ナッシュのゲーム理論
ー正義と競争の数学的関係ー

半沢英一

２００６年9月１８日

概 要

本稿は私が上記期日に大阪市立大で行った日本数学会市民講演の記録です．まとめるにあたって実際に行われた講演の雰囲気を残すことに留意しました．ただし不正確な点は修正し，冗長な表現は簡略化し，舌足らずのところは補足しました．また，説明を加えたほうが良いと思われた事項には脚注をほどこし，当日配ったレジュメより参考文献を増やしました．講演の録画が日本数学会のホームページで公開されていることもお断りしておきます．

1　ナッシュの数学との出会い

ご紹介されていませんが半沢でございます（笑）[1]．

私は脱線数学者で，日本数学会の会費も滞納しては請求され納入することを繰り返しています．それで現在はたして日本数学会会員なのか，それともすでに除名されているのか，自分でもさだかではありません[2]．

そういう人間が日本数学会の市民講演で話をさせていただいて良いのか，自分でも疑問に思わざるをえません．

しかし「ナッシュのゲーム理論」について昔から話したかったことがあり，お声がかかったときせっかくの機会だからと思い，お受けすることにしました[3]．

また私の前に釜江哲朗先生が非常にまとまってわかりやすい講演をなされましたが[4]，それに比べ私の話はまとまりが悪くなると思われます．そういったこともどうぞご容赦いただくよう前もってお願いしておきます．

[1]司会の吉田雅通さんが，レジュメの紹介などに気をつかわれ，うっかり講演者の紹介をされなかったのでこういう挨拶になりました．吉田さんにはすぐ司会席から「失礼しました．金沢大学の半沢先生です」とフォローしていただきました．吉田さんにはいろいろお世話をかけ，おかげ様で講演が多くの方に来ていただく盛会になったことを感謝します．

[2]この講演後ほどなく，日本数学会から二年半ほど会費を滞納しているという通知をいただき，あわてて納入しました．

[3]講演の声をかけてくれたのは，大学の先輩で大阪市立大の今吉洋一さんです．このような講演をする機会を与えていただいたことに感謝します．

[4]釜江先生は２００５年にノーベル経済学賞を受賞したゲームの理論の専門家オーマン氏の業績を解説されました．

さて今日の講演は「ナッシュのゲーム理論ー正義と競争の数学的関係」というタイトルでさせていただきます．

「ナッシュ」というと，オーストラリアの名優ラッセル・クロウさんが天才数学者ジョン・ナッシュを，美人女優ジェニファー・コネリーさんがその奥さんを演じたアカデミー賞受賞映画,「ビューティフル・マインド」をご覧になった方も多いと思います．

映画の影響というものは怖ろしいもので，今では数学に特に縁のない一般の人からさえ,「ナッシュ」という名前に「ああ，あのナッシュね」という反応が帰って来ることがあります．これは私がナッシュの論文を苦労しながら読んだ学生時代には，およそ考えられないことでした．

去年（２００５）亡くなられた，東北大学で私の指導教官であった小竹武先生は，ナッシュ先生[5]が統合失調症になって退職された後のＭＩＴに奉職されたことがある方です[6]．小竹先生は偏微分方程式の専門家で[7]，ナッシュ先生の偏微分方程式論における大結果「自己共役放物型方程式の解のヘルダー連続性」に深い感銘を受けられたようで,「ものすごい結果だ」と感嘆しておられました．

それで小竹先生は大学院に入ったばかりの私に，ナッシュのもう一つの大論文「リーマン多様体の埋め込み問題」を読むことを奨められました．そこで私は大学院修士一年のときにその論文を汗水たらして読みました．それが私のナッシュの数学との出会いだったわけです．

2　リーマン多様体の埋め込み問題

この「リーマン多様体の埋め込み問題」という論文は，ナッシュが書いた最長の論文であり，またナッシュ以外にこのような論文を書ける人が長い数学史を見てもいそうもないことで，まさにナッシュの代表作と言えるものです．気がついた方がどのくらいおられるか知りませんが，映画「ビューティフル・マインド」でも，この論文のことがちらりと出てくるシーンがありました．

この論文は難解なものですが，そこでの直接の結果よりもそこで使われた方法,「ナッシュの陰関数定理」とか「ナッシュ・モーザーの陰関数定理」と呼ばれるものの方が重要です．ナッシュ先生ご自身も，この論文の中で「この方法がいかに多くの結果をもたらすか時間が示すだろう」と豪語されています．実際に現代数学の中で「ナッシュの陰関数定理」は強力な標準的方法

---

[5]講演でもこの記録でも「ナッシュ」と「ナッシュ先生」が入れ混じっています．呼び捨てにしている場合には，すでに歴史上の人物になっているという意味でそうさせてもらっています．一層の敬意が込められていることは言うまでもありません．

[6]講演では同時期に奉職されていたというように言ってしまったのですが，講演を聴いていた大学の同級生で，大学院も小竹先生のところで同門だった大阪大の小松玄君から，ナッシュと小竹先生はＭＩＴで入れ違いのはずだと私の思い違いを指摘されたので修正しておきます．

[7]小竹・ナラシムハンの定理など有名な仕事を残されました．

と認識されるようになりました．私自身もこの方法である数理物理の問題を解かせてもらいました［1］．

ただしこの「リーマン多様体の埋め込み問題」は，その結果や方法が数学上の巨大な意味があったにしても，一般大衆向きの話ではないので，この論文が一般大衆の眼にふれることは，人類が滅亡するときまでないだろうと，若いころの私は確信していました．

ところが，アカデミー賞映画の影響とは怖ろしいもので，ナッシュの名前が一般の人にも知られるようになりました．そしてプリンストン大学がナッシュの選集をまとめ，シュプリンガー・フェアラーク東京さんがその選集の翻訳『ナッシュは何を見たか』を出版されました［2］.「リーマン多様体の埋め込み問題」もその中に入っています．この訳書はだいぶ売れたようで，ご覧になった方も多いと思われます．

