非ユークリッド平面上のユークリッド的世界

双曲平面のアマチュア的発想による考察

泉屋　周一
(北海道大学・大学院理学研究院)

概 要

本文は、２００７年３月３１日に埼玉県教育会館で開催された日本数学会市民講演会での講演内容に手を加えたものです。今回話題に取り上げた非ユークリッド幾何学[1]は色々と想像をかき立てるようで、当日も「数学者にとって」思いもよらない質問が飛び出したりして数学に浸ってばかりいてはいけないと言うことを痛感しました[2]。ともあれ、当日参加出来なかった方にも、当日の雰囲気を味わっていただく事ができれば幸いです。

1　序文

私の研究分野は数学の中の特異点論と言う分野です。この分野は、代数幾何学を母体とする複素特異点論と微分位相幾何学を母体とする実特異点論があります。両者は密接に関係していて、はっきりとした境界線を引く事は出来ないのですが、あえて言うと、私の研究は、実特異点論に属します。実特異点論は大学１年で習う、微分学（微積分）の直接の一般化と考えられます。従って、微分学のもう一つの一般化である、微分幾何学とも密接に関係しています。私は、ここ１０年近くは、実特異点論を微分幾何学に応用する研究を行ってきました。そう言う意味で、微分幾何学のプロではなく常にアマチュア的な立場から研究をしてきた訳です。もっとも、もともと微分幾何を研究している友人（いわゆるプロ）からは、「１０年も続ければもうプロですよ」とは言われています。しかし、精神的には未だアマチュアで、今回のこの講演の源となった研究成果もアマチュア的発想の積み重ねで発見したものです。微分幾何学は、簡単に言うと、微積分を使って、図形の性質を研究する分野です。それは、小学校や中学で習う、初等幾何学と同じ幾何学に属します。一見かけ離れて見えますが、初等幾何学での話題に対応する事実が随所に見られます。この講演では、逆に、非ユークリッド空間内の微分幾何学で得られた、成果を初等幾何学的に説明することを試みました。そのようにする事で、「微分幾何学の最近の成果の意味を、小学校や中学校位までに習う数学の知識だけで、理解していただく」

[1]この発見は人類史上の最も注目すべき出来事の一つだと私は思います。なにしろ、我々の空間概念が革命的に変化し、強いては現代物理学や哲学等に与えた影響は計り知れないものがあるのですから。

[2]後日、アンケートを拝見しましたが、色々な感想が有り大変参考になりました。総じて、若い人の方が素直な感想が多く、日本の若者はまだまだ捨てた物ではないと感じた次第です。その、素直な感性を今後も延ばして行けば、日本の未来も明るいでしょう。

と言う大それた目標を立てました。また、アマチュア的発想も捨てた物ではないと言うことを理解していただくこともこの講演の目標の一つでした。

2　ユークリッド幾何学の公理系

ここでは、中学校や高等学校初年級までで習う数学のみを仮定して、非ユークリッド幾何学のポアンカレ円板モデルを説明し、その上には豊富な幾何学的構造が存在する事を理解していただくのが目的です。そのために、最初にユークリッド幾何学の説明から始めます。ユークリッド幾何学の解説から始まって、非ユークリッド幾何学発見の歴史について書かれた本は幾つか有ります。この辺りの話を詳しく知りたい方は例えば参考文献 [1, 2, 3, 4] を読んで下さい。

ユークリッド幾何学は、最初に、「点とは」、「直線とは」と言う言葉の約束から始まって、以下の５つの公理が仮定されています。
公理１：与えられた２点に対して、それらを結ぶ線分をちょうど１つ引く事ができる。
公理２：与えられた線分はどちら側にも限りなく伸ばすことができる。
公理３：平面上に２点が与えられたとき、一方を中心とし、他方をを通る円をちょうど１つかくことができる。
公理４：直角はすべて相等しい。
公理５：２直線と交わる１つの直線が同じ側につくる内角の和が１８０度より小さいならば、２直線をその側に伸ばせばどこかで交わる。

この５つの公理を見ると、公理１から公理４までは、割合単純な記述で、内容も我々が通常平面の性質として思っている感じから見ても、特に異論をはさむものではありません。しかし、それに比べて、公理５は少し複雑に感じます。実際、古代ギリシャから近代にかけて、この公理５は公理と言うより他の４つの公理から論理的に導かれる定理[3]なのではないのか？と疑問を持った人たちがいました。そして、他の４つの公理を仮定して、公理５を証明することを人類は実に２０００年近くにわたって試みてきました。それらの試みのなかで、大体西暦１８００年ごろまでに、公理５は次ぎの平行線公理に言い換えられることがわかってきました。

平行線公理：直線外の１点を通り、その直線に平行な直線は１本に限る。

この平行線公理は前の公理５よりは少しは解りやすい記述ですが、まだまだ定理なのではないか？と言う感じがします。ともあれ、この平行線公理と公理１から４までを仮定して得られる定理として、以下の有名な定理があります。

