結び目の数学

今井　淳　（首都大学東京）

1　序

結び目理論は、現在とても活発に研究されている分野で、それ自体の面白さはもちろんのこと、数学内外の最先端の研究分野との結びつきも、とても興味深いものです。ここでは、

- 結び目が数学にどのように入ってきたのか、
- 現在の興隆のきっかけはなにか、
- 他分野との交流はどのようなものがあるか、

といったことを、ごく簡単にご紹介したいと思います。なお、結び目理論といっても広範囲に亘ります。ここで取り上げるトピックや記述には、偏りがあるかと思いますが、予めご了承ください。

2　結び目とその仲間たちと数学

2.1　生活の中の結び目、絡み目、組み紐

数学に入る前に、日常生活で結び目がどのように使われるかをみてみましょう。

実用としての結び目は：アウトドア関係の書籍でみることができます。図 1–4 に名前のついた結び目をいくつかあげておきます。装飾用としては、ネクタイ（本 [FM] に、ある条件を満たすようなネクタイの結び方が網羅されています)、水引（図 5)、リボン、紋章（図 7 はイタリアのボロメア家の紋章だそうです。これは 3 つの円からなりますが、2 つだけ取り出せば、どの 2 つも外れてしまいますが、3 つ揃うと外れない、という性質を持っています)、shoulder knot、組み紐（図 8、9）といったものがあります（図 6)。組み紐は結び目ではありませんが、後の 3.3.2 節で見るように、結び目や絡み目と大変深い関係にあります。また、結びの一番、ノット（船の速さ)、cut the Gordian knot, nodo d'amore、といったように、いろいろな国の言葉や表現にも登場します。

2.2　数学で扱う結び目

数学で結び目を扱う場合には、紐の両端を閉じたもの、すなわち輪っかになったものを考えます。これは、以下の理由からです。

もしも紐の両端がそのままだと、図 10 – 12 のように、結んでいたように見えたものが、いつの間にか結んでいないようになってしまうからです。これでは、どこまでがちゃんと結んでいるのかがはっきりしません。端点を手に持って離さなければ（つまり輪っかにしてしまえば)、このような曖昧さは現れません。

日本数学会・2008 年秋季総合分科会・市民講演会（講演で用いた pdf ファイルが [O] で入手可能）

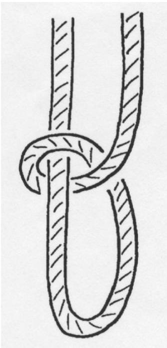


図 1: half hitch

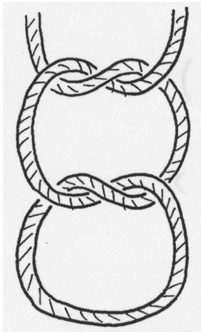


図 2: square kont, reef knot, (ま結び)

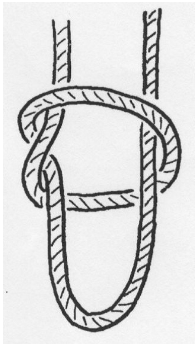


図 3: running knot

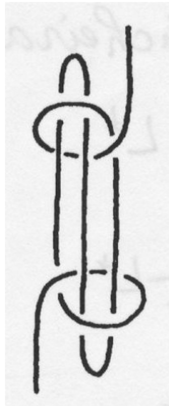


図 4: sheep shank

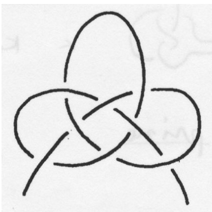


図 5: あわび結び

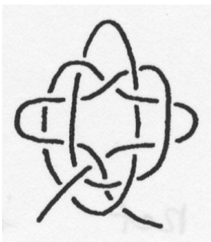


図 6: 華鬘結び

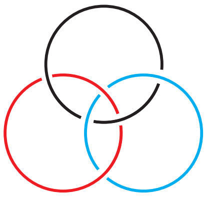


図 7: ボロミアン・リンク

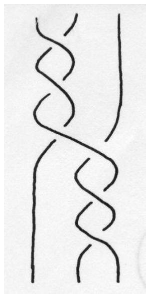


図 8: 組み紐

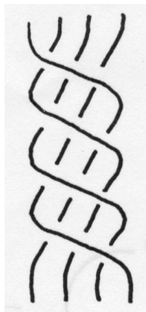


図 9: (pure) braid

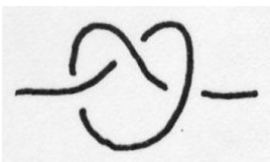


図 10: 結んでいる

⇒

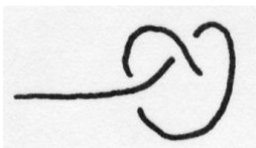


図 11: 右端を短くしていく

⇒

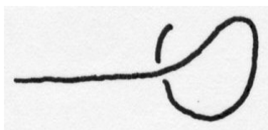


図 12: 結んでいない

図 13: 端点を固定する

図 14: “閉じた” 結び目

定義 1 結び目とは、3次元空間に埋め込まれた円周で、自分自身と交わらないようなものをいい、**絡み目**とは、いくつかの結び目の非交和（共通部分が空集合であるような和集合）のことをいいます。結び目の絡み目の一種と考えることができます。

組み紐とは、図 8、9 のように、何本かの紐（n 本とします）を垂らして編んだものです。このとき、紐が常に上から下になっていないといけません。言い換えると、z-座標が一定の平面で切ったときに、いつも交点の個数が n でなければいけません。更に、n 点の一番上と一番下の平面内の位置は同じである、と仮定します。ただし、一番上の平面で左から i 番目の点からスタートする紐が一番下でやはり左から i 番目である必要はありません（このようなものは特に pure braid と呼ばれます（図 9））。

これらは、3次元空間の中に入っているものですが、2次元の紙にその図を描くときには、ある平面に射影したもので表します。このとき、結び目の2つの点が平面上の同じ点（これを**交点**と呼びます）に射影される場合、今までの図のように、その上下関係を込めて描きます。こうしてえられたものを結び目図式といいます。

例 2 最も簡単な結び目は、輪ゴムのように、結んでいない円周です。これを**自明な結び目**と呼び、結び目の1つと考えます。

自明でない結び目で最も簡単なものがひとえ結び（数学では**三葉結び目**、英語で trefoil と呼びます）（図 15）、次が **8 の字結び目**（図 16）です。