この本の数学部分の翻訳は落合卓四郎先生が担当されたのですが，落合先生は「リーマン多様体の埋め込み問題」の訳出にあたって，私の意見を求められました[8]．またこの論文の意義についての解説を書くようにとも言われました．その私の解説が『ナッシュは何を見たか』に載っていますので，機会があったらご笑覧ください［3］．

ともあれナッシュの「リーマン多様体の埋め込み問題」が一般大衆向けの本に載ることになりました．私がそれを苦労して読んだ若いときには思いもよらなかったことです．人間長生きしているといろいろ面白いことに出会うものだと感銘しました．

3　ナッシュのゲーム理論の哲学的性格

ところで私は「リーマン多様体の埋め込み問題」を読んでいたころ，ナッシュという人に，すごい人がいるものだなあと強い興味をいだきました．そこで他にどんな仕事をしているのかなと思い，ナッシュが書いた他の論文もあらかた探し出して読みました．その中でナッシュが，ゲーム理論についても基本的な仕事をしていることを知りました[9]．

そのナッシュのゲーム理論の仕事は，処女論文の「２人交渉ゲーム」（１９５０）[10]，学位論文であり１９９４年ノーベル経済学賞の対象となった「ｎ人非協力ゲーム」（１９５０，１９５１）[11]，およびその両者を結びつけた１

[8] 私は落合先生と特に面識はなかったので，この通読した人が世界でも多くはないと思われる論文を，日本で一応読んだのは私ということに一部でなっているのかも知れません．

[9] 面白いことに私にナッシュを紹介してくれた小竹武先生も，ナッシュがゲーム理論の仕事をしていることをご存じありませんでした．なおナッシュには他に代数幾何学の分野にも卓越した業績があります．

[10] 論文の原タイトルは「交渉問題」ですが，本講演ではその内容により「２人交渉ゲーム」と呼ぶことにしました．

[11] １９５０年論文は短い速報で原タイトルは「ｎ人ゲームの均衡点」，１９５１年論文は学位論文で原タイトルは「非協力ゲーム」です．本講演では，まとめて「ｎ人非協力ゲーム」と呼ぶことにしました．

９５３年論文の三つに大別できます[12]．すべて『ナッシュは何を見たか』に収録されています．

ところで私は，これらナッシュのゲーム理論の論文を読んだとき，ナッシュが単に経済学の技術的基礎付けとしてゲームの理論を考えていただけではなく，より深く，人間や社会の結合の本質を考えようとしているのではないかという印象を受けました．

それが私の個人的な思いこみではないことを示すために，ある人の証言を紹介したいと思います．

その人とは，現在でも人権問題などに積極的にかかわっておられる，高名な国際政治学者・武者小路公秀先生です[13]．

私は武者小路先生が，１９６５年の『数学セミナー』誌上に「ジョン・ナッシュのこと」というエッセイを書かれていることを，昔見つけました［4］．

それによると，武者小路先生がアメリカに留学されたとき，その宿舎の隣の宿舎に，すごい美人と変な人が住んでいたそうです．

その美人というのがナッシュ夫人でした．昔の写真を見ると，映画「ビューティフル・マインド」でナッシュ夫人を演じたジェニファー・コネリーさんに，勝るとも劣らないほどの美人です．その美人といっしょに住んでいた変な人というのが統合失調症をすでに発病していたナッシュ先生だったわけです．

それで武者小路先生は，これが有名なナッシュかというわけで，かなりナッシュ先生と話をされたようです．

ナッシュ先生は「私は，南米人ではない女性を妻にすることはできるが，私の妻が南米人でないようにすることはできない」などと，人生の非交換性に悩んでいたというのです[14]．そんなことを悩んでもしょうがないと言われるかもしれませんが，それが天才の天才たるゆえんでしょうか．

それはともかく武者小路先生はそのエッセイで，

> いろいろな話の中で，私は，彼が数学者でなければ直面しないであろう恐怖にとりつかれていることに気づいた．··· パスカルが無限大と無限小の前にめまいを感じたように，ジョン・ナッシュはゲーム論のもつ哲学的な帰結にたどりつかざるをえなかったのであろう．

と書かれているのです．

---

[12] １９５３年論文のタイトルは「２人協力ゲーム」ですが，内容にそぐわずその意義を矮小化しかねないように思われますので，本講演では「１９５３年論文」で通しました．

[13] 講演では「むしゃのこうじきみひで」と発音したのですが，武者小路先生と交流がある部落解放同盟・狭山闘争本部の安田聡さんに聞いたところ「むしゃこうじきんひで」が正しいとのことでした．

[14] 講演ではナッシュ先生の文句を「南米人を妻にしたのであって妻を南米人にしたのではない」というように引用したのですが，本講演の後で『数学セミナー』の同記事を探して読んだ小松玄君（脚注６参照）から不正確だと指摘されたので，正確な引用になおしておきます．なおシルヴィア・ナサーさんの『ビューティフル・マインド』［5］によれば，ナッシュ夫人の出身国はエルサルヴァドルなので，「南米人」はおかしく「中米人」が正しいはずです．おそらくナッシュ先生が「ラテンアメリカ人」（中南米人）とされたのを武者小路先生が「南米人」と「誤訳」されたのだと思います．

4　本講演の目標

しかし武者小路先生の証言に頼らなくとも，ナッシュのゲーム理論の哲学的な性格は，１９５０年の「２人交渉ゲーム」や１９５０～５１年の「ｎ人非協力ゲーム」の理論だけでなく，１９５３年論文まで見れば明らかなことだと私には思われます．

なぜなら「２人交渉ゲーム」では，一組の「高度に合理的なプレイヤー」がさまざまな取引を行うとき，その取引が公正で合理的であればどういう結果になるべきかが議論されています．この理論は「公正さ」と「合理性」をあつかうことで，この講演のサブタイトルにある「正義」とも関係するものです．

一方「ｎ人非協力ゲーム」では，任意多数のプレイヤーが，何の情報交換も協力も行わずに利害を争うときに，それでもそれらプレイヤーたちが落ち着く決着のあることが主張されています．当然ながらその決着は人間的正義とはかけはなれた動物的なものとなります．