定理：平行な２つの直線に１つの直線が交わってできる錯角及び同位角は等しい。

さらに、この定理から以下の三角形の内角の和の定理[4]が得られることは小学校時代に習ったことです[5]。

[3]大学で教えていて、実は公理や定義と定理の区別がつかない学生さんが多いことに驚いたのはかなり昔のことです。
[4]この定理は現代のガウス・ボンネの定理、しいては特性類の理論へとつながる大変重要な定理であることを大学数学の教育課程のどこかで、強調する必要があると常々思っています。数学史の講義は近年ますます必要なように思えます。
[5]私は中学時代に習うものと思っていましたが、当日、司会の岡部恒治先生から、教えていただきました。

定理：三角形の内角の和は１８０度に等しい。

この定理の証明には、平行線公理が必要です。実際、皆さんの記憶にあるのは、三角形の頂点を通って対辺と平行な直線を引いて、その錯角が等しいと言う事実をつかう、例のあの証明法だと思います（図１）。

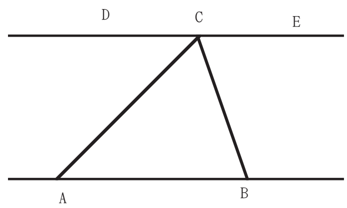

図１:三角形の内角の和の定理の証明

ここでは証明を、司会者の岡部先生の著書マンガ幾何入門[6][1] の方法で与えましょう。まず三角形の辺に向きをつけます。ただし、向きはその向きに沿って人が歩いた時三角形の内側を左手に見るものと約束します（図１）。

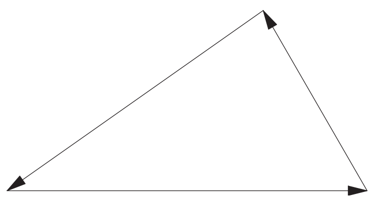
図２:三角形

⟹

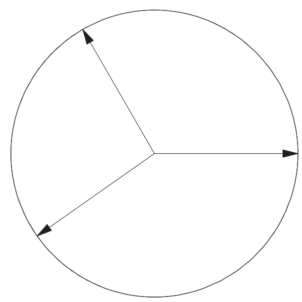
図３：左の三角形に対応する３本の鉛筆

次に、各辺の矢印に対してある点（原点）を始点とする長さ１のベクトル（「鉛筆」と思って良い）で矢印と同じ向きを持ったものを対応させます。（始点を原点まで平行移動する）。いま、三角形上をこのような鉛筆を持って、人が歩いたとすると、三角形の辺の上ではベクトルの向きは動きませんが、頂点で方向が変わります。その変化の大きさはちょうどその頂点における外角（の角度）に相当します。ただし、角度は時計と反対向きに回るときに正の値をとるように決めておきます。さて、三角形上のある点から出発して向きに沿って１周すると、ベクトルはちょうど一回転します。それは外角の和なので、三角形の外角の和は３６０度である事がわかります。一方、頂点における内角と外角の和は１８０度なのでその３倍は

５４０度=（内角の和）＋（外角の和）＝（内角の和）＋３６０度

となり、三角形の内角の和は５４０度 − ３６０度＝１８０度となります。

ここで、この論法には、平行線公理が用いられています。実際、向きづけられた辺を含む直線はその方向ベクトルで決まり、その方向ベクトルは原点まで平行移動しても同じベクトルで

[6]何だマンガか !! などと思ってはいけません。主に数学者以外の人向けに良くわかるように書かれた本ですが、数学者が読んでもなかなか感心させられる話題満載です。また、その中の章の「エンピツを回してみる」は著者がトポロジストであることを如実に物語っていて、私の大好きな章です。

あると言う部分です。また、向き付けられた辺をベクトルとしましたが、三角形の内側を向く長さ１の法線ベクトルを考え、それを原点に平行移動しても、９０度づれるだけなので、同じ結果を得られます。この場合は、外角（度）は２つの向き付けられた辺の間の法線の変化角であると考えることが出来ます。図４は図２の三角形の内側方向の長さ１の法線ベクトルを太い矢印で図示したものです。そのベクトルの始点を原点に平行移動した図が図４です。図５は図３をちょうど９０度だけ時計と反対向きに回転させた図に一致します。従ってこの法線角の和も３６０度となります。

