

荒川知幸氏の受賞を祝う

山田裕史（岡山大学大学院自然科学研究科）

このたび奈良女子大学准教授の荒川知幸氏が「平成 20 年度科学技術分野の文部科学大臣表彰若手科学者賞」を受賞されたことは慶賀に耐えない。業績名としては「無限次元代数の表現論の研究」であるが、同じく表現論に関わる者として、もう少し詳しく荒川氏の仕事の内容に触れてみたい。

荒川氏は近年一貫して W 代数の表現論を研究しており、その方面での世界的リーダーの一人である。我々が普段相手にする代数（= 環）は岩堀-ヘッケ代数にしる、量子化された普遍展開環にしる、生成元と基本関係式が明示的に書かれる、すなわち「表示」ができ、それが構造や表現を調べるのに大きな役割をはたす。ところが W 代数はそういう代物ではないのだ。ランクが小さい場合には基本関係式を書くことができる場合もあるのだが、実質的には役に立たない。 W 代数は共形場理論の分類の研究のなかで Zamolodchikov により 1985 年に導入されたものであり、頂点代数の枠組みで議論される。有限次元単純リー環 \mathfrak{g} 、その冪零元 f およびレベルとよばれる複素数 k から BRST コホモロジーという手続きで W 代数 $W^k(\mathfrak{g}, f)$ が構成される。素人には頂点代数、 W 代数、(スーパー) コンフォーマル代数の区別はつかないのだが、これらはやっぱり複雑に絡み合っているものらしい。 W 代数も (スーパー) コンフォーマル代数も頂点代数の重要なクラスを占める。また主要なスーパーコンフォーマル代数は W 代数として得られる。「(少なくとも有理的なかつコンフォーマルな) 頂点代数はすべて W 代数である」という「予想」もあると聞く。

W 代数がなぜ重要か？ それはそれは導入の経緯からもわかるように有理的共形場理論の有力な候補を与えてくれるからだ。候補として知られている例はアフィンリー環を用いるもの (Frenkel-Kac-Wakimoto, Commun. Math. Phys. 147 (1992)) がある。候補になり得るための重要な資格が「指標のモジュラー不変性」である。

たとえば $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, $f = E_{21}$, $k \neq -2$ とするとき $W^k(\mathfrak{g}, f)$ は、中心電荷が $1 - 6(k + \frac{1}{k+2})$ のヴィラソロ頂点代数とよばれるものになる。(ヴィラゾロとよぶ人もいる。) そしてアフィンリー環 $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$ の許容表現が「量子化された Drinfeld-Sokolov リダクション」という完全関手によりヴィラソロ代数の「極小系列表現」に対応するのである。このヴィラソロ代数の表現の指標はモジュラー不変性を持つことが知られている。従って $W^k(\mathfrak{g}, f)$ が有理的共形場理論の候補の資格を得るのだ。

1992 年に E. Frenkel, V. Kac, 脇本実氏は上記論文において、 W 代数に対してモジュラー不変性を持つ既約指標の存在、構成法を予想した。荒川氏はホモロジー代数的な手法を駆使してすべての既約表現の指標を決定し、結果的に FKW 予想を肯定的に解決したのである。

ここではできあがったホモロジー空間の消滅・非消滅も非常に重要な問題になる。この結果は100ページを超える大論文として発表された (*Inventiones Math.* 169 (2007), 219-320)。

荒川氏のこの仕事は極めて正統的であり、「正面突破」という印象が強い。もちろん泥臭い計算を大量にしているであろうことは容易に想像できる。しかしできあがったものを見れば自然であり、美しい数学になっている。むしろ「すでにやられていてもおかしくない」という誤解すら招くかも知れない。そこが荒川氏のすごいところなのだろう。正面突破でありながら、今まで誰も手を付けなかった、あるいは付けられなかった部分に「執着」して突き進み、決定打を放つ。「数学者はみんなそのように心がけているではないか」と言われればそれまでなのだが、荒川氏には特にその感が強いのだ。称賛に値するし、受賞も「むべなるかな」である。個人差もあるだろうが、荒川氏のこの仕事によって、 W 代数がより身近に感じられるようになったといわれる。

荒川氏には初期にアフィンヘッケ環や量子群という無限次元代数の表現論に関する仕事もある。 W 代数の研究は思想的にはこれら初期の仕事の延長線上にあると言ってよい。

この記事を書くにあたり、荒川氏にインタビューを行った。私の拙い質問に快くお答え下さったことに感謝する。最後に漏らした一言が印象的である。「理解が進んだとはいえ、まだまだミステリアスな部分の多い W 代数である。だから若い人にどんどん研究を進めてもらいたい。」彼の口から「若い人」という言葉が出ることに私は違和感を覚える。「若手科学者賞」に輝く荒川氏ご本人の益々の御活躍を願ってお祝いの言葉としたい。