そしてナッシュはこの性格がまったくちがう二つの理論が結びつくことを１９５３年論文で示しました．ナッシュの処女論文である「２人交渉ゲーム」も，１９９４年ノーベル経済学賞の対象となった「ｎ人非協力ゲーム」も，優れた仕事には違いありません．しかし私には真にナッシュの天才としての凄味を示すものはこの１９５３年論文だと思われるのです．

また，この結果はある意味では，本公演のサブタイトルで掲げた「正義と競争の数学的関係」に原理的な示唆を与え，単に数学の結果であることを超えた意義を持つとも思われるのです．

しかしこの１９５３年論文の意義については，ナッシュ先生自身があまり強調されなかったせいかもしれませんが，その意義が語られた文章を管見では知りません．映画「ビューティフル・マインド」が造られるきっかけになったシルヴィア・ナサーさんのすぐれた評伝『ビューティフル・マインド』でも，また『ナッシュは何を見たか』における編者クーンさんの解説でも，「２人交渉ゲーム」や「ｎ人非協力ゲーム」の意義についてはかなりの紙幅がついやされていますが，１９５３年論文の意義については語られていません．

私はそのような状況をずっと不満に思ってきました．それがこの講演をお引き受けした主な理由です．私は，ナッシュのゲーム理論を「２人交渉ゲーム」や「ｎ人非協力ゲーム」だけでなく，１９５３年論文の意義までわかりやすく解説したいと思ったのです．

以上のような目的意識のもとに，本講演ではナッシュのゲーム理論全体を

1. ｎ人非協力ゲームの理論
2. ２人交渉ゲームの理論
3. １９５３年論文

の順に解説していきます．

なお本講演はナッシュのゲーム理論の意義を解説することが目的なので，時間の制約上，数学の技術的細部には立ち入れないと思います．興味を持たれた方は『ナッシュは何を見たか』のナッシュの原論文なり，ゲーム理論の教科書などを参照していただければと思います[15]．

5　デートのトラブル

さて話をわかりやすくするために，ゲーム理論の「ゲーム」状況を，一般的なものでなく，一つの具体例に限定して議論を進めていきたいと思います．それは「デートのトラブル」という状況です．

まずゲームのプレイヤーは男性のＡさんと女性のＢさんの二人とします．

このＡさんとＢさんは恋人同士だとします．仲はよいのですが，趣味が完全に同じというわけではありません．それでデートの場所をめぐっていつも言い争いになります．Ａさんは物静かな性格で美術館に行きたいと言います．Ｂさんは活発な性格で格闘技を見に行きたいと言います．

ここでＡさんとＢさんには「美術館に行く」と「格闘技を見に行く」という二つの選択肢があることになります．ゲーム理論ではこれらの選択肢は「純粋戦略」と呼ばれます．これらをそれぞれ「美」また「格」と略記することにしましょう．

そうすると二人の戦略の組み合わせは (美, 美)，(美, 格)，(格, 美),(格, 格) の４通りということになります．カッコ内の前の成分がＡさんの戦略，後の成分がＢさんの戦略を表すとしています．例えば (美, 格) はＡさんが美術館へ行きＢさんが格闘技を見に行ったことを意味します．

このとき各々の組み合わせに対し，ＡさんとＢさんの満足度，ゲーム理論の言葉で言えば「利得」が決まるとします．ここではＡさんの利得を f として

$$f(\text{美},\text{美}) = 2, f(\text{美},\text{格}) = -1, f(\text{格},\text{美}) = -1, f(\text{格},\text{格}) = 1$$

またＢさんの利得を g として

$$\mathrm{g}\ (\text{美},\text{美}) = 1, g(\text{美},\text{格}) = -1, g(\text{格},\text{美}) = -1, g(\text{格},\text{格}) = 2$$

ということにします．

おたがいに譲らず別々の場所に行くことになったとすると，それではデートにならないので評価はすべて -1 とします．二人とも相手の希望場所に行くという組み合わせはナンセンスですが，それも -1 としておきます．相手が自分に合わせてくれたときの満足度が最大の 2 で，自分が相手に合わせたときの満足度が，最大でないにせよ一応デートができたということで 1 ということは自然だと思います

これが「デートのトラブル」という言葉でわれわれが考える状況です．

[15] 例えば［6］にはナッシュの上記３結果がすべて解説されています．

6　戦略の混合拡大

さてゲーム理論では創始者のフォン・ノイマン以来，上記のような「純粋戦略」だけでは数学的取り扱いができないので,「純粋戦略」を「混合戦略」に拡大して考えることを行います.

Ａさんの混合戦略とは，Ｂさんとのデートの場所を決めるかけひきで，どのぐらいの割合で自分の行きたい美術館を主張し，どのぐらいの割合でＢさんの希望に妥協して格闘技を見に行くかという「割合の選択」のことです.

美術館に行くことを主張する割合は確率で，0 から 1 の間の数 p で表されます．このとき格闘技を見に行くことに妥協する割合の確率は必然的に $1-p$ となります．このようなＡさんの混合戦略を

$$p\,\text{美} + (1-p)\,\text{格}$$

で表すことにします．$p = 1$ のときは「美」の純粋戦略，$p = 0$ のときは「格」の純粋戦略になることにご注意ください.

同様にＢさんが $1-q$ の割合で美術館に行く妥協をし，q の割合で自分の希望通り格闘技を見に行くことを主張する混合戦略は

$$(1-q)\,\text{美} + q\,\text{格}$$

で表されます.

この混合戦略という考えはそれほど抽象的なものではなく，日常でも見られることです.

かって『週間ポスト』で，王さん長島さん金田さんの鼎談を見たことがあります．その中で王さんと長島さんがしきりに４００勝投手金田さんをおだてていました．どういう風におだてたかというと，金田さんのピッチングの組み立てはカーブ，カーブ，ストライクのワンパターンなのに，それでも打てなかったというものです．これは「恐怖の純粋戦略」というべきものでしょう．しかし金田さんほどのピッチャーでなければ，ときどきピッチングの組み立てを変えなければなりません．つまり混合戦略をとらねばならないということです．こういう例からも混合戦略が意外と具体的な考えであることがわかっていただけると思います.