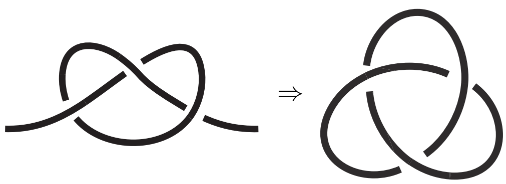


図 15: 三葉結び目

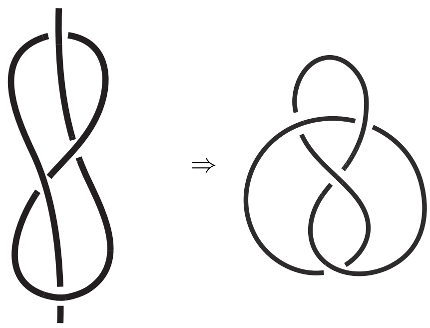


図 16: 8 の字結び目

2.3 二つの結び目が同じ、とは？

結び目**だけ**とりだして考えれば、どんな結び目でも円周と同じ（同相）です。ですから、意味のある定義をしようと思うと、この円周が3次元空間に**どのように入っているか**を考えないといけません。そのため、結び目が同じ、ということを定義するときに、結び目の周りの空間も合わせて考える必要が出てきますが、その正確な記述はここではできないので、次で定義することにします。

定義 3 二つの結び目が「**同じ**」（**イソトピック**）であるとは、二つがゴム紐でできているとして、ゴム紐を切らずに連続的に変形して、一方を他方に重ね合わせられるようにできることをいいます。

例 4 二つの自明な結び目の例（図 17）：

例 5 蝶結びは何でしょうか。蝶結びを図 18 のように変形していくと、三葉結び目（ひとえ結び）と等しいことが分かります（最初にまず結び目の両端をつないでから変形を始めます）。

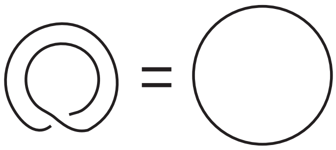


図 17: 自明な結び目

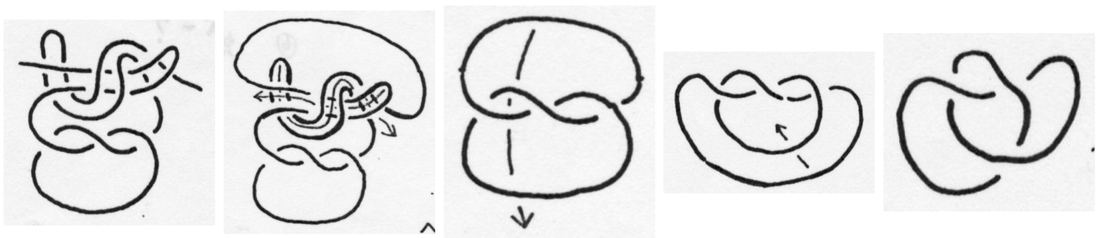


図 18: 蝶結び＝ひとえ結び

2.4　結び目の研究超略歴

そもそも結び目が科学的に注目されたのは、物理学との絡みからです。

2.4.1　絡み数のガウスの積分公式

ガウス (1777 – 1855) は（輪っか 2 つからなる）絡み目の**絡み数**の積分表示を与えました。絡み数とは、一方の結び目が他方に（符号をつけて合計）何回度絡みついているか、をはかる量で、整数に値を持ちます。図 19 のような絡み目（ホップ・リンクと呼ばれます）では 1（または –1）になります。絡み数は、紐を切らずに連続的に変形させても、変わりません。最も基本的な絡み目不変量です（不変量の意味は後述）。

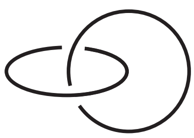


図 19: ホップ･リンク

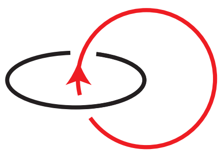


図 20: 一方のループに電流が流れている

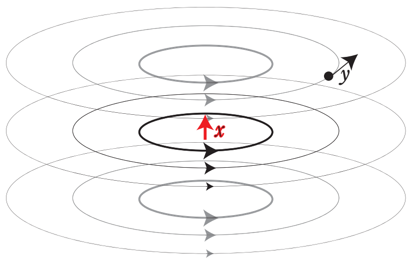


図 21: 電流要素と磁場

ガウスは絡み数というトポロジカルな量を電磁気学から導き出しました。一般に、点 $\boldsymbol{x}$ で電流要素 $j dl$ があるとすると（図 21）、ビオ・サバールの法則より、点 y で磁場 $dH = \dfrac{j\, d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{4\pi|\boldsymbol{r}|^3}$ ができます。ここで、$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ で $\times$ はベクトル積をあらわします。

さて、図 20 のように、絡み目の一方のループ（矢印のついた方）C_2 に電流が流れているとします。このときできる磁場を他方のループ C_1 上積分すると、

$$\frac{1}{4\pi}\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot(d\boldsymbol{x}\times d\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^3} \tag{2.1}$$

となります。

定義 6 これを C_1 と C_2 の**絡み数**といい、 $Lk(C_1, C_2)$ で表します。

絡み数には、他にもいろいろな定義があります。C_1 に表裏のある膜（**ザイフェルト膜**といいます）をはって、それと C_2 の交点を符号つきで（正確には、C_2 がこの膜の裏側から表側に抜けるときに $+$、逆のときに $-$ の符号をつけて）数え上げたもの、図式で、C_1 が上になるような交点の数を符号つき（符号は図 31 の左二つで与えられます）で数え上げたもの、$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ 方向の単位ベクトルをとることにより、トーラス $\cong C_1 \times C_2$ から単位球面への写像が得られますが、その**写像度**、などなど。写像度とは、この写像のトーラスの像が、単位球面を（符号込みで）何重に覆っているかを表す量で、正確にはホモロジー群を用いて定義することができます。上のガウスの積分公式は、写像度を微分幾何学的に表したもの（単位球面の単位面積要素（重積分ででてくる $dxdy$ のようなもの）の引き戻しをトーラス上積分して得られます）、とも考えることができます。

ガウスの弟子のリスティングも結び目を研究したそうです。

2.4.2　ケルヴィン卿の渦原子論

物質の根源的な構成要素は何か、というのは物理学の大問題の一つです。イギリスの物理学者のケルヴィン卿（ウィリアム・トムソン）(1824 – 1907) は 1867 年に「渦原子論」というものを考えました。これは、原子とは、その当時存在すると考えられていたエーテル（電磁波の媒質と思われていました）の渦が結び目を作ったものであり、渦からなる結び目や絡み目の違いが物質や化合物の違いの原因である、というユニークな考えです。結局「渦原子論」はダメになりましたが、これが結び目の数学的な研究が始まるきっかけになりました。友人であるＰ．Ｇ．テイト (1831 – 1901) が結び目の分類表を（間違いもありましたが）初めて作成したのでした。

