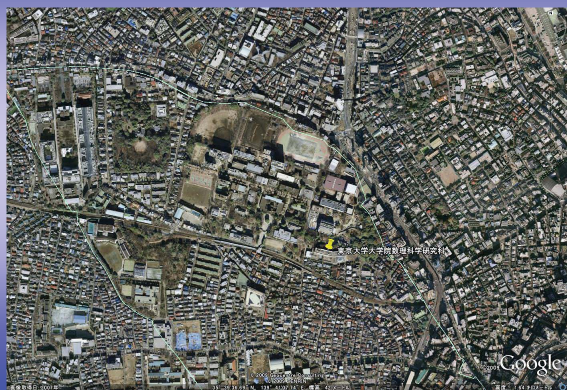
この劣弧は、球面上の2点を結ぶ曲線の中で最小の長さをもつものである。
球面の中心について対称となる場合を除いて、最小の長さをもつ曲線は、一意的に定まり、大円の劣弧になることが証明できる。

このような理由で
大円は、測地線と呼ばれる。

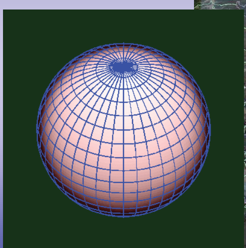


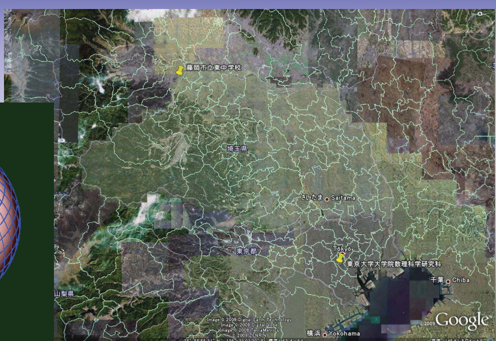
藤岡市立東中学校は
北緯36度14分1秒東経139度4分33秒にある

東京大学大学院数理科学研究科は、
北緯35度39分31秒東経139度41分13秒にある



藤岡市立東中学校と東京大学大学院数理科学研究科の中心角は、1度8分15秒＝1．1375度となり、距離は

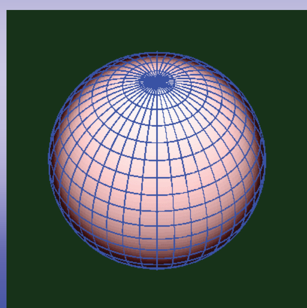




$$\text{２００００キロメートル}\times\frac{\text{１．１３７５度}}{\text{１８０度}}=\text{１２６．４キロメートル}$$

中心角は、座標を使って計算することができます。

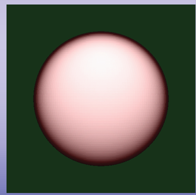
高校生になったら
できるようになります。



デカルト
1596－1650

王子さまの星の面積は、どれくらいかな？

- 球面の面積は、(半径)^2 × (円周率) × 4 である。
- 球体の体積は、(半径)^3 × (円周率) × 4 ÷ 3 である。
- 円錐、角錐の体積は、底面積×高さ÷３ である。



だから、地球の表面積は、
6400×4万×2＝
5億1200万平方キロメートル

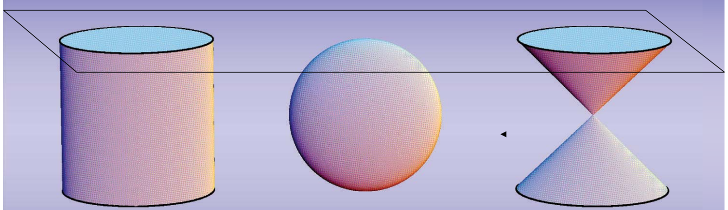
だから、地球の体積は、
6400×4万×2×6400÷3＝
1兆立方キロメートル

- この円錐、角錐の体積の公式と、球面の面積、体積の公式の関係は、アルキメデス (287 BC – 212 BC)、関孝和 (1642 – 1708) などには、知られていた。

