素数からゼータの未来へ

日本数学会・市民講演会
２００８年9月２３日

黒川信重　（東京工業大学）

はじめに

素数概念は２５００年程昔のギリシャにおいて発見され，現代数学に至るまで数学発展の原動力を与え続けている．また，素数は現在の日常生活でもなくてはならないものになっている．たとえば，携帯電話等のセキュリティの暗号の鍵は素数である．

昨年は大数学者オイラー（1707－1783）が生誕３００年を迎え盛大な記念研究集会が行われた（ロシアのサンクトペテルブルグ）．来年は数学最大の難問リーマン予想が提出された１８５９年からちょうど１５０周年となる．オイラーの研究のうちでも特筆すべきものは素数研究とそれにともなうゼータの発見である：

自然数→《分解》→素数→《統合》→ゼータ.

リーマン予想はオイラーの研究の延長線上にあり，ゼータの零点の問題であるが素数分布の問題でもある．

なお，今年は，自然数のベキ和を考察した関孝和が１７０８年に亡くなって３００年となる．（関の研究はベルヌイと独立に行われ，著作はベルヌイのものより１年早く出版されている．）ベキ和の公式は１乗・２乗・３乗くらいは現在，高校２年生で習得するが，その高次版の一般公式（関・ベルヌイの公式）は高校では出てこないようで，残念である．ゼータはそのベキ和を自然数全体の和にしたものであり，その観点から，関およびベルヌイはゼータの一歩手前に近づいていたと言えるであろう．

この機会に，素数研究の歴史と未来を考えたい．

［１］素数

素数は数学の根本概念であり，

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,...

のように，自然数（正の整数）のうちで １より大きな２つの自然数の積に分解できないものを指す：

自然数→《分解》→素数.

素数は紀元前５００年頃のギリシャ時代から考えられてきている．ピタゴラス学派の中で，素数論と原子論は互いに関連して生じたのであろう．

　ギリシャ数学の偉大な成果は「素数は無限個ある」という発見である．しかも，論理の整然とした証明もきちんと付けている．２５００年経った現在から見ても，何故そんなことが証明できたのか，不思議である．

　彼らの証明は，実際に素数を作り出すやり方であった（「背理法」ではなかった）：何個か素数があったら，全部掛けて１を足したものを作り，それを割り切る１でない一番小さい自然数を取り出せば，それは素数であり（素数でなかったとしたらもっと小さいもので割り切れてしまう），しかも新しい素数となっている（それまでの素数では割り切れないので），という作り方である．

　たとえば，素数２からはじめてみると，全部掛けても２のままで，１を足すと３が出る．これを割り切る１でない最小の数は３である．こうして，２の次に３が作れた．２，３からは全部掛けて６，１を足して７が出る．よって，３個の素数２，３，７が出た．次には，全部掛けると４２で１を足すと４３となり，４個の素数２，３，７，４３ができた．その次は，全部掛けると１８０６，１を足すと１８０７．これを割り切る１でない最小の自然数は，１８０７が１３と１３９の積になることから，素数１３とわかる．このようにして，５個の素数２，３，７，４３，１３が得られた．これを続ければ，1 個ずつ増えていき，結局，素数が無限個出てくることがわかる．

　この方法はピタゴラス学派（紀元前５００年頃）によるものと思われるが，記録に残っているのはユークリッド『原論』（紀元前３００年頃）であるため，「ユークリッド素数列」とよばれている．（「ピタゴラス素数列」というべきかも知れない．）

　なお，「ギリシャ数学」という名称で呼ばれていても，ピタゴラスの開いたピタゴラス学校は現在のギリシャではなくイタリアにあったことに注意しておきたい．それは，イタリア南岸の町クロトン（現在名はクロトーネ）である．クロトンの美しく長く続く砂浜を歩き影を踏みしめていると，その昔にピタゴラスたちが素数に思い致したことが偲ばれる．現在，ピタゴラス学校跡にはヘラ神殿の石柱一本のみが真っ青な地中海を背景に断崖の上に聳えている．クロトンからあ

まり遠くない海岸沿いの町メタポンティオンでピタゴラスは紀元前４９２年に亡くなったと伝えられている．（没年に関しての確実な記録はないようであるが.）すると，今年は，ピタゴラス歿後２５００年という記念すべき年であると思われる（広く考えれば，ここ数年の可能性）．著名な数学者であるアルキメデスも現在のイタリアのシチリア島で終生活動していた．ギリシャ数学が栄えたのは（マグナグラキエに属していた）イタリアにおいてであったのである．

