

小野薫氏の井上賞受賞に寄せて

太田 啓史 (名古屋大学・多元数理)

北海道大学の小野薫さんが、この度「シンプレクティック幾何学の研究」により第23回(平成18年度)井上賞を受賞されました¹。おめでとうございます。この機会に一言お祝の言葉を、ということですので、末筆ながら少々書かせて頂くこととなりました。

小野さんは平成17年度日本数学会秋季賞を受賞されており、その折りに、数学的な業績内容は雑誌「数学」(第58巻2006年)の論説(p.113-p.132)として御自身により解説されています。また、数学会からの文章(p.183-p.184)及び深谷賢治さんによる業績紹介文(p.184-p.191)と、いずれもよく書かれた解説が既に世に出ていますので、この小文では、あまり詳しく数学的内容に触れる必要はないと思われまふ。ただ、深谷さんが上記の紹介文の注釈の中で「自分との共同研究を書くのは不自然であるので、これらについては述べない」と断われたため、小野さんの仕事の中でも特に重要であると思われる深谷-小野の研究については一切省略されています。その部分だけはあとで少し数学的な話を書かせて頂くことにします(興味のある方は小野さんによる「数学」の論説(第51巻1999年p.357-p.376)も併せて御覧頂ければと思います。)

まず、くだらないことだと言う方がおられるかもしれませんが、特に面識のない方は時折誤解される(実際筆者は何度か経験したことがある)場合もあり、大事なこともかもしれないので、この機会にお断りしておきますが、小野薫さんは男性です。

さて、小野さんは大学院生のころ、調和写像やラブラシアンの特ラムなどの研究もされていましたが、同時にシンプレクティック多様体への群作用の研究もいくつかされていきました。当時指導教官であられた服部晶夫先生もシンプレクティック多様体への群作用の研究をされていましたが、先生とは違うことをやろうと心掛けておられたようにお見受けします。小生が学部生か修士1年生くらいの時に受けた服部先生の講義(群作用の講義)では、よく講義中にお二人による質疑応答の議論が繰り広げられていたことを記憶しています。また当時、東大に滞在していたUCバークレイのA. Weinsteinが毎週1

¹ 授賞式は平成19年2月5日の予定ですが、この原稿を書いているのはまだ平成19年松の内であり、これが出版されるのが2月20日の予定だそうで、この状況でなんと表現するのが適切であるのか筆者にはよくわかりません。いろいろとむずかしい御時世であるようなので、このような注釈をつけさせて頂きました。

回シンプレクティック（ポアソン）幾何の講義を行っており，その内容は小野さんと杉山健一さんにより東大のセミナリーノートとしてまとめられています．1980年代後半の頃で，M. Gromov による擬正則写像の理論は既にありましたが，日本の中でどれだけ理解されていたかよくわかりません²．A. Floer の仕事は，一部うわさが伝わってきていたと思いますが，いくつかの出版前のプレプリントがまとめて入手できたのは，多分 Weinstein あたりから經由してきていたのだと思います（現在のようにアーカイブで電子的にプレプリントが容易に入手できる状況とは違い，当時大学院生にとっては，自分で直接手紙を書くか，誰かからまわってきたものをコピーしてうまく手に入れる，というのが普通でした．）助手をしておられた古田幹雄さんなどと一緒に，ゲージ理論の Floer コホモロジー，シンプレクティック幾何の Floer コホモロジーなどの話をちょこちょこ議論していたような気がしますが，直接擬正則写像や Floer コホモロジーで仕事をされていたわけではありませんでした．

その後，小野さんは東北大学の助手に赴任されました．ある時，小生の下宿に東北から電話がかかってきて，同変 Dirac 作用素の指数についてのお話を（多分それなりの時間）した覚えがあります．電話代が気にならないでもなかったのですが，それが D 論の内容でした．それからしばらくして，お茶の水大学に移られ，それと前後してボンのマックスプランク研究所に2年間滞在されました．恐らく東北時代からマックスプランク研究所滞在中にかけて，ゆったりとした時間の中で擬正則写像の理論や Floer コホモロジーをじっくりと勉強し，思索をめぐらせておられたのだと思います．実際，ある時，マックスプランクの小野さんからメールを（このあたりから電子メールが割に普通に使われ出した）もらいました．内容は，弱単調なシンプレクティック多様体の場合に Floer コホモロジーが定義できて，アーノルド予想が解けた，というものでした．これが有名な On the Arnol'd conjecture for weakly monotone symplectic manifolds. Invent. Math. 119 (1995), no. 3, 519–537. という論文です．これは，小野さんのシンプレクティック幾何の研究における大きなターニングポイントであったと思われます．

ここで，少し数学の話しに立ち入りましょう．解析力学において，与えられた（時間に依存した）ハミルトン関数に対し運動方程式はいつ周期解をもつか，持つなら周期解はどれだけ存在するか，という問題は，天体力学を例に出すまでもなく極めて基本的であり古典的です．これを閉シンプレクティック多様体上の問題として定式化し予想を立てたのは1960年代初頭 Arnold で，通称 Arnold 予想と呼ばれています．周期解の個数を下から評価する不変量の種類に応じて色々な種類の Arnold 予想が知られていますが，ここでは主に Betti 数の和によって下から評価する Betti 数版 Arnold 予想について述べます．Arnold 予想はその後のシンプレクティック幾何の発展に大きな影響を与えています．実際それを解く試みの中で，上に述べた Floer コホモロジー理論が生み出され