アルキメデス
287 BC ─ 212 BC

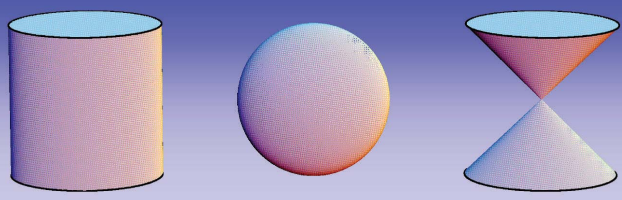
関　孝和
1642　─ 1708

球体の体積の公式は、アルキメデスが次のように導いたと伝えられている



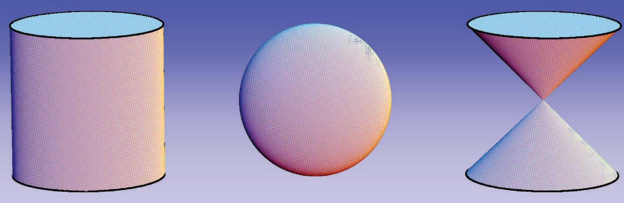
半径がrの球体と半径がrの円板上の高さrの円錐2つを並べておく

中心から高さ h の平面で切ると、切り口の面積は、球体が $(r^2 - h^2)$ × (円周率)、円錐が h^2 × (円周率) となる。



合わせると円の面積 r^2 × (円周率) となる。
これは、半径が r の円板上の高さ r の円柱の切り口の面積である。

従って、半球体の体積＋円錐の体積＝円柱の体積 となる。



２つの円錐の体積、円柱の体積は、それぞれ、

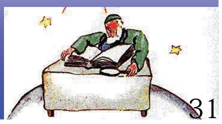
$$2 \times (r^2 \times (\text{円周率}) \times r \div 3), \qquad r^2 \times (\text{円周率}) \times (2r)$$

だから、
球体の体積は、r^3 × (円周率) × 4 ÷ 3 となる。

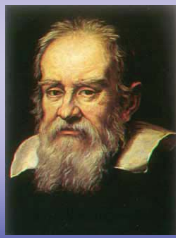
アルキメデスは攻めてきた敵軍の兵士に自分の研究の邪魔をするなと言って命を落としたと言われています。

王様の冠が金でできているかどうか壊さないで調べろと言われ、風呂場でアルキメデスの原理を発見し、嬉しさのあまりそのままの姿で街に走り出たそうです。

球の体積の発見は、自らの墓に刻ませたと言われています。

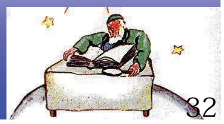


平行な平面で順に切ったときの切り口の面積が常に等しければ、体積が等しいという命題は、カバリエリ(1598 - 1647)の原理と呼ばれている。

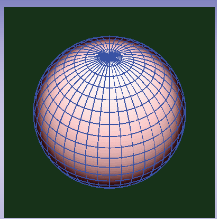


今年はガリレオが遠鏡を宇宙に向けて400年目の年で、世界天文年となっています。

カバリエリはガリレオ(1564－1642)と多くの手紙のやりとりをしている。



こうして、球体の体積がわかり、前に述べたことから球面の面積は分かった。



球面の面積が分かると2つの大円で区切られる4つの部分の面積がわかる。

それは角度に比例するから、２つの大円がなす角度を、$a°, b°$ $(a° + b° = 180°)$ とすると、

$$(半径)^2 \times (円周率) \times 2 \times \frac{a}{180} \text{ と } (半径)^2 \times (円周率) \times 2 \times \frac{b}{180}$$

が対応する部分（２角形）の面積である。

平面上の3角形の面積は
底辺の長さ×高さ÷2
で表わされる。

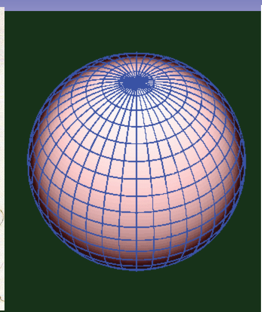
平面上の3角形は、3辺の長さを決めれば定まり、その面積も決まる。

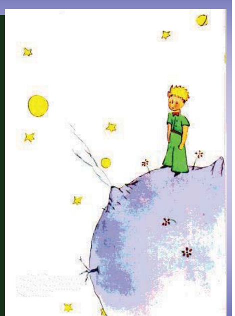
面積 S を３辺の長さ　a, b, c で表す公式はヘロン (10 AD – 75 AD) の公式と呼ばれ、$s = \frac{a+b+c}{2}$ とおいて、