7　利得の混合拡大

さて戦略を混合拡大したことによって，ＡさんとＢさんが戦略を選択する組み合わせは（美，格）のような純粋戦略のペアではなく

$$(p\,\text{美} + (1-p)\,\text{格}, (1-q)\,\text{美} + q\,\text{格})$$

という混合戦略のペアで表されます．そこでこのときのＡさんとＢさんの利得がどうなるかを決定しておく必要があります.

少し思考実験をしてみます．もしＡさんの戦略だけが混合拡大され，Ｂさんが純粋戦略「美」をとったとすると，Ａさんの利得

$$f(p\,\text{美}+(1-p)\,\text{格},\text{美})$$

は，確率 p で純粋戦略のペア（美，美）が，確率 $(1-p)$ で純粋戦略のペア（美，格）が現れるときのＡさんの利得ですから，それらの期待値と考えて

$$pf(\text{美},\text{美})+(1-p)f(\text{格},\text{美})$$

とするのが自然です．つまり「分配法則」が成立することになります．これはＢさんの方だけ混合拡大したときも同じことになります．

そうだとすると問題の

$$f(p\,\text{美}+(1-p)\,\text{格},(1-q)\,\text{美}+q\,\text{格})$$

の値は「分配法則」を二度使って得られる

$$p(1-q)f(\text{美},\text{美})+pqf(\text{美},\text{格})+(1-p)(1-q)f(\text{格},\text{美})+(1-p)qf(\text{格},\text{格})$$

となります．

この式に純粋戦略のペアに対して与えられた $f(\text{美},\text{美})=2$ といった値を入れることによって，混合戦略のペアに対するＡさんの利得が得られます．同様にＢさんの利得も得られます．

こうして

1. $f(p,q)=f(p\,\text{美}+(1-p)\,\text{格},(1-q)\,\text{美}+q\,\text{格})$
2. $g(p,q)=g(p\,\text{美}+(1-p)\,\text{格},(1-q)\,\text{美}+q\,\text{格})$

という略記を採用して

1. $f(p,q)=-5pq+3p+2q-1$
2. $g(p,q)=-5pq+2p+3q-1$

という結果が簡単な計算から得られます．

8　ナッシュ均衡解

このように混合拡大されたゲーム論的状況において，その合理的決着はどのようなものでしょうか．

ナッシュはまずプレイヤーたちが，情報交換や協力をまったく行わず，ひたすら自己の世界に閉じこもったまま自己の利益を追求する場合を考えました．

そのときの決着 (p_0,q_0) があったとします．各プレイヤーはその結果 $f(p_0,q_0)$，$g(p_0,q_0)$ を得ます．さてこの (p_0,q_0) が決着であったとすれば，各プレイヤー

はそこからの「抜け駆け」はできないはずです．つまり相手が戦略を変えないのに自分だけ戦略を変えて自分の利得をあげることはできないはずです．このことを式で書けば

1. 任意の $p \in [0,1]$ について $f(p_0, q_0) \geq f(p, q_0)$
2. 任意の $q \in [0,1]$ について $g(p_0, q_0) \geq g(p_0, q)$

となります．

ナッシュは上のような (p_0, q_0) を非協力ゲームの解と考えました．このような解は今日「ナッシュ均衡解」と呼ばれています．

ナッシュは１９５０〜１９５１年の「ｎ人非協力ゲーム」において,「デートのトラブル」だけでなく，混合拡大されたｎ人プレイヤーのゲーム一般について，ナッシュ均衡解が少なくとも一つは存在することを示しました[16]．

この理論は今日のゲーム理論の基礎を与えた結果と見なされ，１９９４年度のノーベル経済学賞が与えられたことは先に述べたとおりです．

9 「デートのトラブル」のナッシュ均衡解

では「デートのトラブル」にはどんなナッシュ均衡解があるかというと，そこには $(1,0)$，$(0,1)$，$(3/5, 3/5)$ の三つのナッシュ均衡解があることがわかります．

それらの見つけ方や，それらが確かにナッシュ均衡解であることの確認は難しくありませんが，ここでは省略させてもらいます．ただし上で得られたナッシュ均衡解の意味については少し考えてみます．

まず $(1,0)$ ですが，これはもとの定義に戻れば (1 美 + 0 格, 1 美 + 0 格) すなわち (美, 美) を表します．すなわち常に男のＡさんの希望が通り，女のＢさんがそれに従うという，男に都合の良い決着です.「亭主関白均衡解」とでも呼ばれるべきものです．同様に $(0,1)$ は (格, 格) で常にＢさんの希望にＡさんが従うことを意味し「かかあ天下均衡解」とでも呼ばれるべきものです．

これらはナッシュ均衡解ですから，一回そこに陥ると単独でそこから抜け出すことはできません．

この結果は男女関係で最初に主導権をとることの重要性を，私たちに教えてくれているように思われます．

数学は実生活においては役に立たないものだと言われています．昔ある人が，数学で役に立つのは３角形の１辺の長さが他の２辺の長さの和より短いという定理が散歩のときに役に立つぐらいだが，そんなことは犬でも知っていると言ったことがあります．しかしここでのナッシュ均衡解による主導権の大切さの認識は，３角形の辺の長さの知識よりは実生活において役に立つ

[16]ナッシュは，１９５０年の速報論文では角谷の不動点定理を使い，１９５１年の学位論文ではブラウワーの不動点定理を使って証明しています．

のではないでしょうか．ご参考にしていただければ幸いです（笑いがとれなかったので仕方がないから一人で笑う）．

最後の $(3/5, 3/5)$ は，$((3/5)$ 美 $+ (2/5)$ 格$, (2/5)$ 美 $+ (3/5)$ 格$)$ です．つまりＡさんもＢさんも３対２の割合で自己主張を行うということで，これは「互角の夫婦げんか均衡解」と呼ばれるべきものでしょう．

10　ナッシュ均衡解の非人間性

さてナッシュ均衡解は，情報交換も協力もない決着なので，動物的な決着といえます．実際に動物生態学の世界では，ナッシュ均衡解の概念が使われています[17]．それが人間的な決着であることは期待できません．

