

算木で3次方程式を解く

西森 敏之

関孝和のゆかりの地である群馬県藤岡市で毎年行われている「面白数学教室」で、2005年10月14日(金)に講演をしてきました。この会は、藤岡市にある4つの中学校から毎年順番に1校ずつ会場を選んで数学に関する講演会を開くものです。対象が中学生であるので、筆者の持ちネタの内から算木を選んで話をすることにしました。

講演では、最初に「電卓」の写真を見せて、「Q1. これは何ですか?」「Q2. この使い方を知っていますか?」「Q3. これをよく使いますか」という質問をしていって挙手で答えてもらいました。次に「そろばん」、「算木」の順で写真を見せて同じ質問を繰り返し、そのあと本論に入りました。

以下では、そのときの配付資料に近い形で講演の内容を報告します。

はじめに

赤と黒の小さい木の棒(算木)を広げた布(算盤)の上で操作して計算することが、大昔の中国で発明されました。日本には奈良時代には伝わっていません。算木では足し算、引き算、掛け算、わり算ができるだけでなく方程式も解けます。それで、室町時代頃からそろばんが使われるようになって、江戸時代に現れた和算家たちによって明治時代頃まで使われていました。

第一部 初級編：数の表し方，足し算，引き算，掛け算

1.1 数の表し方

算木で1～9の数を表すには図1のようにします。0は算木を置かないことで表します。2桁以上の数字を表すには、罫線の入った算盤を使い、例えば3056は図2のように表します。また、正の数は赤い算木(図では白抜き)で表し、負の数は黒の算木で表します。

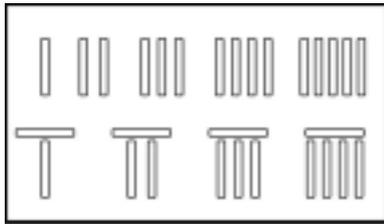


図1. 算木で 1 ~ 9 を表す



図2. 算木で 3056 を表す

1.2 足し算と引き算

足し算は、図3のように、足したい数を算盤の別の段に置いて確認し、下の段の算木を上段にそのまま上のそれぞれのマスに移し、下のマスから順に整理して行きます。(実際には、時代・場所によってさまざまなやり方が行われたと考えられますので、ここでは歴史的方法にはあまりこだわりません。算木で計算ができるということを説明できれば良しとします。以下の説明も同じ考え方です。)