2.4.3　古典的な（あるいはコテコテの？）結び目理論

その後しばらく、結び目理論はトポロジー（位相幾何学）の中で命脈を保つことになります。その中で特に大事だと思われるものを二つ挙げましょう。

まず、アレクサンダー (1888 – 1971) が 1920 年代 に発見した**アレクサンダー多項式**。これはこの種の最初の結び目不変量（後述）となりました。アレクサンダー多項式の研究は長い歴史を持ち、いくつかの定式化が存在します。結び目の補空間の基本群を生成元と関係式で表し、そこから自由微分、可換化、行列式をとる、などの操作を経て定義するもの、上述のザイフェルト膜からザイフェルト行列というものを作り、そこから定義するもの、さらには、後述のジョーンズ多項式のように、図 32 のスケイン木（スケイン分解樹）から定義するもの（コンウェイ）、などです。

次はライデマイスター (1893 – 1971) による**ライデマイスター・ムーブ**。彼は、２つの結び目図式が同じ結び目を表わす必要十分条件は、本質的に次の局所変形を有限回施すと移りあうことであることを示しました。これは、いってみれば結び目が同じという関係を構成する「原子」のようなものです。このおかげで、考えているある写像が結び目不変量となるかどうかは、それがこの３種類のライデマイスター・ムーブで不変かどうかだけ調べればよくなりました。

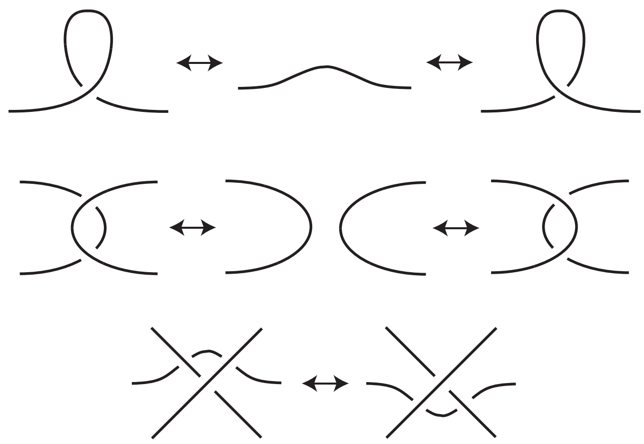


図 22: ライデマイスター・ムーブ

2.4.4　ブレイクスルー

1984 にヴォーン・ジョーンズ (1952 –) が発見した**ジョーンズ多項式**が結び目理論の一つのブレークスルーになりました。彼は作用素環論という、解析の一分野を研究していました（最近は一つの分野に分類することができない研究結果が多々みられるので、分野分けが徐々に無意味になってきてますが)。このジョーンズ多項式が統計力学や量子群と関係があることが分かり、結び目理論といろいろな分野の交流が一気に始まりました。ジョーンズは 1990 年にフィールズ賞を受賞しました。定義は後ほど 3.3.3 節でみることにします。

3　結び目不変量

3.1　結び目が同じかどうかの判定

２つの結び目図式が同じ結び目を表すのかどうか、という問題を考えてみましょう。同じことを証明するには、実際に変形して見せればそれで十分です。（ただし、これは簡単とは限りません。Perko のペアといって、100 年近く同じであることに誰も気がつかなかったものもあるくらいです。）たとえば、図 23 より、８の字結び目とその鏡像は同じであることが分かります。

問題 7 それでは、三葉結び目とその鏡像は同じでしょうか（図 24)。

実際に試してみると、なかなかできないことが分かります。しかし、いくらやってもできなかったからといって、２つが異なる、とは言えません。異なるものが異なることを示す、これが結び目不変量の大事な役割の一つです。

3.2　不変量とは

定義 8 **結び目不変量**とは、結び目全体の集合からある集合、たとえば、数の集合とか、多項式の集合とか、群などへの写像で、同じ結び目には同じ値を対応させるものをいいます。

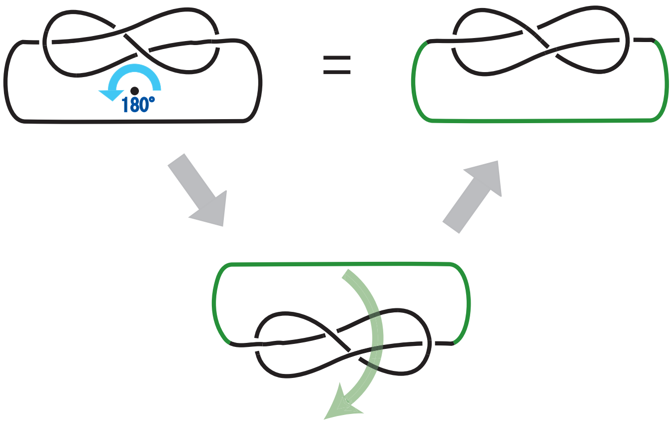


図 23: 8 の字結び目＝その鏡像

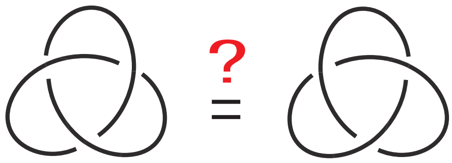


図 24: 三葉結び目＝その鏡像？

対偶をとると結び目不変量の値が違えば異なる結び目になります。後半この事実を用いて結び目の判定をします。

「不変量」という概念は数学者には当たり前になってしまいましたが、一般にはどうも分かりにくいもののようなので、二つほど例を挙げます（[INT] 参照）。

定義 9 対象となる集合 T と「同じ」であるという関係（正確には**同値関係**ですが、同値関係の定義はここではしません）$\sim$ が与えられているとします。T からある集合 S への写像 f が**不変量**であるとは、「同じ」ものの行く先が必ず等しいことをいいます：$a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$。

（定義から分かるように、不変量かどうかは、考えている同値関係に依ります。どういう同値関係を考えているかは、通常文脈から分かるので、わざわざ注意しないことが多いです。）

例 10 T として整数の集合 $\mathbb{Z}$、同値関係として、「4 で割った余りが同じ」というものを考えます（これをここでは $\sim_4$ とあらわすことにします）。S として $\{0, 1\}$ をとり、$T = \mathbb{Z}$ から $S = \{0, 1\}$ への写像 f を、「2 で割った余りを対応させる」ことで定めます。すると、f は（この同値関係 $\sim_4$ に関して）不変量になります。