「デートのトラブル」における三つの均衡解にしても人間的決着とはとても言えないものです．

男女両性の平等は１９４８年の国連総会で採択された世界人権宣言にも記されており，現在では人類の基本的倫理原則のはずです．したがって $(1, 0)$ や $(0, 1)$ は，個別のカップルが双方納得の上で「亭主関白」や「かかあ天下」になるのは勝手ですが，一般的な解決として認めるわけにはいきません．

また $(3/5, 3/5)$ では，両性の平等こそ守られていますが，恒常的な「夫婦げんか」が行われるので，これも人間的な決着とは思われません．

さらにこの均衡解における両者の利得は

$$f(3/5, 3/5) = g(3/5, 3/5) = 1/5$$

となります．しかしナッシュ均衡解でない $(1/2, 1/2)$ では両者の利得は

$$f(1/2, 1/2) = g(1/2, 1/2) = 1/4$$

となり，ナッシュ均衡解 $(3/5, 3/5)$ よりも増えます．だからナッシュ均衡解 $(3/5, 3/5)$ は「十分な合理性」も持っていないと言えるのです．

11　「デートのトラブル」の実現可能集合

そこで「デートのトラブル」の人間的解決を考えてみましょう．

まず混合拡大した「デートのトラブル」で，Ａさんの利得 u とＢさんの利得 v のペアで実現可能なペアの集合

$$S = \{(u, v); u = f(p, q), v = g(p, q), 0 \le p \le 1, 0 \le q \le 1\}$$

を考えます．ここでの (u, v) は戦略のペアではなく利得のペアであることにご注意ください．

[17] 例えば［７］に，寄生蜂が寄主に卵を産み付け自己の子孫を残す争いにおいて，ナッシュ均衡解に対応する性比で卵を産み付けることが説明されています．

この「デートのトラブル」の実現可能集合 S は uv 平面で

$$5u^2+5v^2-10uv-2u-2v+1 \geq 0, 3u-2v+1 \geq 0, 2u-3v+1 \leq 0$$

で表されるツバメの尾形の領域になります．このことは簡単な大学入試程度のことですが[18]，ここでは証明を省略させてもらいます.

ツバメの尾の端に,「亭主関白均衡解」$(1,0)$ と「かかあ天下均衡解」$(0,1)$ におけるＡさんとＢさんの利得のペア $(2,1)$ と $(1,2)$ が，また尾のくぼみの底点に，先に注意した戦略のペア $(1/2,1/2)$ に対応する利得のペア $(1/4,1/4)$ が現れることに注意してください．また「互角の夫婦げんか均衡解」$(3/5,3/5)$ に対応する利得のペア $(1/5,1/5)$ は S の内部に現れています.

12　実現可能集合の共同混合拡大

さてこの実現可能集合 S をプレイヤーの協力が考察できるように拡大します.

二人のプレイヤーが実現可能集合に属するペアを選択できると考えるのは自然です．例えば $(1/4,1/4)$ を選択できます.「互角の夫婦げんか」均衡解にともなう利得 $(1/5,1/5)$ に比べれば双方にとって得なのですが，プレイヤーの協力を考えるためにはまだ狭すぎます.

なぜなら常識的に考えて,「デートのトラブル」の状況でもっとも人間的な解決は，最初は二人で美術館に行き次は二人で格闘技に行くというように，ＡさんとＢさんが一回ごとに相手の希望に従い，相手の希望する場所でデートをするという協定を結ぶことのはずです.

この場合お互いの利得は

1. Ａさん，$2 \to 1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1$
2. Ｂさん，$1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1 \to 2$

と変遷し，各自の利得はその平均をとった $3/2$，したがって利得のペアは $(3/2,3/2)$ となるはずです．しかし $(3/2,3/2)$ は S に含まれていません.

そこでこのようなペアまで選択できるように，戦略を「共同混合拡大」します．共同混合拡大というのはＡさんとＢさん二人で四つの戦略のペア (美, 美), (美, 格)，(格, 美)，(格, 格) を，どのような割合で選択するかを決められるようにすることです．つまりＡさんとＢさんは二人で

$$r_1(\text{美},\text{美})+r_2(\text{美},\text{格})+r_3(\text{格},\text{美})+r_4(\text{格},\text{格})$$

ただし

$$r_1,r_2,r_3,r_4 \geq 0, r_1+r_2+r_3+r_4=1$$

[18]実際に，このことを種にしたと思われる問題が，２００５年度金沢大前期入試の文系問題１番に出ました.

となる「共同混合戦略」を選択することになります．

このときAさんの利得は

$$r_1 f(美, 美) + r_2 f(美, 格) + r_3 f(格, 美) + r_4 f(格, 格)$$

となり，Bさんの利得は

$$r_1 g(美, 美) + r_2 g(美, 格) + r_3 g(格, 美) + r_4 g(格, 格)$$

となります．ここでもちろん

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \geq 0, r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1$$

ですから，結局「共同混合拡大」された場合の実現可能集合 S^+ は，もとの実現可能集合 S を含む最小の凸集合となります．

「デートのトラブル」の実現可能集合 S の共同混合拡大 S^+ が，uv 平面での縁もこめた３角形

$$u + v \leq 3, 3u - 2v + 1 \geq 0, 2u - 3v + 1 \leq 0$$

となることは見やすいと思います．この S^+ が上に述べた利得のペア $(3/2, 3/2)$ を含むこともご確認下さい．

13　ナッシュ交渉解

そしてナッシュはその処女論文「２人交渉ゲーム」において,「デートのトラブル」によるものと限らない一般の S^+ と，S^+ に属す「交渉の基準点」(c, d) についての「交渉問題」を考え，交渉問題の解

$$\Phi(S^+, c, d) = (u(S^+, c, d), v(S^+, c, d))$$

を与える写像 Φ が,「高度に合理的」と思われる四つの公理

1. パレート最適性
2. 対称性
3. 正一次変換からの独立性
4. 二義的な結果からの独立性

をみたすとすると，一意的に定まることを証明しました．この $\Phi(S^+, c, d)$ を「ナッシュ交渉解」と呼びます．

ここで上の四つの公理の具体的な説明や，Φ の一意的な証明は省略させてもらいますが，ナッシュは $\Phi(S^+, c, d)$ が，積 $(u-c)(v-d)$ を最大にする S^+ の要素 (u, v) であることも証明しました．したがって「デートのトラブル」の場合，交渉基準点をナッシュ均衡解 $(3/5, 3/5)$ のもたらす利得のペア $(1/5, 1/5)$ など「対称」（$c = d$）のものにとると，ナッシュ交渉解が $(3/2, 3/2)$ となることだけは注意させてもらいます．