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

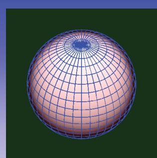
と書かれる。

王子さまの星は、小さくて丸い…





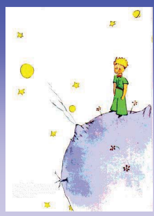
王子さまの星で三角形を描くと、内角の和は…



- 球面上の三角形も、３辺の長さを決めれば定まる。ただし、各辺の長さは、半径×円周率　未満である。
- 例えば、３辺の長さが、半径×円周率÷２、すなわち、大円の長さの４分の１の三角形は、北極に直角を取り、その角の２辺が赤道に交わる２点を取って、描かれる（正）三角形で、３つの角は直角、面積は、球面の面積の８分の１で、$(半径)^2 \times (円周率) \div 2$ である。
- 球面上の三角形の内角の和は、１８０度になっていない。この三角形では、２７０度である。一般の球面上の三角形の内角の和も１８０度よりも大きい。

王子さまの星は、小さくて丸い…

王子さまの星で三角形を描くと、内角の和は、180度よりも大きい！

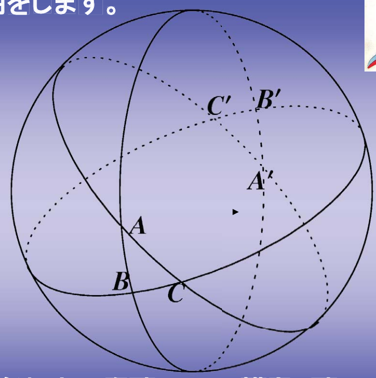


定理。
半径 r の球面上の三角形 ABC の内角を $A°, B°, C°$ とすると、三角形 ABC の面積 S は, 次の式で表される。

$$S = (\text{半径})^2 \times (\text{円周率}) \times \frac{A+B+C-180}{180}$$

球面上の三角形の面積は分度器で計るんだ？！

数学では、証明をします。

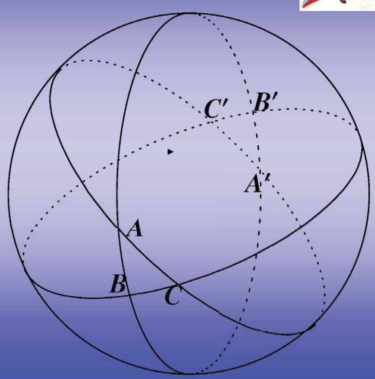


三角形の辺を含む大円を球面上に描き、球の中心についてのA, B, Cの対称点A', B', C'をとると、三角形A'B'C'は、三角形ABCと合同である。

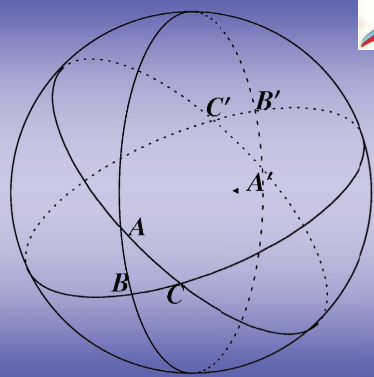
三角形ABCの内角A, B, Cをもつ2角形の面積を S_A, S_B, S_Cとする.