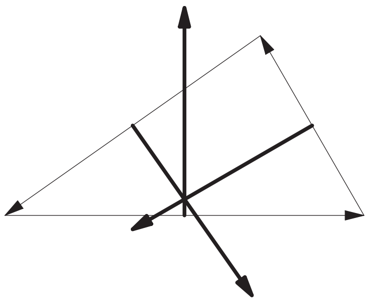

図４:図２の三角形の単位法線

$\Longrightarrow$

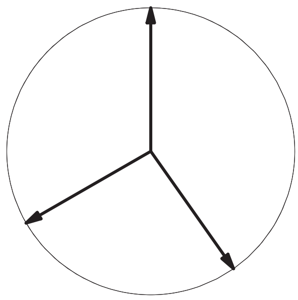

図５：図４の法線に対応する単位ベクトル（鉛筆）

実は、内角の和が１８０度であると言うことより、この法線角の和が３６０度であると言う方がより一般的で本質的な命題と言えます。この証明法は、通常に学校で習う証明法より、直感的に理解しやすいばかりではなく、現代数学の位相幾何学と言う最先端の分野に直結した証明法です。例えば、考えている三角形を n 角形に一般化したばあい、学校では、n 角形を $n-2$ 個の三角形に分割し、三角形の内角の和の定理を用いて、内角の和 $=(n-2)\times$ １８０度をもとめます（図６）。しかし、この鉛筆の回転の方法だと、法線角の和は n 角形でも３６０度なので、１８０度 $\times\ n=$(内角の和）＋３６０度となり、内角の和 $=(n-2)\times$ １８０度と言うことになります。さらに、自己交差を持った折れ線の場合、三角形分割の方法で計算することはなかなか大変そうですし、折れ線の内側外側と言う言い方も怪しくなります。しかし鉛筆を回転させることにより、簡単に法線角の和を計算できます。その場合、法線角の和は鉛筆の回転した数 $\times$ ３６０度となります。この鉛筆の回転した数は、回転数と呼ばれる量で、いわゆる位相不変量の一種です。例えば、図７の向き付けられた折れ線の回転数は２です[7]。

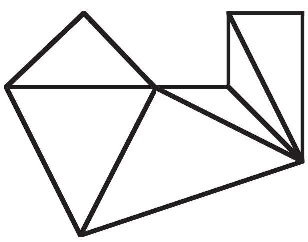

図６：８角形の内角の和の計算

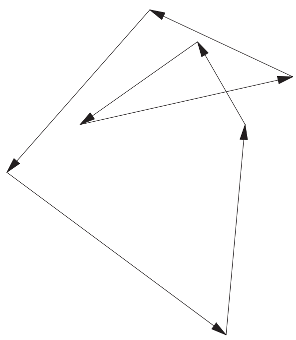

図７:回転数が２の閉じた有向折れ線

[7]反対向きに向きを付けると回転数は－２となります。

さて、話を平行線公理の研究の歴史にもどすと、１８世紀までに得られた、顕著な成果としてサッケーリ・ランベルト・ルジャンドルの研究があります。

サッケーリ　（１６６７ー１７３３）　イタリア人
ランベルト　（１７２８ー１７７７）　スイス人
ルジャンドル（１７５２ー１８３３）　フランス人

以下の２つの定理は、ルジャンドルの定理と呼ばれていますが、サッケリーやランベルトの研究にすでに現れているものです。数学では、最初に証明することが、業績として評価されることは言うまでも有りませんが、独立に証明された場合も、その人たちの業績として評価されます。

第一定理：平行線の公理がないと、三角形の内角の和は１８０度に等しいかまたは１８０度より小さくなる。

第二定理：内角の和が１８０度になる三角形が一つでもあればどの三角形の内角の和も１８０度になる。（言い換えると、「内角の和が１８０度より小さい三角形が一つでもあればどの三角形の内角の和も１８０度より小さくなる」）

サッケリーは、この結果で "平行線の公理が成り立たないならば矛盾がおきた" と結論づけました。大雑把に言えば三角形の内角の和は１８０度だからと言うことが頭から離れなかったからです。しかし、「三角形の内角の和は１８０度」と言う定理の証明には平行線の公理が使われているのでこれは矛盾ではありません。昔の話なので、真実は解りませんが、三角形の内角の和は１８０度と言う主張があまりにも当たり前のように見えて、本質を見失ったのかもしれません。つまり、あまりにもプロ的な感覚をもっていると時に、本質を見失うこともあるわけです。実は平行線の公理は他のユークリッド幾何学の公理からは導くことはできません。つまり、公理５は他の公理と独立で、ユークリッド幾何学の公理として、必要なものです。実際、公理５の成り立たない幾何学が別に存在することが１９世紀初頭に発見されました。いわゆる非ユークリッド幾何学の発見です。

3　非ユークリッド幾何学　（双曲幾何学）

非ユークリッド幾何学（双曲幾何学）は３人の数学者によって独立に発見されました。

ガウス（１７７７ー１８５５）ドイツ人
ヤノーシュ・ボヤイ（１８０２ー１８６０）ハンガリー人
ロバチェフスキー　（１７９３ー１８５６）ロシア人

の３人です。即ち：平行線公理のかわりに、直線上にない一点を通りその直線に平行な直線は一本ではない（２本以上存在する）としても矛盾はおこらないと言う事実を発見しました。この３人による、双曲幾何学発見の経緯は小説の題材としても非常に面白いものですが、私は小説家ではないので、ここでは詳しくは述べません。参考文献のなかでは、そのような話題にも若干触れられていますが、この市民講演のもう一人の講演者である鳴海先生に、和算小説と言