14　ナッシュ交渉解と正義

さて $(3/2, 3/2)$ は，先に注意しておいたように,「デートのトラブル」の理想的な人間的解決と思われるものです．そこではある「正義」が実現されているといっても良いでしょう．

そしてそもそもナッシュ交渉解を定義する四つの公理自体が,「対称性」が二人のプレイヤーの原理的平等性を,「正一次変換からの独立性」が交渉の結果の客観性を意味するなど,「正義」と無関係なものではありません．

ナッシュ交渉解はある種の「正義」を表現していると言ってよいと思います．

もちろんナッシュの理論は状況が単純化されすぎているので，具体的な社会的問題に応用するためにはよりソフィスティケートされた議論が必要なはずですが，ナッシュの理論はそのひな形にはなりうるものと思われます[19]．

15　要求ゲーム

以上でナッシュの「ｎ人非協力ゲーム」の理論と,「２人交渉ゲーム」の理論に一応の説明を与えました．

これら二つだけでもナッシュという人の並々ならぬ創造力が感知できると思います．しかし先に述べたように私には，ナッシュという人の本当の凄味はこれら二つの理論をつなげようとしたことにあったと思うのです．

というのは，これまでの説明からもおわかりいただけるように，この二つの理論のとりあつかった状況はまったく違うものです．

非協力ゲームのプレイヤーは，他者との情報交換も協力も行わず，ひたすら自分の世界に閉じこもって他者と競争する動物的存在です．仏教の言葉でいえば無明の存在です[20]．

一方「２人協力ゲーム」のプレイヤーはナッシュ先生自身が論文で使われた言葉でいえば「高度に合理的な」人間離れした存在です．

普通の人間ならそれを結びつけようなどと最初から思わないはずですが，ナッシュはそれにこだわり，かつそれに成功しました．

そのためにナッシュは交渉問題の状況 (S^+, c, d) に対して次のような「要求ゲーム」を考えました．

まず議論を簡単にするために，基準点 (c, d) は原点 $(0, 0)$ にしておきます．これで一般性を失いません．

[19] 実際に１９９８年にノーベル経済学賞を受賞したインドの経済学者・哲学者アマルティア・セン氏は，国際貿易のグローバルな正義に関してナッシュの「２人交渉ゲーム」の仕事に言及しています［８］．またアメリカの政治哲学者ジョン・ローマー氏は，ナッシュ的なアプローチで「分配的正義の理論」を展開しています［９］．

[20] 仏教の「無明」とは，縁起の理法，すなわちものが他のものに依存して存在していることに気づいていない，無知の状態を言います．最古の仏典『スッタニパータ』にも「世界は無明におおわれている」とされているように，仏教の基本概念の一つです．

次に集合 T を，ある S^+ の要素 (u_*, v_*) について

$$u_* \geq u \geq 0, v_* \geq v \geq 0$$

なる (u, v) の全体として定義します．S^+ が「デートのトラブル」の共同混合拡大された利得集合の場合，T は

$$2 \geq u \geq 0, 2 \geq v \geq 0, u + v \leq 3$$

なる５角形の領域になります.

このTと(0, 0)のナッシュ交渉解は,「二義的な選択肢からの独立性」で, S^+ と $(0, 0)$ のナッシュ交渉解と同じものになります.

ナッシュは１９５３年論文の中でまず，このような T に対し，ＡさんとＢさん二人のプレイヤーが各自「要求」$u \geq 0$ と $v \geq 0$ を出し合い，

1. もし (u, v) が T の要素ならば，Ａさんの利得は u，Ｂさんの利得は v
2. もし (u, v) が T の要素でないならば，ＡさんとＢさんの利得はともに０

となる状況を考え，これを「要求ゲーム」と名付けました.

このゲームは利得の実現可能集合 T が与えらたとき，その決着を目指す争いの自然なモデルになっていることがお分かりいただけると思います.

16　要求ゲームのナッシュ均衡解

ところがこの要求ゲームというものは，そのままではなかなか手に負えないしろものであることも分かります.

今，$u \geq 0, v \geq 0$ なる (u, v) に対して

1. もし (u, v) が T の要素ならば $\chi_T(u, v) = 1$
2. もし (u, v) が T の要素でないならば $\chi_T(u, v) = 0$

となる関数 χ_T を考えます．これは「T の特性関数」と呼ばれるものです.

この χ_T を使うと，T に関する要求ゲームにおいて，戦略の組 (u, v) に対し

1. Ａさんの利得は $u\chi_T(u, v)$
2. Ｂさんの利得は $v\chi_T(u, v)$

であることがすぐ分かります.

そこでこの要求ゲームでのナッシュ均衡解を

1. 任意の $u \geq 0$ に対して，$u_0\chi_T(u_0, v_0) \geq u\chi_T(u, v_0)$
2. 任意の $v \geq 0$ に対して，$v_0\chi_T(u_0, b_0) \geq v\chi_T(u_0, v)$

なる (u_0, v_0) と定義できます[21].

そしてこのとき，困ったことには，５角形領域の右上外縁部，つまり

$$1 \leq u \leq 2, u + v = 3$$

をみたす (u, v) のすべてがナッシュ均衡解になります．こういう事情は「デートのトラブル」だけでなく一般の T でも同様で，すなわち要求ゲームはそのままの形では「アナーキー」な結果しかもたらさないのです.

17　なめらかに近似された要求ゲーム

普通の人ならそこまで考えておしまいというところでしょうが，ナッシュはこの要求ゲームをなめらかに近似することを考え出しました.