S_A× 2は、角Aの2辺を含む大円で区切られる2角形の2つを合わせたものの面積である。

同様に、S_B× 2, S_B× 2は、それぞれ、角B, 角Cの2辺を含む大円で区切られる2角形の2つを合わせたものの面積である。



これら、6つの2角形を合わせると、球面を覆い尽くす。



良く見ると、三角形ABC、三角形A'B'C'では、3重に覆っていることがわかる。

- このことから、

$$S \times 4 + \text{球面の面積} = S_A \times 2 + S_B \times 2 + S_C \times 2$$

  を得る。

- ここで、右辺は $(\text{半径})^2 \times (\text{円周率}) \times 2 \times 2 \times \frac{A+B+C}{180}$, 球面の面積は、$(\text{半径})^2 \times (\text{円周率}) \times 4$ である。
- 従って、

$$S \times 4 = (\text{半径})^2 \times (\text{円周率}) \times 4 \times \{\frac{A+B+C}{180} - 1\}$$

- 4 で割って、

$$S = (\text{半径})^2 \times (\text{円周率}) \times \frac{A+B+C-180}{180}$$

証明は終りです。

球面上の三角形は、平面上にある三角形とは異なる性質を持つことがわかりました。

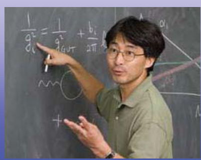
平面上の三角形の面積は、物差しをもってきて、底辺と高さを測り、
底辺の長さ×高さ÷2
で求めます。

球面上の三角形の面積は、分度器を持ってきて、
(内角の和から平角を引いたもの)÷180度
×赤道の円の面積
で求めます。

IPMU 数物連携宇宙研究機構（東京大学 柏キャンパス）

宇宙は、137億年前のビッグバンから始まっていると考えられている。

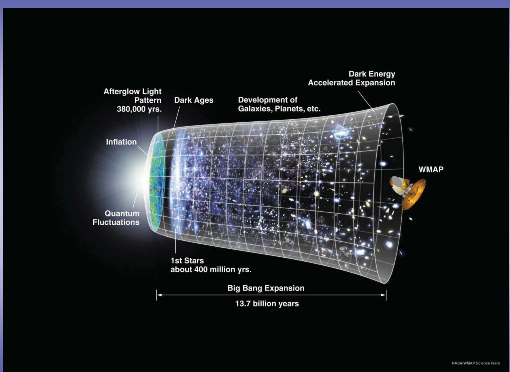
その始まりがどのようであったかは、IPMU（数物連携宇宙研究機構）の主要研究テーマのひとつということである



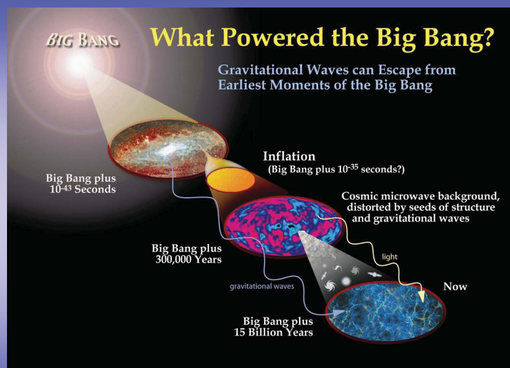
ガウス(1777 -- 1855)

ガウス(1777 ― 1855)は、多くの数学、物理学上の業績を挙げた天才である。我々の空間が曲がっているかもしれないと最初に考えたのは、ガウスであるといわれている

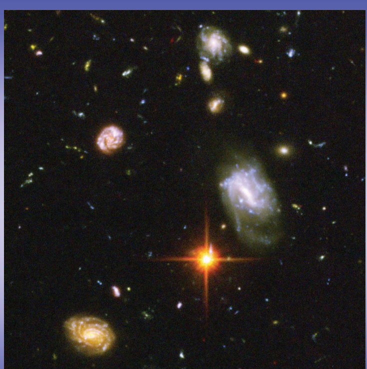
彼は、3つの離れた地点で、火を焚き、光が直進することを仮定して、大きな三角形の内角の和を測ってみたという。内角の和は、当時の計測技術で、180度と判定されたという。（現在の計測技術でも同じであろう。）