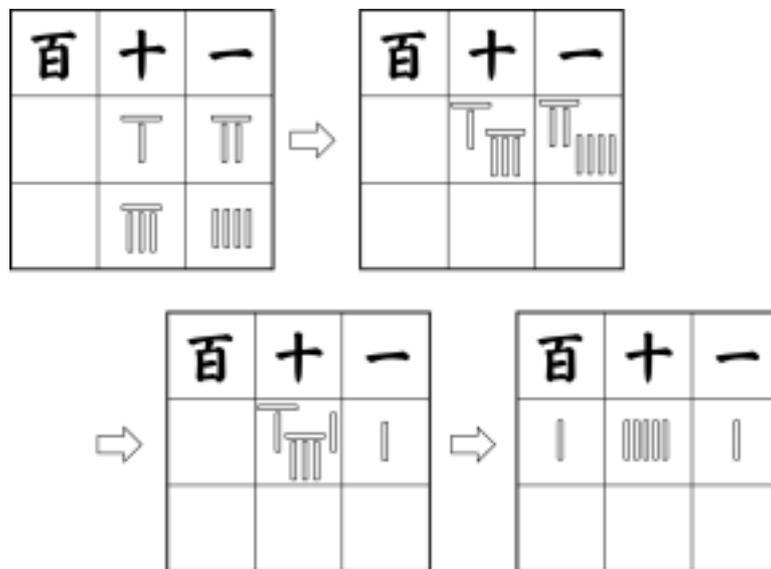


図3. 足し算の計算例： $67 + 84 = 151$

引き算は、引く数を負の数と考えて黒の算木で表せば、図4のように、足し算とほぼ同じ手順でできます。黒の算木と赤の算木を対にして取り除いてから、整理すれば簡単です。

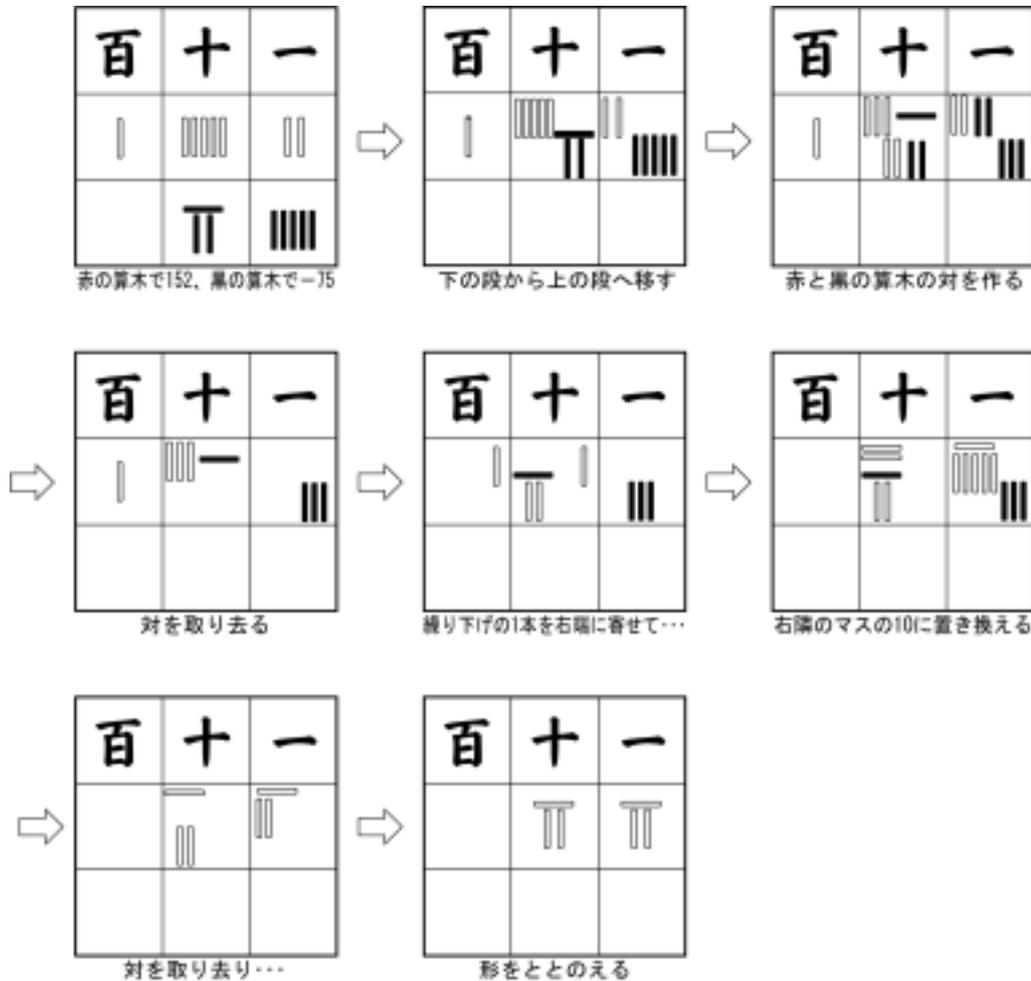
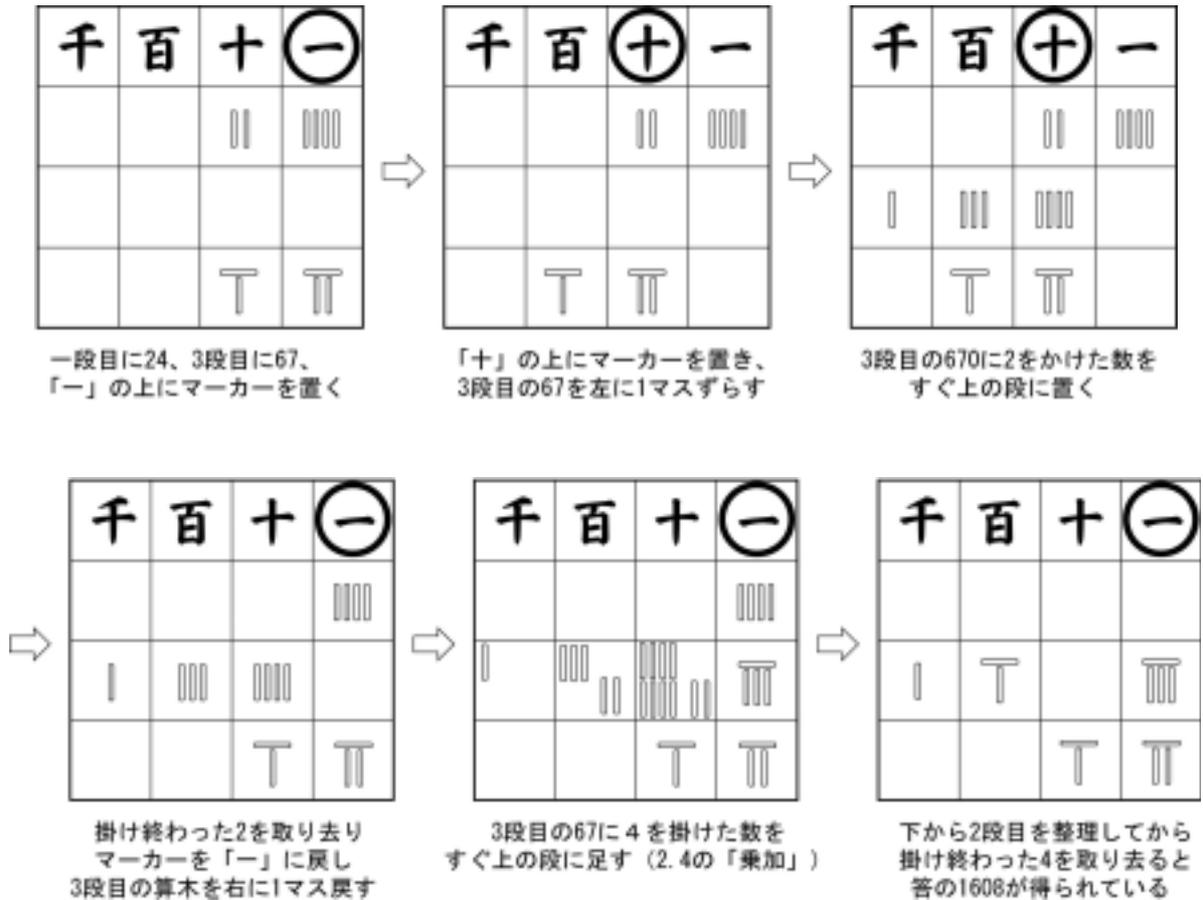