ここでは「デートのトラブル」からの T でそのアイディアを説明します.

今 ϵ を任意に小さい正の数とします．このとき $u \geq 0, v \geq 0$ なる (u, v) について定義された無限回微分可能な関数 χ_2 で,

1. (u, v) が T の要素のとき $\chi_2(u, v) = 1$
2. (u, v) が T の外側で ϵ までの範囲にあるとき，つまり (u, v) が T の要素でなく，ある T の要素 (u_*, v_*) について

   $$(u - u_*)^2 + (v - v_*)^2 \leq \epsilon^2$$

   のとき，$0 \leq \chi_2(u, v) \leq 1$
3. (u, v) がそれ以外の場所にあるとき $\chi_2(u, v) = 0$
4. 任意の (u, v) について $\lim_{2 \to +0} \chi_2(u, v) = \chi_T(u, v)$

となるものがとれます.

つまりこの χ_2 は不連続関数 χ_T の「なめらかな近似」になっています.

このように，良くない関数をなめらかな関数で近似することは，解析学でしばしば使われる手法です．ここでは結果だけを承認してください.

このときＡさんとＢさんがそれぞれ $u \geq 0$ と $v \geq 0$ なる要求を出したとき

1. Ａさんの利得は $u\chi_2(u, v)$
2. Ｂさんの利得は $v\chi_2(u, v)$

となる「なめらかに近似された要求ゲーム」を考えることができます.

---

[21] ここで考えられた要求ゲームは，有限の純粋戦略からなるゲームの混合拡大という，もともとの「ｎ人非協力ゲーム」の枠組みからははずれるものです．しかし「ナッシュ均衡解」の思想はまったく同じものです.

18　１９５３年論文の結果

そしてナッシュは，本講演の眼目であるとお断りしておいた１９５３年論文において，χ_2 が適当にとられるとき，上記の「なめらかに近似された要求ゲーム」が一つただ一つのナッシュ均衡解 (u_2, v_2) を持つこと，つまり

1. 任意の $u \geq 0$ に対して，$u_2\chi_2(u_2, v_2) \geq u\chi_2(u, v_2)$
2. 任意の $v \geq 0$ に対して，$v_2\chi_2(u_2, b_2) \geq v\chi_2(u_2, v)$

なる (u_2, v_2) が一つただ一つ定まること，かつ ϵ を 0 に近づけるとき，(u_2, v_2) がもとの交渉問題のナッシュ交渉解に近づくこと，つまり

$$\lim_{2\to+0}(u_2, v_2) = \Phi(T, 0, 0)$$

であることを証明しました．

つまり要求ゲームをなめらかに近似したとき，ナッシュ均衡解が無限に生じるアナーキーな状況は起こらず，そこでの競合はただ一つのナッシュ均衡解 (u_2, v_2) に落ち着き，のみならずそれは $\epsilon \to +0$ のとき，つまり「なめらかに近似した要求ゲーム」がもとの要求ゲームに近づくとき，驚くべきことにもとの交渉問題のナッシュ交渉解に近づくのです．

先に説明したようにナッシュ均衡解は競争だけの動物的決着を表し，ナッシュ交渉解は高度に合理的な正義性を感じさせるものであり，この両者がつながっているとは直感的には考えられないことです．

しかしナッシュは「なめらかな近似」を媒介にすると，この両者が自然に結びついていることを証明したのです．

私にはこれは神秘的な結果のように感じられます．

ゲーム理論専門家の人たちには失礼かも知れませんが，数学者の眼から見れば，ナッシュの「２人交渉ゲーム」の理論や，ノーベル経済学賞をとったとはいえナッシュの「ｎ人非協力ゲーム」の理論は，彼の「自己共役放物型方程式の解のヘルダー連続性」や「リーマン多様体の埋め込み問題」あるいは「ナッシュの陰関数定理」などの大結果にくらべれば，そこに感じられる知的エネルギーの量において落差を感じさせるものです．

ナッシュの友人であるフィールズ賞受賞トポロジストのミルナーさんなどは，そういう考えを広言されています．ミルナーさんのようにはっきり言わなくてもたいていの数学者はそう思っているはずです．

しかし私にはこの１９５３年論文まで視野に入れて考えるとき，ナッシュのゲーム理論は，もちろん数学的に簡単なことは簡単なのですが,「自己共役放物型方程式の解のヘルダー連続性」や「リーマン多様体の埋め込み問題」あるいは「ナッシュの陰関数定理」と同質の，それら大結果に劣らない数学的神秘性にみちたものと感じられるのです．

19　計画経済と市場原理主義

以上で本講演が目標とした，１９５３年論文までこめたナッシュのゲーム理論の解説は終わりました.

数学的に付け加えることはないのですが，１９５３年論文が数学的神秘性だけでなく，われわれの現実の社会理解にも示唆する点があるという愚考を最後に述べさせてもらいたいと思います.

ナッシュが考えたゲーム論的状況は非常に単純なもので，現実の複雑な社会に比べればおもちゃみたいなものであることは言うまでもありません.

しかしナッシュの交渉ゲームの状況は，公理系で与えられた原則のもとにプレイヤーに利得を分配するということですから，あらかじめ考えられた社会正義の原則の下に利得を分配する，社会主義的計画経済のひな形と考えることは許されると思います.

またナッシュの非協力ゲームの状況は，相互協力をせずにひたすら競争するプレイヤーを考えていることから，資本主義の市場原理主義のひな形であると考えることも許されると思います.

さて資本主義において経済を動かす基本要因は利潤に対する欲望であることははっきりしています．ところが社会主義においてその要因ははっきりしていませんでした.

ソビエト連邦崩壊のだいぶ前に，羽仁五郎さんがそのことを問題にしているのを読んだことがあります．羽仁さんが１９６０年にポーランドに行ったとき高名なポーランドの経済学者のオスカー・ランゲに，社会主義経済を動かす要因を聞いたところ，最初の十年は革命的情熱，次の十年はヒロイズムでやって後はわからないという話になったと言います［１０］[22].