一般に、集合 T に同値関係 $\sim$ を入れる、ということと、集合 T の分割を与える、ということは同値です。上の例だと、$T = \mathbb{Z}$ は $[i] = \{4n+i|n \in \mathbb{Z}\}$ として、$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3]$ と非交和の形に分割されます（図 25）。この $[i]$ を i を含む**同値類**といい、4 つの元からなる集合 $\{[0], [1], [2], [3]\}$ を、$\mathbb{Z}$ を同値関係 $\sim_4$ で割った同値類集合といいます。$\mathbb{Z}$ 上の写像 g が不変量であることの必要十分条件は、g が各同値類 $[i]$ 上同じ値をとることです。つまり、本質的には g は同値類集合上の写像と考えることができることです。

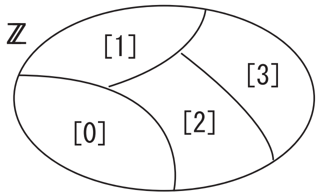


図 25: 整数の集合 $\mathbb{Z}$ の同値関係 $\sim_4$ による分割

例 11 １５パズルの不変量。T として 15 パズルの状態全て（16!個の元からなる集合になります)、同値関係 $\sim$ として、ピースをスライドさせて移りあう、という設定を考えましょう（図 26)。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	14	15	12

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		11
13	14	15	12

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9		10	11
13	14	15	12

図 26: １５パズルのピーススライド

同値関係 $\sim$ は、「１つのピースを横に動かす」と「１つのピースを縦に動かす」の２つの操作を有限回繰り返せば得られることがわかります。（この２つの操作が、ちょうど結び目の同じという関係におけるライデマイスター・ムーブに相当します。）T 上の写像が不変量であることの必要十分条件は、その値がこの２つの操作で変わらないことです。

さて、不変量ですが、$S = \{+1, -1\}$ として、写像 f を線形代数で習う置換の符号を用いて、作ることができます。（２つの操作で変わらないようにするため、ちょっとした補正が必要です。）詳しくは本 [INT] などを参照してください。この不変量を用いると、「14 と 15 のピースだけ入れ替えることはできない」といったことが分かります。

3.3 ジョーンズ多項式

前に述べたように、ジョーンズ多項式は、結び目理論とは全く異なるところから出てきました。この架け橋となったのが組み紐群です。

3.3.1 ジョーンズの研究から組み紐群へ

n 本の紐からなる組み紐全体 B_n （ただし、組み紐の条件（定義１参照）を満たしたまま、紐を切らずに連続的に変形させたものは元のものと同じ、とします）は図 27 のように、２つの組み紐 a と b の積を、a の組み紐の下に b の組み紐をつなげてできた組み紐で定めることにより、「**群**」になります。

群とは、演算が定義されていて、それがある条件を満たす集合のことですが、ここでは定義は省略します。たとえば、足し算を演算とする数（整数、実数）の集合、行列の積を演算とする、行列式が 0 でないような n 次正方行列全体の集合、などです。

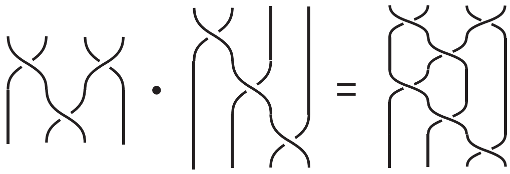


図 27: 組み紐群の演算

この組み紐群は、i 番目の紐と $i+1$ 番目の紐を  の形にひねったもの σ_i とその逆元 $\sigma_i^{-1} =$  で生成され（つまり、B_n の任意の元は、σ_i 達の冪の積の形にあらわすことができます)、次の関係式（**組み紐関係式**）で規定されます：

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{（図 28 左）}, \quad \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \ \ (|i-j| \geq 2) \text{（図 28 右）}.$$

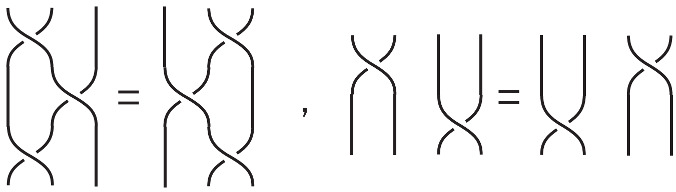


図 28: 組み紐関係式（関係ない紐は描いてありません）

一旦群に群になることがわかると、代数的なとり扱いをすることができます。ジョーンズは、彼が研究していたある種の代数がこの群と似ていることに気がついたのでした。

3.3.2 組み紐から結び目、絡み目へ

それでは、組み紐から結び目へはどのようにつながるのでしょうか。組み紐を図 29、30 のように閉じると、結び目、絡み目になます。

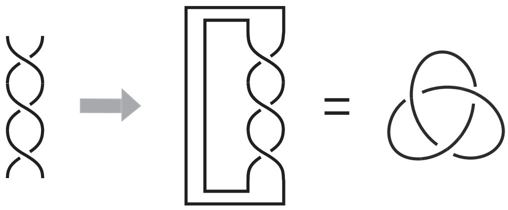


図 29: ${\sigma_1}^3 \in B_2$ から三葉結び目ができる

,

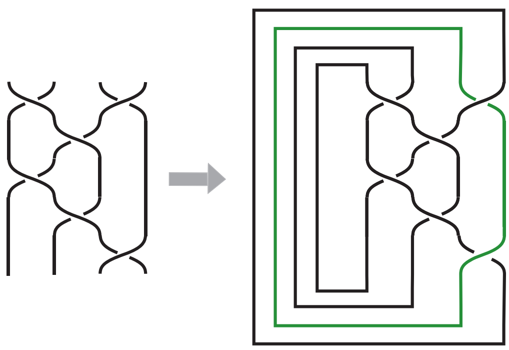


図 30: 二つの成分よりなる絡み目

２つの異なる組み紐から同じ結び目（絡み目）ができることがあります。このとき、この２つはマルコフ変形と呼ばれる変形（紐の数が変わる変形も含みます）を有限回施すと移りあう、ということが知られています。ジョーンズの仕事の組み紐群への応用は、このマルコフ変形と両立することから、結び目にまで応用できたのでした。

3.3.3　ジョーンズ多項式の特徴付け

定義 9 の記法を用いると、ジョーンズ多項式では、集合 T は（向きのついた）結び目全体の集合、同値関係はイソトピック、集合 S は t の（負の冪も許した）整数係数多項式全体の集合になります。（実は結び目の向きを反対にしても、ジョーンズ多項式は変わりません。）ただ、結び目からスタートしても、多項式の計算の途中で、絡み目が出てきますので、T として向きのついた絡み目全体の集合（これは結び目を含みます）、同値関係としてイソトピック、集合 S として $t^{\frac{1}{2}}$ の（負の冪も許した）整数係数多項式全体の集合をとって考えます。