図4. 引き算の計算例： 152 - 75 = 77

1.3 掛け算

掛け算は、24 × 67の例を示すだけにします。よく観察して、何をやっているのか見抜いてください。足し算はもうできると思いますので、足すところは詳しくは説明しません。(図でマーカーといているのは、「どこを計算しているか」を示す目印のことで で表してあります。)



第二部 上級編：方程式を算木で解く

2.1 方程式を解くための算盤

方程式を解くための算盤には、右端の縦列に文字が書いてありますが、その意味は、商 = 答、実 = 定数項、方 = x の係数、廉 = x^2 の係数、隅 = x^3 の係数... ということです。例えば、

$$x^3 + 7x^2 + 841x - 80885 = 0$$

は図6のように表せます。

十	万	千	百	十	一	
						商
	III		III	III	IIII	実
		III	IIII	I		方
				II		廉
				I		隅

図6 方程式： $x^3 + 7x^2 + 841x - 80885 = 0$

2.2 マーカー（目印）

方程式を解く操作は少し複雑なので、今どこの計算をしているかを示すためにマーカーを2つ使うと便利です。図6の「一」に置いてあるマーカーを「位マーカー」、 「実」に置いてあるマーカーを「段マーカー」とよびます。

2.3 算木の基本操作 [I]：シフト（ずらすこと）

「位マーカー」を左右に1桁ずらすとき、同じ方向に、「方」の段は1桁、「廉」の段は2桁、「隅」の段は3桁ずらします。このことを「シフト」といいます。図7を見てください。

2.4 算木の基本操作 [II]：乗加（掛けて足すこと）

掛け算のときに既に行ったように、「位マーカー」の下の数を一つの段に掛けてその上の段に足すことを「乗加」といいます。一番下の段から「段マーカー」が置いてある段まで次々に乗加することを「連続乗加」といいます。「連続乗加」するたびに「段マーカー」を一つ下に移します。図8を見てください。