私はそれを読んだとき，完全雇用や医療・教育の無償化を目指す社会主義の理想が人間的正義感に合致するとはいえ，動力のさだかでない経済が存続できるわけがないと思いました．案の定１９９１年にソ連は崩壊し，中国も計画経済を振り捨て市場経済導入に邁進しているのはご存じのとおりです.

一方，国際資本主義は，資本が吸い上げた利潤を公共事業によって社会に還元するというケインズ経済学を，社会主義革命への恐怖感がなくなった１９８０年代に投げ捨て，いわゆるワシントン・コンセンサスによって，民営化と規制緩和と自由貿易を旗印とする市場原理主義を，誰はばかることなく採用しました[23].

[22] その後で羽仁先生は，労働が「遊戯」になる社会を目指さなければならないと言われています．私は羽仁先生を敬愛する人間ですが，上宮法皇（いわゆる聖徳太子）の憲法十七条における「人間はみな凡夫だ」という指摘も真実だと思っています．ですから労働が「遊戯」となる社会は，少なくとも人類の現段階では幻想としか思われません.

[23] 世界銀行副総裁を務め，２００１年にノーベル経済学賞を受賞したスティグリッツ氏は，著書［１１］において「「市場は万能ではなく，政府の適切な介入が必要である」としていたＩＭＦのケインズ主義的な方向は，一九八〇年代にやみくもに叫ばれた自由市場主義にとってかわられた．その背後にあったのが，経済の開発と安定にそれまでとは根本的に異なるアプローチをとろうとする「ワシントン・コンセンサス」ーＩＭＦ，世界銀行，アメリカ財務省のあいだで確認された，発展途上国に対する正しい政策に関する合意ーだった」と書かれています.

それは端的にいえば市民・労働者・農民等の権利や社会福祉を解体し，すべてを資本の利潤のもとに置く思想です.

この経済思想は世界経済をある意味で活性化したので，評価すべき点がまったくないとまでは思いません．しかし一方では，貧困層が増大し，労働条件や社会保障が劣悪化し，帝国主義的戦争と，地球環境の破壊がもたらされていることも現実です.

つまり計画経済も市場原理主義もうまく機能しているとは言えないのです.

20　市場社会主義の可能性

しかし私たち人類の前には計画経済と市場原理主義の二者択一しかないのでしょうか[24].

ここでナッシュの１９５３年論文の結果，すなわち「競争をなめらかにする」ことによって競争の結果が正義に近づけることができることを，私は想起せざるをえません.

「競争をなめらかにする」とは競争の過程を法的あるいは制度的にコントロールすることに対応するように思われます．なめらかに近似された要求ゲームにおいて，ナッシュ均衡解がアナーキーに生じる事態を χ_2 が封じ込めているということは,「競争の結果」を χ_2 が「法」や「制度」としてコントロールしていると言えるからです.

そうだとするとナッシュの１９５３年論文は，市場経済の活力を保持したまま，社会主義的正義に近づくことができることを，少なくとも原理的には示唆しているように私には思われるのです[25].

このような社会主義を「市場社会主義」と呼ぶようです．その言葉を使えば，ナッシュの１９５３年論文は，市場社会主義の原理的可能性を示唆しているとも言えるでしょう[26].

ともあれ，このように考えるとナッシュの１９５３年論文は数学の枠を超えた意義を持つことになります.

しかしナッシュ先生自身がそんなことまで考えていたはずもなく，話はすでに私の妄想の領域に入っているようなので，この辺でこの講演を終わらせていただきたいと思います.

拙い講演にご静聴ありがとうございました（拍手）.

---

[24] ある人々の心を二者択一しかないように呪縛したのは，マルクスの労働価値論とそれに基づく搾取論だったと思われます．しかし，マルクスの「価値」は二部門以上の生産ではその加法性を失うことが判明しています［１２］．つまり現実の経済では意味を失う理論なので，それに呪縛されているのはナンセンスとしか言えません.

[25] もちろんそれが現実化するためには，国際資本主義の暴走に対抗する国際民主主義の広範な連帯と抵抗が必要とされるはずですが.

[26] 伝統的マルクス主義が説得力を失う中で，国家や階級や搾取といったマルクス主義的問題を，ゲーム理論など厳密な数学的手法で再考しようとする「アナリティカル・マルキシズム」が起こりました［１３］.「市場社会主義」はその中で使われ始めた言葉のようです．このアナリティカル・マルキシズムの中ではさまざまな市場社会主義が考えられているようですが，ナッシュの１９５３年論文を出発点にしようという発想はないようです.

参考文献

[1] 半沢英一「Ｎａｓｈの陰関数定理とＳｔｅｆａｎ問題」,『数学』第３６巻，岩波書店，１９８４．

[2] Ｈ・Ｗ・クーン，Ｓ・ナサー編，落合卓四郎，松島斉訳『ナッシュは何を見たか』，シュプリンガー・フェアラーク東京，２００５．

[3] 半沢英一「Ｎａｓｈの等距離埋蔵論文の影響についての私見」,［２］所収，２００５．

[4] 武者小路公秀「ジョン・ナッシュのこと」,『数学セミナー』１９６５年２月号，日本評論社，１９６５．

[5] シルヴィア・ナサー著，塩川優訳『ビューティフル・マインド』，新潮社，２００２．

[6] 岡田章『ゲーム理論』，有斐閣，１９９６．

[7] 巖佐庸『生物の適応戦略』，サイエンス社，１９８１．

[8] アマルティア・セン著，東郷えりか訳『人間の安全保障』，集英社新書，２００６．

[9] ジョン・Ｅ・ローマー著，木谷忍，川本隆史訳『分配的正義の理論』，木鐸社，２００１．

[10] 羽仁五郎『続・都市の論理』，技術と人間，１９７９．

[11] ジョセフ・Ｅ・スティグリッツ著，鈴木主税訳『世界を不幸にしたグローバリズムの正体』，徳間書店，２００２．

[12] 森嶋通夫，カテフォレス著，高須賀義博，池尾和人訳『価値・搾取・成長』創文社，１９８０．

[13] トム・メイヤー著，瀬戸岡紘監訳『アナリティカル・マルクシズム』，桜井書店，２００５．