すると、結び目または絡み目 L のジョーンズ多項式 $V_L(t)$ は、次の２つの性質で特徴付けられる、ということが知られています。

(1) 自明な結び目を○で表すと $V_{\circ}(t) = 1$

(2) **スケイン関係式**

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t) \tag{3.1}$$

ただし、L_+, L_-, L_0 はある図式の１つの “交点” の部分だけを次で置き換えてできるもの：

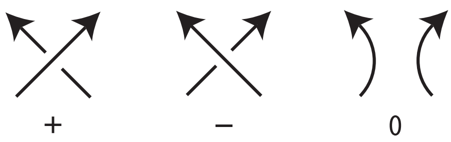


図 31: ＋交点、－交点、スムージング（0 交点と書くことにします）

（ジョーンズ多項式には、これ以外にも、カウフマンの括弧多項式による定義の仕方もあります。）

例 12 この２つの性質を用いてジョーンズ多項式を計算する方法を、実例（三葉結び目）で説明します。

それにはまず図 32 のような**スケイン木**（スケイン分解樹）を作ります（ここではスペースの関係で、通常のように上から下ではなく、左から右に描いています）。図 31 の３種類の交点のどれかを、その他の２つに変えたできる絡み目図式を２つ描くということを、出てくる絡み目図式が全て自明な結び目になるまで繰り返します。

まず、一番左に三葉結び目の結び目図式を描きます。交点の１つ（図の網掛け部分）に注目します。今の場合、－交点です。これを＋交点、スムージングに変えた絡み目図式（１つ右の列の２つ）を描き、元の結び目図式と線で結んだ絵を描きます。＋交点に変えたものは自明な結び目ですから、これはもういじりません。スムージングに変えたものはホップ・リンクにある向きをつけたものです。そこで、また交点の１つ（前とは別の網掛け部分）に注目します。これはまた－交点になるので、＋交点、スムージングに変えた絡み目図式を描きます。スムージングに変えたものは自明な結び目ですから、これはもういじりません。＋交点に変えたものは自明な絡み目ですが、更に

自明な結び目になるまで変形していかないといけません。今度は円周を２つ横に並べた形にして、真ん中のスムージング（0 交点）を + 交点、− 交点に変えた絡み目図式を描きます。これらは２つとも自明な結び目ですから、スケイン木はこれでできあがりです。

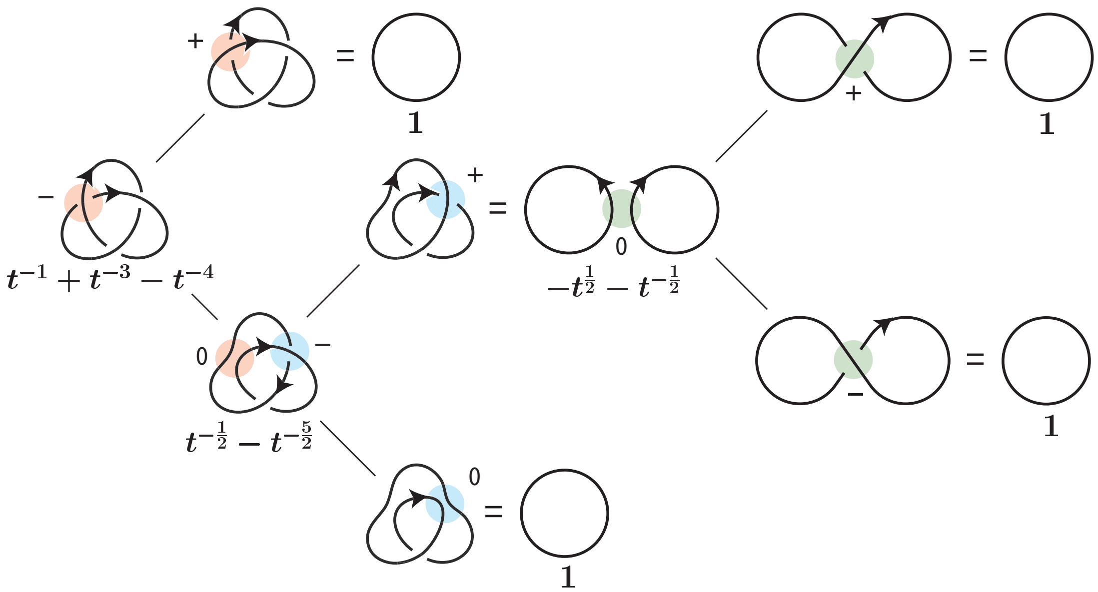


図 32: 三葉結び目のスケイン木によるジョーンズ多項式の計算

次に、このスケイン木に現れる結び目、絡み目のジョーンズ多項式を、スケイン関係式を使って左から順に求めていきます。一番左は自明な結び目になっているはずですから、そのジョーンズ多項式は 1 です。まず円周を２つからなる自明な絡み目のジョーンズ多項式を $V_{\circ\circ}(t)$ とすると、(3.1) より

$$t^{-1}\cdot 1 - t\cdot 1 = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{\circ\circ}(t)$$

よって $V_{\circ\circ}(t) = -t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ となることが分かります。次に図 32 のような向きのついたホップ・リンクのジョーンズ多項式を $V_{-HL}(t)$ とすると、(3.1) より、移項すれば

$$V_{-HL}(t) = t^{-1}\left\{t^{-1}(-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\cdot 1\right\} = t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}$$

が分かります。最後に一番左の三葉結び目（− 交点が３つなので左手系三葉結び目とよぶことにします）のジョーンズ多項式 $V_{-\mathrm{trefoil}}(t)$ は

$$V_{-\mathrm{trefoil}}(t) = t^{-1}\left\{t^{-1}\cdot 1 - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}})\right\} = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$$

となることが分かります。

3.3.4　ジョーンズ多項式での結び目判定

例 13 図 32 の左手系三葉結び目の鏡像は、+ 交点が３つの右手系三葉結び目になります（図 33）。右手系三葉結び目のジョーンズ多項式は、上と同様にして、$V_{+\mathrm{trefoil}}(t) = -t^4 + t^3 + t$ となるこ

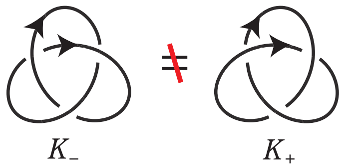


図 33: 左手系三葉結び目とその鏡像の右手系三葉結び目

とが分かります。(実は一般にある結び目 K の鏡像 K^* のジョーンズ多項式は $V_{K^*}(t) = V_K(t^{-1})$ を満たします。) よって、

$$V_{-\mathrm{trefoil}}(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1} \neq V_{+\mathrm{trefoil}}(t) = -t^4 + t^3 + t$$