　さて，素因数分解は小さい自然数に対しては手計算でも簡単にできるが，大きい自然数になると困難が急激に増大する．逆に，素数の積を計算することは容易である．これが，現代暗号に素数が使われる理由であり，第三者による暗号解読が困難な（高速なコンピューターでも数千年を要するような）素因数分解によって阻止されている．

〇簡単な素因数分解の例〇
ここ一週間のカレンダーで素因数分解をして見よう．右辺に現れている数は素数である．

917=7・131：９月１７日はリーマンの誕生日（１８２回目；１８２６年生まれ）
918=2・3・153：９月１８日はオイラーの命日（２２５回忌；１７７３年歿）
919=919　素数
920=2・2・2・5・23：彼岸の入り
921=3・307
922=2・461
923=13・71：本日，彼岸の中日・秋分の日

年号まで付けると８桁になるので，奇数だけ書いておこう．

20080917=3・3・547・4079
20080919=20080919　素数
20080921=7・101・28403
20080923=3・6693641

●未解決の興味深い問題●

ユークリッド素数列
2－3－7－43－13－53－5－6221671－38709183810571－139－2801－11－17－5471－　・・・

に，すべての素数が出てくるだろうか.

他の素数から出発した

17－2－5－3－7－3571－31－395202571－13－29－137－23－97－・・・

99109－2－3－5－7－11－13－・・・

等ではどうだろうか？　これは，未解決の難問である（実例計算も桁数が大きくなり困難）が，ゼータによる研究も行われている（参考文献の（３））．

変型１「それまでの素数を掛け合わせたものに１を足し，その最小の素因子を取り出す」方法の代わりに「それまでの素数を掛け合わせたものに１を足し，その最大の素因子を取り出す」にすると，たとえば，２からはじめた場合には

2－3－7－43－139－・・・

という風になる．ここには，すべての素数が現れることはないことが証明できる．たとえば，５は絶対に現れない．［ヒント：４で割った余りに注目する．］

変型２「それまでの素数を掛け合わせたものに２を足し，その最小の素因子を取り出す」によっても，素数を作り出すことができる．たとえば，３からはじめると

3－5－17－257－65537－・・・

となる．ここに現れているのは有名なフェルマー素数（未だ５個しか発見されていない；ガウスが証明したとおり，正多角形の作図はフェルマー素数に関連しており，正３角形，正５角形，正１７角形，正２５７角形，正６５５３７角形は作図可能）である．ただし，・・・に次に現れるのはオイラーが発見した６４１である．この素数の列にはすべての奇素数が現れると思われるが，これもまた，未解決の問題である．

変型３「それまでの素数を掛け合わせたものに２を足し，その最大の素因子を取り出す」にすると，たとえば，３からはじめた場合には

3－5－17－257－65537－6700417－・・・

となるが，ここには，たとえば７は絶対に現れない．［ヒント：３で割った余りを見る．］

［２］ゼータ

ゼータとは素数をまとめ上げたものである：

自然数→《分解》→素数→《統合》→ゼータ．

ゼータの研究は，オイラーの１７３７年の大発見「素数の逆数全体の和は無限大」から本格的に始まった．ギリシャ時代に素数が無限個あることが知られて以来二千年以上の歳月を経てはじめての進歩がオイラーによって得られたのであった．

オイラーは

1/2+1/3+1/5+1/7+1/11+1/13+1/17+...

が無限大になることを，ゼータに対する素数全体にわたる無限積（オイラー積）表示から見抜いた．その結果，基本的には

素数の逆数和 ＝log(自然数の逆数和)

という漸近等式（log は自然対数）により素数の逆数和が無限大であることを明らかにしたのである．

ところで，素数の逆数全体の和は無限大というオイラーの定理からすると，素数の逆数を足して行くと，理論的には，徐々に１０を超え，１００を超え，１０００を越え，というようにいくらでも大きくなって行くはずであるが，大きくなり方は非常にゆっくりとしていて，実は，最新鋭の計算機を使っても

1/2+1/3+1/5+1/7+1/11+...+1/1801241230056600467=3.9999999999999999966...

1/2+1/3+1/5+1/7+1/11+...+1/1801241230056600523=4.0000000000000000021...