うジャンルから飛び出して数学歴史小説に守備範囲を広げていただくことを期待しましょう。ところで、この３人の発見した双曲幾何学はなかなか世の中（数学者の間でさえ）には受け入れられませんでした。それは、矛盾がないとはどのようにして示されるのかと言う素朴な疑問にどう答えるかと言うことにかかってきます。それが世の中に広く認められるようになったのは、１９世紀から２０世紀初頭にモデルの概念が確立された後のことです。２０世紀初頭に数学は、抽象化が進んだ為に、その基礎的部分に様々な疑問が出され、一種の危機的状況にありました。そのような時代の状況の中で、

ヒルベルト（１８６２－１９４３）　ドイツ人

はユークリッド幾何学の公理系の見直しを行い、 幾何学基礎論として発表されました。その内容は、ユークリッド幾何学には５つの公理系だけではなく、１９個の公理が必要であることを示したと同時に、ユークリッドの原論にある点、直線、平面などの言葉を　無定義元素としてそれらの関係を無定義関係としました。そして公理系とは幾種類かの無定義元素と幾種類かの無定義関係についての約束としたのです。簡単に言えば、幾何学において「点」とはなにか？と言う事は考えなこととする。点の代わりにりんごでも良い。また、「直線」とは何か？と言うことも考えないで、直線の代わりに枝でも良い。さらに、点が直線上にあるの代わりにりんごが枝にある（なっている）でも良く、これらの言葉の意味やイメージは問わないと言うものです。そして、通常我々があつかっている直線と点のイメージは一つのモデルを与えていると言うことです。それではなんでもありなのでは？と思われるかも知れません。事実、ヒルベルトは「なんでもあり」でも良い、形式主義の立場をとっていました。

ここで、幾何学の歴史を考えてみると、以下のように発達してきたと言えます。

１）経験的に知られた事実（各辺の長さの比が３：４：５の三角形は直角三角形であることは古代エジプト人は「測量」の必要性から知っていたと言われている）。

２）「なぜそうなのか？」と考え、公理系を作る（古代ギリシャ時代：ユークリッド幾何学の公理系）（抽象化）。

３）経験的に知られてた事実（定理や命題）を公理系から論証で導く（ピタゴラスの定理など）。

４）公理系が出来ると、一つのモデルに対して示した事実が、他のモデルにも適用できる（汎用性の確立）。

ヒルベルトが示したことは実数の公理系に矛盾がなければ、１９個に増やしたユークリッド幾何学の公理系は矛盾がないと言うことです。その為には、実数の公理系[8]を仮定して、ユークリッド幾何学の公理をみたすある具体的な「モデル」が矛盾を含まないことを示せば良いとしました。実際には、中学や高校で学ぶ、我々にとっておなじみの座標平面上の、点、直線、円、２直線の成す角、等が実数の公理を仮定するとき[9]１９個の公理を満たすことを確認することです（[5] 参照）。

非ユークリッド平面のモデル：ポアンカレ円板

ポアンカレ　（１８５４－１９１２）　フランス人

[8]数学科でも最近は実数の公理系を教えなくなっていると思いますが、和、積や大小関係がある事や、連続である事等です。

[9]通常、無意識のうちに仮定している性質です。

は半径１の円板の内部に非ユークリッド平面 (双曲平面) のモデルを構成しました。いま、平面上の円と円板との共通部分を考え、境界の円周と直交しているものを、円板モデルの「直線」としました。このようにして考えた円板をポアンカレ円板と呼びます。ヒルベルトの幾何学基礎論によると、なんでもありなので、円板を「平面」と呼んでも、境界の円周に直交する円を「直線」と呼んでも構わないわけです。

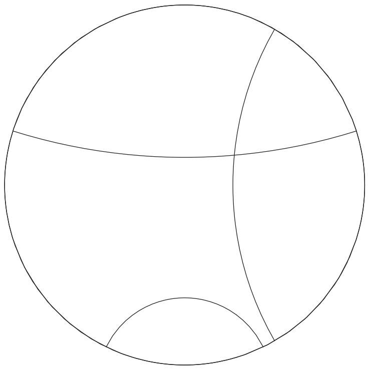

図８：ポアンカレ円板の「直線」

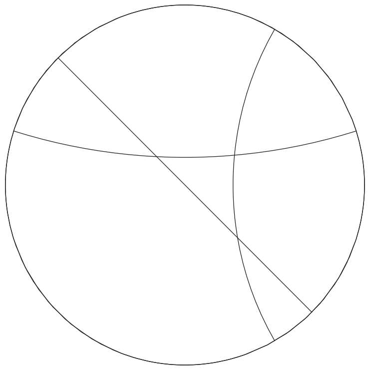

図９：ポアンカレ円板の「直線」で出来る三角形

ポアンカレ円板上で「直線」をこのように定義すると、ユークリッドの公理１〜４は満たしますことが知られています。図８では、ポアンカレ円板上の３本の「直線」が描かれています。今ここで、ポアンカレ円板上の２つの「直線」が平行であると言うことの定義をそれら２つの「直線」が円板上では交わらないことと定義します。そうすると、図８で下の方に描かれている「直線」とその他の２つの直線は平行です。しかし、それら２つの「直線」は交点を持ち、平行線公理は満たされないことがわかります。また、図９をみれば、三角形の内角の和は１８０度より小さいことも解ります。