ですから、**三葉結び目とその鏡像は違う**ことがわかりました。

例 14 図 34 は真実の愛の結び目 (TL であらわすことにします)、図 35 は偽りの愛の結び目 (FL であらわすことにします) と呼ばれています。結び目図式は真ん中の 2 つの交点の上下が異なっていますが、本当に違う結び目でしょうか。ジョーンズ多項式を計算すると、

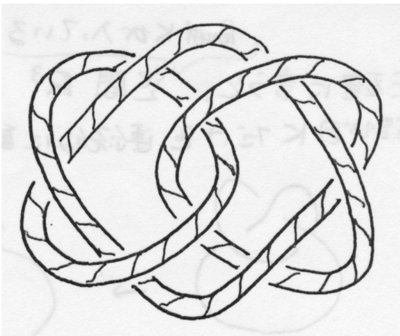


図 34: 真実の愛の結び目

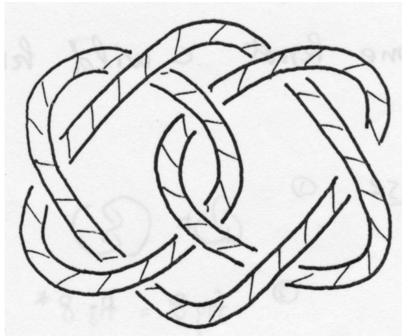


図 35: 偽りの愛の結び目

$$V_{TL}(t) = t^3 + t^5 - t^8 \neq V_{FL}(t) = 1 - t + 3t^2 - 3t^3 + 3t^4 - 4t^5 + 3t^6 - 2t^7 + t^8$$

となり、真実の愛の結び目と偽りの愛の結び目は違うことがわかりました。

3.4 ジョーンズ多項式以外の結び目不変量

ジョーンズ多項式が登場して以降、実に沢山の結び目不変量が見つかりました。詳しくは、参考文献に上げた参考書などを御覧下さい。また、ウェブ上でもアクセス可能です。たとえば、[T] からリンクされています。

3.5 結び目表

結び目の本 (たとえば [M] など) の巻末に結び目の表がついています。三葉結び目のように、鏡像と違う結び目もありますが、両方かいていると大変なので、このような表では、一方しかかい

てありません。つまり、結び目の同値関係として、図 22 のライデマイスター・ムーブで移りあう、というのに加えて、鏡像で移りあう、というのも合わせたものを採用した場合の代表元の表ということになります。

また、図 2 のように、２つの結び目（ここでは、三葉結び目とその鏡像）をくっつけたような結び目を合成結び目といい、そのような形にあらわすことができないものを（素数との類似から）**素な結び目**といいますが、通常結び目表は素な結び目だけリストアップしています。つまり、結び目理論における素数表のようなものです。

図 36 に結び目の表をつけておきます。この表では、ここでは解説できませんが、筆者が研究している「結び目のエネルギー」というものが小さい順に並べてあります。結び目の左側に書いてある 4_1 などは、結び目の名前です。最小交点数（その結び目をあらわす図式の交点の数の最小値）が 4 の結び目の中で 1 番目のもの、という意味です。（通常の結び目表では、最小交点数の順番になっています。）右側の数字はそのエネルギーを表しています。

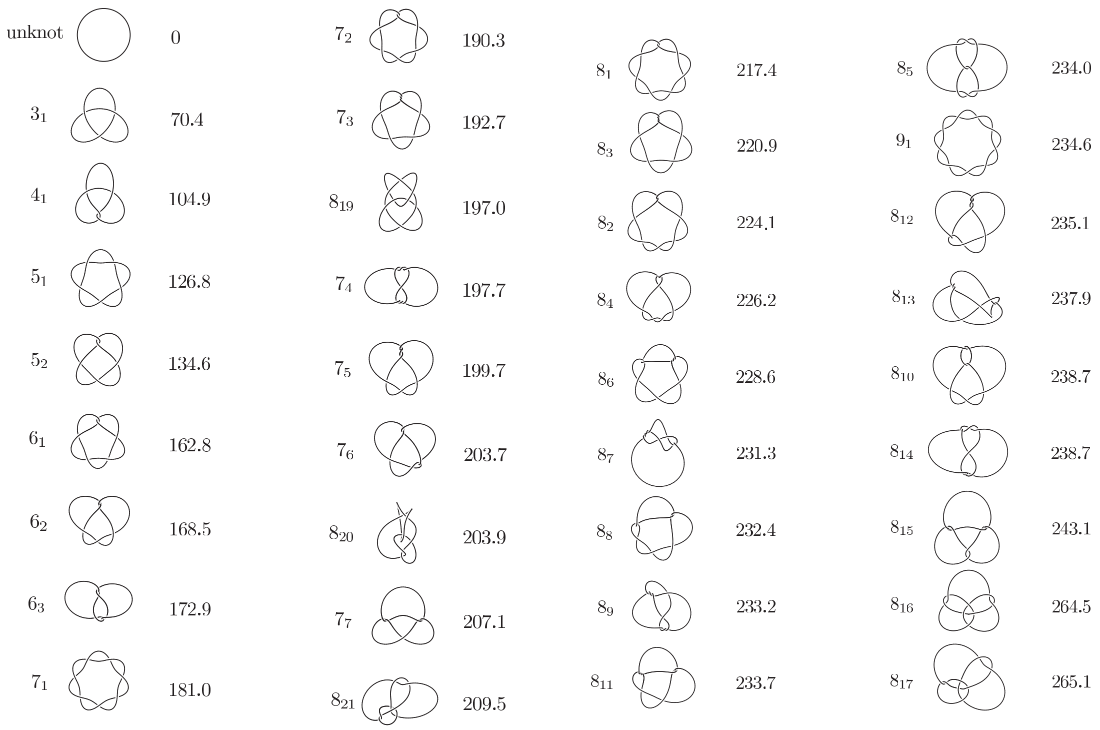


図 36: （エネルギーが小さい順に並べた）結び目表

4　他分野との関連

結び目理論と関連がある分野をいくつか挙げてみましょう。

（１）３次元多様体論

（２）作用素環（ジョーンズ多項式など）

（３）統計力学（分配関数、ヤン・バクスター関係式など）

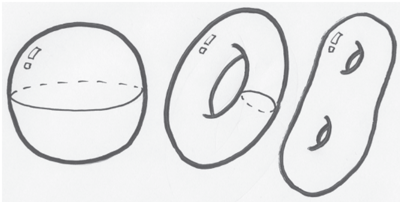
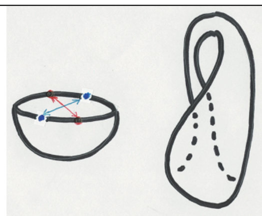
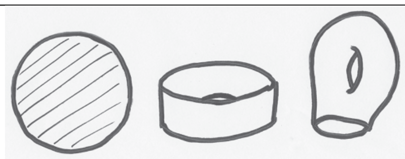
（４）数論（森下 昌紀氏（九州大学）の研究している結び目と素数など）