² 海外でもどうであったかよくわかりません．Y. Eliashberg から聞いた話しによりますと，当初 Arnold もあまり認めていなかったそうです．

たのでした。Conley-Zehnder あるいは Floer 自身などによって、いくつかの特別な多様体の場合に Arnold 予想は解決されていました。小野さんはその研究を進め、弱単調シンプレクティック多様体とよばれるクラスに対して Arnold 予想が正しいことを Floer コホモロジーを用いて証明したのです。また Lê Hồng Vân さんと共同で cup length 版 Arnold 予想の結果も得ています。擬正則曲線の理論を用いた方法で Arnold 予想をアタックするには、負多重曲線の問題という横断正則性に関わる大問題が存在していることは当時から認識されており、それを回避するという意味においては弱単調という条件は当時では最良のものでした。この負多重曲線の問題のために当時、擬正則曲線のモジュライ空間の基本類が一般には構成できず、モジュライ空間上の交叉理論を展開する上で大きな障害となっていました。そのため Floer コホモロジーや Gromov-Witten 不変量なども一般のシンプレクティック多様体に対して定義されていない状況でした。

そこで、小野さんは深谷賢治さんとの共同研究（これは 1994 年ケンブリッジの Newton 研究所での研究会期間中に始まったと聞いています）により、「倉西構造の理論」を創始し、見事に負多重曲線の問題を克服して、擬正則曲線のモジュライ空間の基本類を一般のシンプレクティック多様体に対して構成し、モジュライ空間上の交叉理論を可能ならしめました（独立に同時期 J. Li-G. Tian, Y. Ruan, K. Behrend などにより仮想基本類が構成されました。）その結果、一般のシンプレクティック多様体に対し Floer コホモロジーや Gromov-Witten 不変量が初めて厳密に構成されたこととなり、応用として一般のシンプレクティック多様体に対する Betti 数版 Arnold 予想が完全に解決されました（K. Fukaya and K. Ono, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant. *Topology* 38 (1999), no. 5, 933–1048.）彼らの研究は只に Arnold 予想という問題を解いただけではなく、その中で倉西構造の理論を構築したことはより基本的であり、その後の擬正則曲線のモジュライ理論の研究には不可欠の基礎概念となっています。これ（及び先の Lê Hồng Vân さんと共同研究である Floer-Novikov ホモロジーの研究）は、かねてからシンプレクティック幾何の懸案の問題であった C^1 級フラックス予想の解決（最近の小野さんの結果）の際にも基本的な役割りを果たしました。

以上は、境界のない閉リーマン面からシンプレクティック多様体への擬正則写像の理論に関するものでしたが、それを相対化した、則ち、境界付きリーマン面からラグランジアン境界条件をもつ擬正則写像のモジュライ空間の場合にも、倉西構造の理論はやはり基礎となります。しかし、絶対的な場合（閉リーマン面からの場合）には現れなかった新しい困難がいくつか生じます。そのためラグランジアン部分多様体の Floer コホモロジーは、倉西構造の理論により横断正則性の問題が解決されても、一般には定義されません。それはモジュライ空間のコンパクト化の際に現れる実余次元 1 の境界に、擬正則円盤の「バブル」に対応する成分が現れることに起因しており、これよりモジュライ空間の「コボルディズム類」は意味をなさなくなり、種々の付加データに依存した量となってしまいます。この問題に対して、小野さん、深谷賢治さん、Yong-Geun

Ohさんと小生とで共同研究(かれこれ10年以上経ってしまいました)を行っています,それは先の深谷さんの注釈に従い,ここではこれ以上触れませんが.

ただ,その時のエピソードを一つだけ紹介して終わりとします.深谷-小野が完成した直後の1996年夏に,当時ETHにいたH. HoferさんやE. Zehnderさんらが主催した研究会が,イタリア国境に近いスイスのアスコーナという保養地で合宿形式で行われました³.そこで小野さんと小生は,ラグランジアン境界条件をもつ擬正則写像のモジュライ空間で向き付け不可能な例を作る計算をひたすらやっていました.折しも気候は爽やかで素晴らしく,風光明媚なこの地でこのような計算をやっている場合ではなかったのかもしれない.絶対的な場合はいつでも標準的な向きが入りますが,相対的な場合は必ずしもそうではありません.休憩時間や,食事中も色々な例を作っては計算をし,「できたできた」と喜んでいたりかと思うと,計算違いをしていてやはりできていなかった,ということを知り返していました.それを見ていたYong-Geun Ohさんは多分呆ていたと思います.深谷さんは,さる事情があって,向き付け可能であって欲しい,という立場でした.ある夜,小生は小野さんと同室であったため,部屋に帰っても反例作りの続きとなりました.こういう符号(偶奇)の計算は,アルコールが入っては危険です.深谷さんも我々の部屋にこられて議論をしていました.随分と計算や議論を続けました.どうも向き付け可能派にとっては形勢はかなり厳しい状況になってきました.向き付け可能派の方は,あげくの果てに,冗談で「う~む,ここは2で割ってはいけない,これは二項定理が間違っているのではないか.ニュートンだ.もはや飲まずにはやってられませんね」といって,部屋にあった赤い色水を飲み始められました.その後,小生が泡のでる色水を飲み始めるのにさして時間はかからなかったと思います.しかし,小野さんだけは最後まで(この夜は)飲まれなかったのではなかったかと思います.すみませんでした.結局,アスコーナでは決定的な例は作れず仕舞いでしたが,その後向き付け不可能な例は無事できました.アスコーナからチューリッヒに向かう列車の中で,アルプスを見ながら気がつけば議論していたことを思い出します.

今後のさらなる御活躍をお祈りしつつ筆をおきたいと思います.

³ ここでラグランジアン交叉のFloerコホモロジーに関する我々の共同研究が始まりましたが,EliashbergとHoferも,歩きながら接触ホモロジーの議論をしているのをよく見かけました.ともに始まったばかりでした.