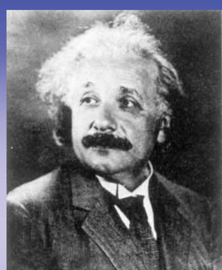
ビッグバンは137億年前に起こったとされる （画像はNASA提供）



宇宙の形はどのようなものだろうか？ （画像はNASA提供）

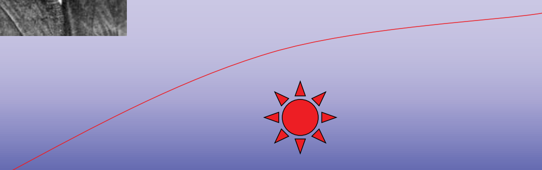


ビッグバンの直後の宇宙の星達？ （画像はNASA提供）

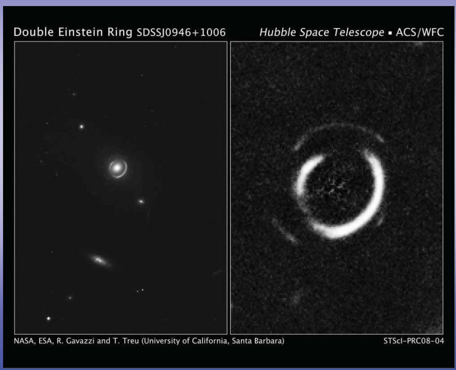


アインシュタイン (1879 ― 1955)

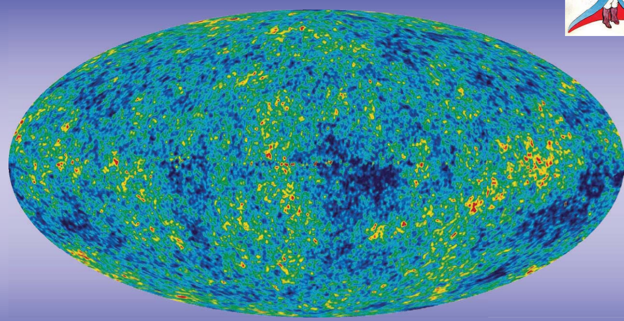
重力場は、時空の曲率と関係している



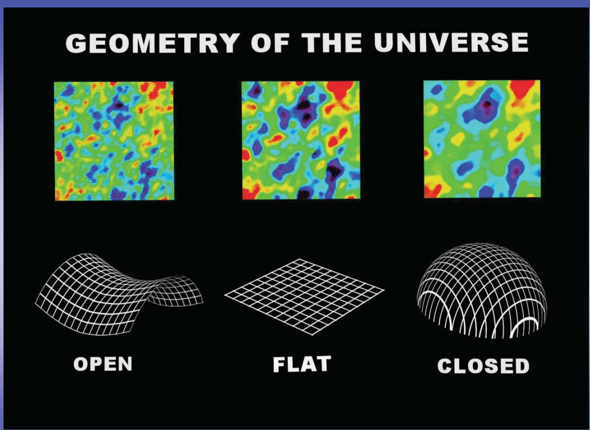
空間が曲がっていることは、どのようにして検知されるだろうか？



重力レンズにより、遠い光源が、輪になって見えている。アインシュタイン・リングと呼ばれている。画像、説明はNASA提供



NASAのWMAPが観測した宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎ（画像はNASA提供）



正に曲がっている空間、平らな空間、負に曲がっている空間 （NASAにある説明）

王子さまの星は、小さくて丸い…

- 私は幾何学を研究する数学者です。
- 幾何学は図形の形を取り扱います。
- 今日は、私たちが良く知っている球面の上で成り立っている幾何学の話をしました。
- 宇宙がどのような形をしているかを考えるのは、わくわくするような楽しさがあります。
- 私たちの知識は限られていますが、想像力は無限にあります。
- 数学は抽象的な学問ですが、一度証明したことは、あらゆる場面で正しく成立します。
- 普段の生活の上でも数学は科学の基礎として重要です。
- 宇宙の形を知るという研究の上でも重要です。
- 数学は、時間をかけて勉強し、人に話したり聞いたりすれば良く分かるようになります。わかるとますます面白くなります。
- 皆さんも宇宙の形を考えてみてください。

王子さまの星で三角形を描くと、内角の和は…

ご清聴ありがとうございました