（５）理論物理学

（６）幾何学的結び目理論：結び目の形の複雑さをはかり、きれいな形を求める
（結び目のエネルギー、共形幾何学、ideal knots、平均交点数など）
（７）高分子科学、ＤＮＡ
ここでは、結び目理論と最も近いと思われる３次元多様体論と、上の項目の中では数学から最も遠いと思われる高分子科学、ＤＮＡの話のさわりを紹介します。

4.1　３次元多様体

多様体とは、幾何学者にとって最も基本的な空間です。局所的にみるとどこもユークリッド空間と同じものをいいます。連結で有界な 2 次元多様体（曲面）の例を表にしました。

	向き付け可能	向き付け不可能
境界なし	 球面、トーラス、Σ_2	 射影平面、クラインのつぼ
境界あり	 円盤、アニュラス、$T^2 \setminus \mathring{D}^2$	 メビウスの帯

連結で有界な 2 次元多様体（曲面）の例

参考のため、多様体とはならない空間の例を図 37 に挙げます。

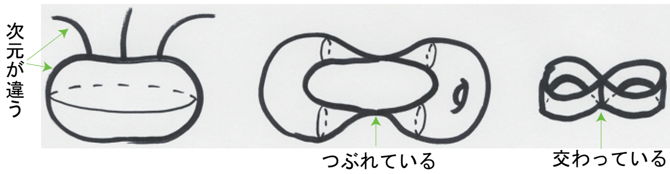


図 37: 多様体でない例

最近解決されて話題になり、テレビ番組でも紹介されたポアンカレ予想は３次元多様体についての予想です。

4.1.1　絡み目に沿った３次元球面の手術で３次元多様体をつくる

それでは、多様体と結び目理論はどのようにつながるのでしょうか。
多様体の表わし方にはいくつかありますが、３次元の場合に有効な方法として、（なんだかとても痛そうですが）「切った貼った (cut and paste)」あるいは「手術」と呼ばれるものがあります。

球面（ボールの表面）は 2 次元ですが、これを 3 次元にしたものを 3 次元球面といって、S^3 とかきます。（私たちが住んでいる 3 次元ユークリッド空間の外に 1 点付け加えたもの、とも思えます。）さて、3 次元球面に結び目 K が入っている、とします（図 38)。K を芯に持つような結んだドーナッツのことを K の管状近傍（図 39）といいます。

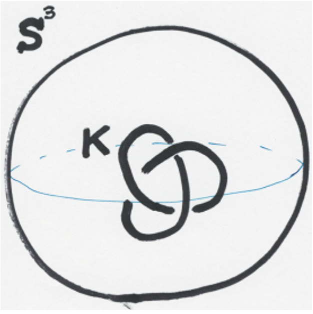


図 38: 3 次元球面 S^3 の結び目 K

K の管状近傍の内部を取り除く。
この管状近傍は位相的には
ソリッドトーラス。

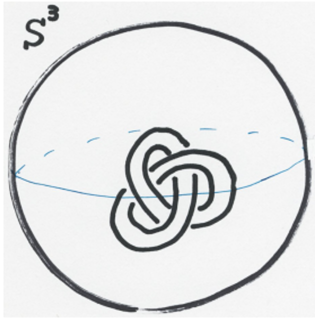


図 39: K の管状近傍

次に、3 次元球面 S^3 から結び目 K の管状近傍の内部を取り除いた残りの空間と、別のドーナッツを（この 2 つは境界付き多様体です）、表面（境界）のトーラスで貼り合わせてくっつけます。このとき、どのように貼り合わせるかは、図 40 の右のトーラス上の赤い曲線（ドーナッツを輪切りにするような曲線）の行先で決まります。たとえば、図 40 のように左のトーラスに（自分自身と交わらない閉じた）曲線を描けば、2 つの赤い曲線同士がぴったりかさなるようにする、ということで、貼り合わせ方が決まります。

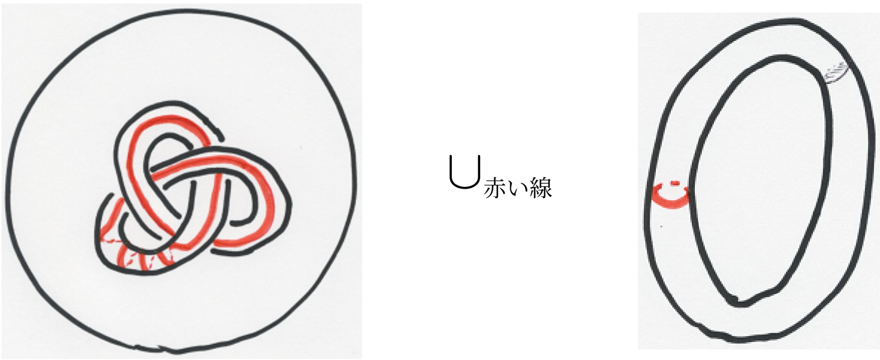


図 40: 赤い線の沿って貼り合わせる（結び目に沿った 3 次元球面の手術）

こうして貼り合わせると、境界のない 3 次元多様体ができます。

実は、3 次元球面から、結び目、絡み目に沿った手術で、ある条件（正確には「連結で向きづけ可能な 3 次元閉多様体」。この条件はとても自然で、重要な多様体のクラスを定めます）を満たす任意の多様体が得られることが知られています。

このことを通じて、結び目の研究で得られた結果が、多様体論に応用できるわけです。

4.2　高分子科学

ポリマーが結び目になっていると、物質の性質（硬さなど）が変わることがあるそうです。そのため、ポリマーが（非自明な）結び目になるのかどうか、ということが高分子科学で問題にされることがあるそうで、それに関して次の予想があります。

予想 (Frisch-Wasserman-Delbruck) 環状ポリマーが長くなると、（非自明な）結び目になる確率が 1 になる。

この予想の解決するため、数値実験でランダムに結び目を発生させ、どの結び目型がどのような確率で現れるか調べる、という研究があります。ランダムな結び目を発生させる方法（モデル）としてたとえば次の２つが研究されています：