4　ホロ円的幾何学

ポアンカレ円板をモデルとすると、前節のように、平行線公理を満たさない幾何学（双曲幾何学）が存在することがわかりましたが、この「直線」の定義はいくらヒルベルトの幾何学基礎論からなんでもありでも、すこし強引に感じます。実際には、ポアンカレは円板上に、リーマン計量と呼ばれる曲線の長さを計るある種の物差しを定め、その物差しで計った２点の間の長さを最小にする曲線が境界の円周に直交する円となるようにしました。

ポアンカレ円板の性質（もう少し詳しく）
ポアンカレが定めた、物差しで計った長さは、円板上のどんな２つの点の間でも計ることが出来るのですが、積分などの概念が必要になるので、ここでは述べません。ただし、特別な点どうしの間の長さは以下のように、割合簡単に計ることが出来ます。ユークリッド平面上の点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ と原点$\mathbf{0}$の距離は、ピタゴラスの定理から、

$$d_E(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

で与えられます。一方、ポアンカレが定めた、物差しによると、ポアンカレ円板での点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ と中心 (原点) $\mathbf{0}$の距離は

$$d_P(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) = \frac{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

で与えられます。ここで、点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ を境界の円周に近づけると、分母がどんどん小さくなり、分子は限りなく２に近づくので、$d_P(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$ はどんどん大きくなり、無限大に発散することがわかります。３次元ユークリッド空間内にいる我々の目から見ると、中心付近にある長さが一定の棒を、境界の円周に近づけると、その棒の長さはどんどん小さくなるように見えることを意味しています。すなわち、物体をどんどん遠ざけて行くと、その物体の大きさはどんどん小さくなるように見えると言う我々が通常持っている平面の感覚に近いことが納得できます。さらに、ポアンカレ円板の２本の「直線」の成す角[10]は、その「直線」をユークリッド平面として考えた２本の円の成す角と同じであることが知られています。　また、ポアンカレ円板上の「円」はユークリッド平面として見たときの円であることも知られています[11]。これまでの話で、ポアンカレ円板の大体の性質が理解できたかと思いますが、このように、普通の平面（ユークリッド平面）とはかなり違った性質を持つ事がわかりました。非ユークリッド平面と言われる所以です。さて、ここで、ユークリッド平面での直線の特徴を整理してみます。

ユークリッド平面内の直線の特徴

(１) ２点を結ぶ最短線である。
(２) 真っ直ぐである（速さが一定のとき加速度は零)。
(３) 円の半径を無限大にしたときの極限と思える。

ポアンカレ円板内で、ポアンカレが与えた「直線」の定義（円周と垂直に交わる円）は（１)、（２）の特徴を持った曲線を求めたものです。一方、（３）の特徴を持った曲線としてホロ円があります。境界の円周に接する円をホロ円[12]と呼びます（図１０)。実際、ポアンカレ円板内の

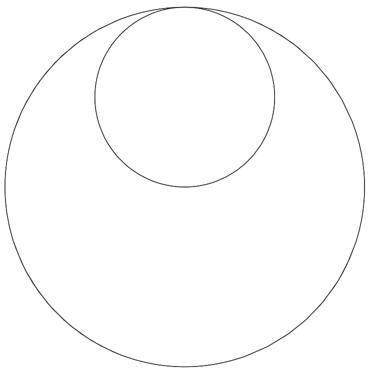

図１０：ホロ円

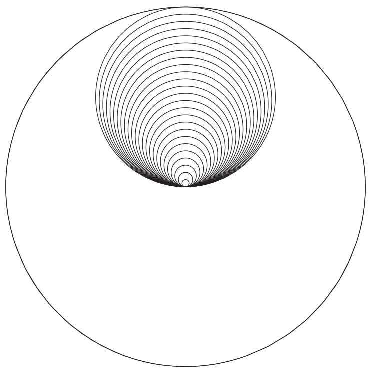

図１１：円の極限としてのホロ円

[10] ポアンカレ円板の直線は、ユークリッド平面内の円なので、それら２つの円の成す角は、交わる点でのそれぞれの接ベクトルの成す角と定めます。

[11] これらの事実は、ポアンカレ円板の性質やその上の円とか直線をきちんと、定義したり計算しないと示す事ができないので、ここでは事実のみを述べます。

円をその半径をどんどん大きくして行くと、ついには境界の円周に接してしまいます。ポアンカレ円板は円板の内部なので、円周に接した段階でもはや円ではなくなり、半径を無限大にした円の極限であると理解できます[13]（図１１）。
このように、ポアンカレ円板内には、２種類の直線の類似物が存在するわけです。一つは、円周と垂直に交わる円を「直線」と見なす場合で、その結果、双曲幾何のモデルが得られました。そこで、素朴な（アマチュア的）発想として、以下のような疑問が起こります。