程度である．今世紀中に１０を超えることは無理であろう．

ゼータは素数をまとめ上げたものであった．いろいろなまとめ上げ方によって，素数のいろいろな性質が浮かびあがってきて，素数の深い理解に至るとともに，一方では，重大な未解決問題も浮上してくる．中でも，

リーマン予想『(リーマン）ゼータの虚の零点の実部はすべて 1/2 であろう』

は未解決問題の最たるものである．リーマン予想のためにはゼータの零点の固有値解釈が希求される．これは，未来に向けて大変重要な問題である．ちなみに，オイラーはゼータの実零点－2,－4,－6,・・・を発見していた．（参考文献の（１）（２）を参照.）

なお，「素数」に対応する物理学の概念である「原子」や「素粒子」を引き合いに出して考えてみるのも興味深いと思われる．物理学における

物質→《分解》→原子・素粒子→《統合》→？

という過程において最終段階の「？」とは「統一理論」「量子重力理論」「弦理論」等が来るのだろうか．量子力学におけるカシミール効果（１９４８年に予言，１９９６年に実験確認）が自然数全体の和を求めるオイラーのゼータ繰り込み値

“１＋２＋３＋・・・”＝－1/１２

を理論値（立方数全体の和の版も）としていることは，素粒子と素数の不思議な縁を感じさせる．

ゼータに親しむには，ゼータを「ゼータ惑星」の生き物と考えると良い．すると，地球の生き物が「核・ミトコンドリア・葉緑体・べん毛」からなっているのに対応してゼータが「双曲・単位・放物・楕円」からなっているという描像が得られる．
（参考文献の（１）（２）参照.）DNA は作用素に対応する．

［３］未来について少し

ゼータに関する重大な未解決問題には，すでに触れた

（１）リーマン予想

に加えて

（２）非可換類体論予想（ラングランズ予想）

がある．

（１）はゼータの零点や極の場所（実部）に関する問題であり，（２）はゼータの解析接続と関数等式に関する問題である．前者は数学の最大難問として有名であるが，後者は素数に関する深い理論である『類体論』（高木貞治，１９２０年）を究極まで拡張しようとする理論であり，フェルマー予想の解決（ワイルズ，

１９９５年）も佐藤テイト予想の解決（テイラー，２００６年）も非可換類体論予想のある部分の証明に該当している（参考文献の（４））．

一つ注目すべきことは，この二つの問題（１）（２）のある類似物（標数正の場合）はともにゼータの行列式表示を行うことによって解明された問題であることである．本来の場合にも，そのために必要な作用素とコホモロジーの研究に力が注がれていて，近い未来に種々の成果が待たれる．オイラー作用素の行列式から得られる多重三角関数論（参考文献の（５））も発展しており，さらに，より一層広く多重ゼータや「一元体」上の数学も考察されていて，素数とゼータの解明が期待される．

このように，リーマン予想はゼータの行列式表示（零点の固有値解釈）が中心課題となっており，その研究の進展ぐあいから見ると，現在，問題解決までの七合目あたりなのでは，と考えられる．素数・ゼータ研究は十年以内に格段の進展をみるものと思われる．たとえば，素数をきちんと記述する「素数公式」もかなりわかってくるのかも知れない．

〇 講演を行って〇

市民講演会当日の９月２３日は幸い天候にめぐまれ，お彼岸の中日（秋分の日）にもかかわらず，会場いっぱいの３００人程の参加者がいらして驚きました．準備した配布資料を急遽休憩時間に追加コピーを行ない補充するほどの盛況でした．家族連れの方も見受けほほえましく感じました．このようなときに数学の話を聞くのはとても良い機会と思います．改めて，数学普及の必要性と重大さを痛感致しました．

座長をつとめられ，講演者の身に余る紹介をしてくださった佐藤孝和先生（東工大）とＯＨＰの処理をしていただいた村山光孝先生（東工大）をはじめとする多くの関係者の皆様に深く感謝申し上げます．

〇参考文献〇（著者関係）

（１）黒川信重『オイラー探検：無限大の滝と１２連峰』シュプリンガージャパン，２００７年１０月．
（２）黒川信重『オイラー，リーマン，ラマヌジャン：時空を超えた数学者の接点』岩波書店，２００６年１２月．
（３）黒川信重「ユークリッド素数列」『数学セミナー』２００８年５月号１２－１３．
（４）黒川信重「佐藤テイト予想の歴史」「ゼータ関数入門」『数学のたのしみ』特集「佐藤テイト予想の解決と展望」日本評論社，２００８年６月．
（５）黒川信重「三角関数への列車の旅」『数理科学』 ２００８年７月号．