（１）立方格子（3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の整数格子 $\mathbb{Z}^3 = \{(l,m,n)\,|\,l,m,n \in \mathbb{Z}\}$）上の（同じ点を２回通らないような）ランダムウォーク。

（２）自己交叉しない折れ線（Self Avoiding Polygon ということで SAP と略されるようです）。

4.3　ＤＮＡ

最後にＤＮＡ（デオキシリボ核酸）にまつわる話題を紹介します。ＤＮＡは二重らせん構造をしていますが、さらに環状、つまり結び目になっていることがあります（図 41)。二重らせんの２本の結び目を K_1, K_2、そのコアを K とします（図 42)。

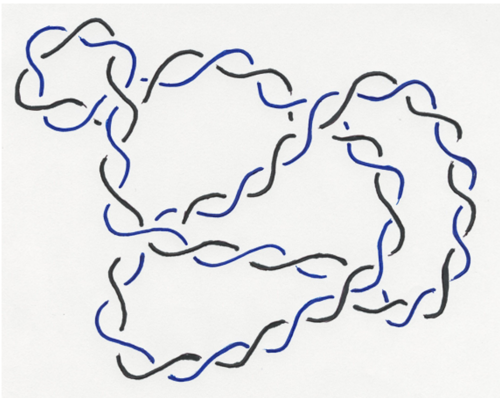


図 41: リボンの結び目

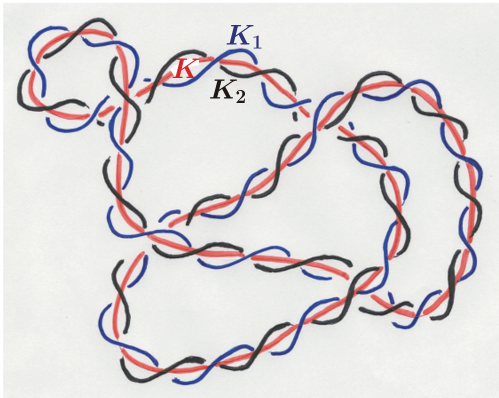


図 42: ２本の結び目とコア

4.3.1　絡み数のガウス積分公式から派生するもの

K_1 と K_2 の絡み数を Lk、（ここでは正確な定義はしませんが）ねじれ数を Tw、K のライジング数 (writhe) を Wr とすると

$$Lk = Wr + Tw \tag{4.1}$$

なる等式が成立します（White, 1969)。ライジング数だけはコアの曲線だけで決まります。ここで、曲線 K の**ライジング数**とは、ガウスによる絡み数の積分表示の公式 (2.1) で、$C_1 = C_2 = K$ としたものです：

$$Wr(K) = \frac{1}{4\pi}\iint_{K\times K\setminus\Delta} \frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot(d\boldsymbol{x}\times d\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^3}.$$

ただし、被積分関数の分母が 0 とならないように、積分領域から対角成分 $\Delta = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in K\}$ を除いておきました。

この等式 4.1 やライジング数が分子生物学で有用であることが 1970 年代以降指摘されています。($K_1 = K_2$ となる場合でも、K と K_1 で考えれば、同様の結果が成り立ちます。)

更に上のライジング数の式で被積分関数に絶対値をつけたものが**平均交点数**と呼ばれるものです:

$$AC(K) = \frac{1}{4\pi}\iint_{K\times K\setminus\Delta} \frac{|(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot(d\boldsymbol{x}\times d\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^3}.$$

これは 3 次元空間に入っている結び目を平面に射影して得られる射影図の交点の数を、射影する方向を全てに動かして平均したものです。数値実験では、この量は曲線の複雑さをはかるよい指標となります。

4.3.2 トポイソメラーゼと結び目解消数

トポイソメラーゼはＤＮＡ切断し再結合する酵素です。この過程で、結び目図式の交点の上下が逆になり、そのために結び目が変わってしまうことがあります(図 43)。

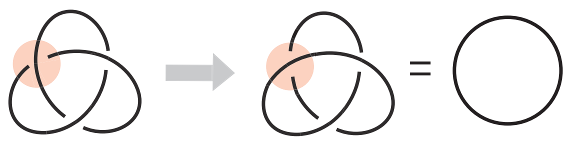


図 43: 一つの交点の上下を逆にすると自明な結び目になるので、三葉結び目の結び目解消数は 1

さて、一般にどんな結び目も、その図式の交点の上下をいくつか変えれば、自明な結び目にすることができます。これは、図 44 のように、結び目の上のある点から出発して、だんだんと高度を下げるように進み、最後に急に上がって出発点に戻れば、同じ射影図の自明な結び目を得ることができるからです。

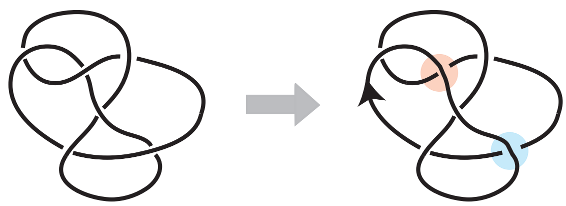


図 44: 矢印の方向に進むに従って紙面の向こう側にいくと、自明な結び目になる

定義 15 自明な結び目にするために必要な、結び目図式の交点の上下の交換の数の最小値を、その結び目の**結び目解消数**という。(同じ結び目全てとその図式全てに亘って最小値をとります)

これは結び目理論で古くから研究されてきた量ですが、トポイソメラーゼのおかげで、ＤＮＡの研究者にも興味を持たれてきました。

5　結びの言葉

以上、結び目理論と関連する話題を駆け足で眺めてきましたが、次の二つを結びの言葉として、この文章を終えたいと思います：

- **結び目理論はこれからどこへ行くのか？**
- **どの分野が結び目理論に新たな驚きを与えるのか？**

参考文献

[FM] トマス・フィンク, ヨン・マオ、「ネクタイの数学ーケンブリッジのダンディな物理学者たち　男性の首に一枚の布を結ぶ 85 の方法」、 (新潮 OH!文庫)

[INT] 今井　淳, 寺尾　宏明, 中村　博昭, 「不変量とは何か – 現代数学のこころ」, 講談社ブルーバックス

[K] 河内　明夫 http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/~kawauchi/InternetLecture/lectkawa.html

[L] W. B. R. リコリッシュ、「結び目理論概説」、シュプリンガー・フェアラーク東京

[M] 村杉　邦男、「結び目理論とその応用」、日本評論社

[O] http://www.comp.tmu.ac.jp/knotNRG/download/0809shimin_kouenn.pdf

[T] http://home.hiroshima-u.ac.jp/teragai/knot.html