ホロ円を直線と見なすとどのような幾何学が得られるのだろうか？

この疑問に関連して、以下のような事も考えられます：
（１）ユークリッドの公理は満たされているのか？
（２）平行はどのように定義するか？
（３）二つのホロ円の成す角はどのように定義するか？
　これらの、疑問に関して、すぐに解る事は以下の２つの命題です。

命題 ユークリッド幾何の公理１を満たさない: 任意の２点を通るホロ円はちょうど２本ある。

命題 境界の円周に同じ点で接するホロ円を平行と定義すると、平行線公理を満たす。

　証明は与えませんが、以下の図を見ていただければ、容易に理解できると思います。図１２

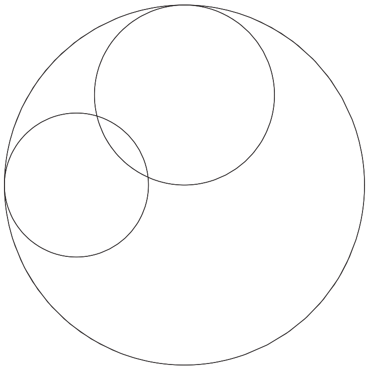

図１２：　公理１を満たさない

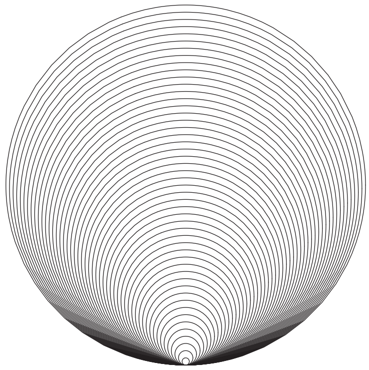

図１３：平行線公理を満たす

は２つのホロ円の交点が２個あります。逆に２点を持ってくると、このようにそこで交わるホロ円をちょうど２個描く事ができます。図１３は、境界の円周上の一点でその円周に接するホロ円の図です。このように半径を動かすと互いに交わらないけど、円板全体を覆うことがわかります。この事は、平行線公理を満たしていることを示しています。ホロ円は、直線の性質と円の性質両方の性質を持った両者の中間的な存在であると言うことが出来ます。このように、公理１を満たさないので、この幾何学も非ユークリッド幾何学の一種であることが解りますが、現代では、非ユークリッド幾何学と言っても、数学ではさして珍しいものでもないので、この

[12]「ホロ」(horo) と言う意味は時計に関係したものもしくは天球上をさすものの様です。ちょうど時計の針が指す点（もしくは、天球上の点）がホロ円と境界の円周との接点となっているから、そのように呼ぶのだと理解できます。当日は、そのような質問があったと思いますが、私は普段あまり、語源などには興味を持たないので、知りませんでした。不勉強ですみません。
[13]我々の世界は、円板の内部です、境界を含めた外部は我々の知り得ない世界だと思うことにしています。

ままでは、プロの数学者からは「それで？」と言う冷たい反応しか返ってこないものと思われます。そこで、平行線公理を満たすと言う事実に着目します。平行線公理こそがユークリッド幾何学をユークリッド幾何学ならしめていると思えるので、この幾何学はある意味でユークリッド幾何学もどきであると言えます。この幾何学をとりあえずホロ円的幾何学と呼びましょう。実際、２つのホロ円の法線角を以下のように定めてみます。いま、図１４のように２つのホロ円がポアンカレ円板上にあるとします。このとき、それぞれのホロ円が境界の円周と接する点を考え、図１５のようにポアンカレ円板の中心からその点を結ぶベクトル（鉛筆）を考えます。これらのベクトルをホロ円のホロ法線ベクトルと呼びます。この２本のホロ法線ベクトルのユークリッド幾何学の意味での角度を２つのホロ円の成すホロ法線角と定めます。このように定義すると、２つのホロ円が平行であることは、ホロ法線角が零度であると言うことに対応します。ただし、ホロ円は直線の性質と円の性質を両方持っているので、ホロ法線角が１８０度であっても２つのホロ円は平行ではありません。

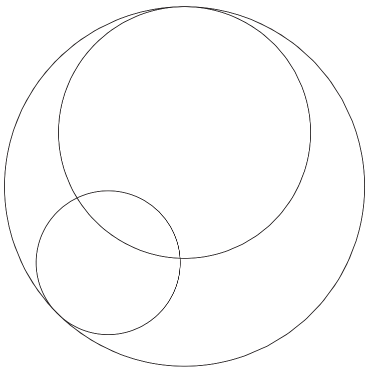

図１４：２つのホロ円

⇒

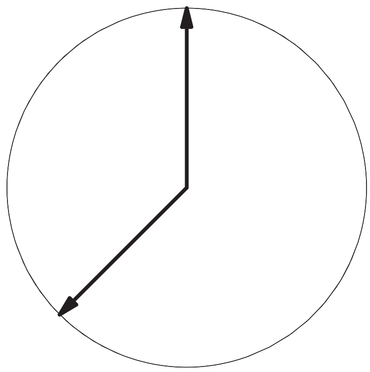

図１５：対応するホロ法線ベクトル

次に、図１６のように、３つのホロ円をポアンカレ円板上で考えてみます。すぐわかること

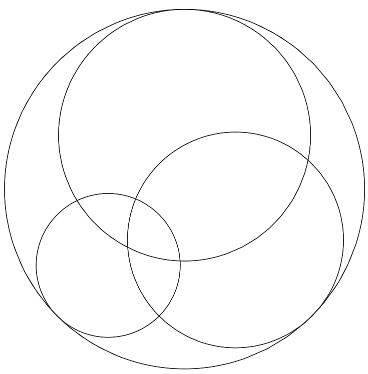

図１６：ホロ三角形

⇒

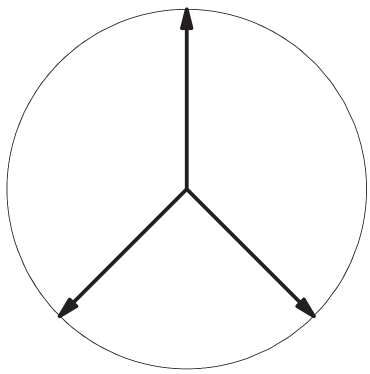

図１７：対応するホロ法線ベクトル

は、ユークリッド幾何学の公理１を満たさないので、三角形が４つできていると言うことです。この４つの三角形をすべて同等に扱うこともできますが、話が複雑になるので、真ん中に出来た凸三角形のみを考えます。この三角形を特徴付けるために、考えている３つのホロ円にたいして、それぞれホロ法線ベクトルを左側に見るように向きをつけます。このとき、ホロ法線ベ

クトルがどの辺でも三角形の内側を向いている三角形をここではホロ三角形[14]と呼びます。境界の円周に接する点を固定したまま３つのホロ円の半径を十分大きくする（平行なホロ円を取り直す）と必ず、このような三角形を作ることができるので、このような三角形を３つのホロ円のつくる、ホロ三角形と呼んで良いでしょう。いま、一つの辺を考えます。その上をホロ三角形の辺の向きに沿って点が動いても、ホロ法線ベクトルの方向は変わりませんが、次の辺に移る瞬間にホロ法線ベクトルの方向が変化します。このとき、定義からホロ法線ベクトルは常にホロ三角形の内側を向いています。また、ホロ三角形の上を点が動くとき、ホロ法線ベクトルは正の方向（時計と逆向きの回転方向）に回転します。そうすると、図１６、１７を見ればわかるように、ユークリッド平面の三角形の場合と同様に、点がホロ三角形上を一周すると、ホロ法線ベクトルは単位円周上を一回転することなり、結果的に以下の定理が成り立ちます。

定理 ホロ三角形のホロ法線角の和は３６０度である。

　このように、ホロ三角形のホロ法線角 (外角に対応する）の和は３６０度となり、ユークリッド幾何学と同じような性質を持つ事が解ります。内角＝１８０度 − 外角と定義すると、以下の系も成り立ちます。

系 ホロ三角形の内角の和は１８０度である。

　ただし、2つのホロ円の成す角が１８０度の場合でも、これらのホロ円は平行ではないので、内角が零となる場合もあり、ユークリッドの場合とは少し状況が違うこともわかります。いずれにせよ、ホロ円的幾何学は非ユークリッド幾何学ではあるのですが、ユークリッド的な性質をかなり強くもっていることが解ります。また、ホロ三角形の場合は、ホロ法線ベクトルの回転方向が正の方向に向いています（もちろんホロ円の向きをぎゃくにとると負の方向になります）が、ほかの三つの三角形では、向きがホロ円の向きと逆になる辺もあるので、回転方向がいろいろ変わります。この場合は、もう少し細かく調べる必要があります。また、このように考えると、ユークリッド平面上の閉じた有向折れ線と同じように閉じた有向ホロ折れ線も考えることができて、この場合も

定理 閉じた有向ホロ折れ線のホロ法線角の和 は ３６０度 × 回転数である。

と言う定理が成り立ちます。従って、ホロ法線角の和は位相不変量です。このように、ホロ法線角一つを取ってみても、色々と面白い事実がわかります。さらに、ヒルベルトが考えた１９個のユークリッド幾何学の公理系のうち、ホロ円的幾何学では、どれが成立し、どれが成立しないかを調べることも、興味深いことだと思われます。そのような事は、おそらく今までだれも手をつけたことがないと思われるので、もし、興味をもって調べてみれば数学研究の醍醐味を数学者以外の方でも味わうことが出来ると思います。通常、数学者が行っている研究は、ずっと複雑な計算や抽象的な議論を必要としますが、答えが知られていないと言う意味では、このような問題発想と多かれ少なかれ似た事をやっているのです[15]。

[14]正確には凸ホロ三角形です。

[15]大学院生の諸君には、たとえ、そんなに難しくない事でも、少なくとも他の人が考えた事がない事を修士論文として書く (それが、研究者としての喜びなのだから）ようにと勧めているつもりなのですが、あまりこれまで真意が伝わっていないようにも思えます

5　まとめ

最後に、この市民講演でお話したことをまとめると、以下のようになります。
(1) 幾何学は無定義述語、定義や公理を定めると定まります。それらは、矛盾さえ内包していなければなんでもありなのですが、実際には、「直線」を定義する場合のように、常に自然なと言う形容詞がついています。要するに、不自然な形で定義を定めても、豊富な幾何学的性質を生み出すことは出来ないと言う事です。
(2) ここでお話した、ポアンカレ円板（双曲平面）は、単に非ユークリッド幾何のモデルと言うだけではなく、他の、代表的な幾何学であるユークリッド幾何学や球面幾何学より、豊富な幾何学的内容を持っていると言えます。それを示している１つの例がホロ円的幾何学です。ここでは、これ以上は説明しませんでしたが、この双曲平面（空間）は単なる歴史上のモニュメントではなく、現在でも盛んに研究されている幾何学的対象です。
(3) 数学（他の分野でも？）では、このホロ円的幾何学のように、視点を変えることにより、素朴な発想からでも、最先端の研究を推進出来ることが解ります。なにも難しいことを考える必要はないのです。もちろん、研究成果として、論文として発表するには、それなりの飾り付け[16]が必要です。たとえば、このホロ円的幾何学の着想で私が書いた、論文としては[6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]等があります。とくに、[6] は、大学の１年程度の数学の知識があれば読み進めることが出来る論文で、話題も双曲平面上の曲線のみに限っているので、この市民講演の話題の直接的延長線上にあります。この論文で実験した結果を一般化して、さらに詳しく研究を進めたのが他の論文です[17]。もし興味がおありでしたら読んでみて下さい。基本的なアイデアは、この講演でお話したことで尽きています。このホロ円的幾何学の説明を通して、理解していただきたかったことは、数学の研究には、視点（発想）を変えることが必要であり、そのためには　素人（アマチュア）的発想もなかなか捨てた物ではないと言う事です。勿論、研究を継続的に推進するには、それだけでは不十分でプロ的発想も、大変重要であることは言うまでもありません。そして、何よりも、「この研究はどの分野にとって必要か」とか言うある種の使命感[18]よりも、むしろ、考えていて楽しい事が数学者の研究の最大の原動力であることを本日ご参加の皆様にご理解いただければ、この市民講演の目的は達成されたと思えます。

参考文献

[1] 岡部恒治著　マンガ幾何入門、　講談社ブルーバックス

[2] 寺阪英孝著　非ユークリッド幾何の世界、　講談社ブルーバックス

[3] 立花俊一著　非ユークリッド幾何のカラクリ、　アルキ

[4] 小林昭七著　ユークリッド幾何から現代幾何へ、　日本評論社

[5] H. クネーラー著　幾何学（上）、スプリンガー・フェアラーク東京

[16]いわゆる複雑な計算や抽象的な議論です。実はこの部分が数学が敬遠される要因だと思われます。
[17]実は、舞台裏を明かすと、ある事情から双曲平面上の曲線について計算してみたら、「ホロ円がなにか面白そうな性質を持っているらしい」と言うことに気がついたのが真相です。最初からホロ円を直線と見なすと言う発想をしたわけではありません。研究を進めているうちに気がついたのです。
[18]勿論、これも大変重要な動機付けではあります。

[6] S. Izumiya, D.-H. Pei, T. Sano and E. Torii, Evolutes of hyperbolic plane curves, Acta. Math. Sinica. **20** (2004), 543–550.

[7] S. Izumiya, D. Pei and T. Sano, *Singularities of hyperbolic Gauss maps*, Proc. the London Math. Soc. **86** (2003), 485–512.

[8] S. Izumiya, D. Pei and T. Sano, *Horospherical surfaces of curves in Hyperbolic space*, Publ. Math. Debrecen, **64** (2004), 1–13.

[9] S. Izumiya, D-H. Pei and M. Takahashi, *Singularities of evolutes of hypersurfaces in hyperbolic space*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, **47** (2004), 131–153.

[10] S. Izumiya, D. Pei, M. C. Romero-Fuster and M. Takahashi, *On the horospherical ridges of submanifolds of codimension 2 in Hyperbolic n-space*, Bull. Braz. Math. Soc. **35** (2) (2004), 177–198.

[11] S. Izumiya, D. Pei, M. C. Romero-Fuster and M. Takahashi, *Horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic n-space*, Journal of London Mathematical Society, **71** (2005), 779–800.

[12] S. Izumiya, D. Pei and M. C. Romero-Fuster, *The horospherical geometry of surfaces in Hyperbolic* 4*-space*, Israel Journal of Mathematics, **154** (2006), 361–379.

[13] S. Izumiya and M. C. Romero Fuster, *The horospherical Gauss-Bonnet type theorem in hyperbolic space*, Journal of Math. Soc. Japan, **58** (2006), 965–984.

[14] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, Horospherical flat surfaces in Hyperbolic space, Preprint (2007), http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp/literature/back/2007.html

[15] M. Buosi, S, Izumiya and M. A. Soares Ruas, *Total Absolute Horospherical curvature of Submanifolds in Hyperbolic Space*, in preparation.