十万	万	千	百	⊕	一	
						商
	Ⅲ		Ⅲ	Ⅲ	Ⅳ	⊕ 実
		Ⅲ	Ⅳ	Ⅰ		方
			Ⅲ			廉
		Ⅰ				隅

図7. 図6から左方向に1桁シフト

十万	万	千	百	⊕	一	
				Ⅲ		商
	Ⅱ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅳ	実
	Ⅰ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅰ		⊕ 方
		Ⅲ	Ⅲ			廉
		Ⅰ				隅

図8. 「位マーカー」の下に3を置き連続乗加

2.5 方程式を解く方法（1）：わり算（1次方程式）

わり算は方程式で表せます。たとえば $1568 \div 28$ は方程式

$$28x - 1568 = 0$$

の答です。この方程式は1次方程式ですので、「シフト」と「連続乗加」を交互に繰り返せば解けます。

まず、答が十の位から始まると見当がつくので「位マーカー」を「十」に置いてシフトします（「実」の段はそのままで、「方」の段を左に1桁ずらす）。

千	百	十	①	
				商
┆		┐		②
				方

千	百	③	一	
				商
┆		┐		②
				方

次に、答の十の位が5と見当がつくので「位マーカ―」の下に5をおいて「連続乗加」(実際には1回だけ乗加)します。この結果を見ると「実」の段が168であり0でないので、50は答でないということになり、計算を続けます。

千	百	③	一	
				商
┆		┐		②
				方

千	百	③	一	
				商
	┆	┐		②
				④

答の一の位の数を求めるために、「位マーカ―」を「一」の上に戻し、対応する「シフト」を行います(「実」の段はそのままで、「方」の段を1桁右へずらす)。「段マーカ―」も「実」の上に戻しておきます。

千	百	十	①	
				商
	┆	┐		②
				方

答の一の位の数が6と見当がつくので「位マーカー」の下に6をおいて「連続乗加」(実際には1回だけ乗加)します。この結果を見ると「実」の段が0になったので、「商」の段の56が答であるということになり、計算は終了します。

千	百	十	一	
			┐	商
		┐		実
				方

千	百	十	一	
			┐	商
				実
				方

2.6 方程式を解く方法(2): 2次方程式

2次方程式を算木で解くときには、まず $ax^2 + bx + c = 0$ の形に整理しておきます。例を使って解き方を説明します。例として、方程式

$$x^2 + 274x - 21231 = 0$$

を考えて見ます。

まず、答が十の位から始まると見当がつくので「位マーカー」を「十」に置いてシフトします(「実」の段はそのまま、「方」の段を左に1桁、「廉」の段を左に2桁ずらす)。

万	千	百	十	一	
					商
					実
			┐		方
					廉

万	千	百	十	一	
					商
					実
		┐			方
					廉

次に、答の十の位が6と見当がつくので「位マーカー」の下に6をおいて「連続乗加」します。この結果を見ると「実」の段が1191であり0でないので、60は答でないということになり、計算を続けます。

万	千	百	⊕	一	
			┐		商
					⊕ 実
		┐┐			方
					廉

万	千	百	⊕	一	
			┐		商
					実
					⊕ 方
					廉

「段マーカ―」が「方」の上であり最下段の「廉」の上ではないので、連続乗加をもう一回行います。そのあとで、答の一の位の数を求めるために、「位マーカ―」を「一」の上に戻し、対応する「シフト」を行います。「段マーカ―」も「実」の上に戻しておきます。

万	千	百	⊕	一	
			┐		商
					実
					方
					⊕ 廉

万	千	百	十	⊖	
			┐		商
					⊕ 実
					方
					廉

答の一の位の数が見当がつくので「位マーカ―」の下に3をおいて「連続乗加」します。この結果を見ると「実」の段が0になったので、「商」の段の63が答であるということになり、計算は終了します。（「実」の段が0でなければ小数点以下に移って同様の計算を続けます。）

万	千	百	十	⊖	
			┐		商
					⊕ 実
					方
					廉

万	千	百	十	⊖	
			┐		商
					実
				┐┐	⊕ 方
					廉

2.7 方程式を解く方法 (3): 3 次方程式

3 次方程式を解くときも、まず $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の形に整理します。

例で説明することにして、 $x^3 + 7x^2 + 841x - 80885 = 0$ を解いてみましょう。

まず、答が十の位から始まると見当がつくので「位マーカ―」を「十」に置いてシフトします(「実」の段はそのまま、「方」の段を左に1桁、「廉」の段を左に2桁、「隅」の段を左に3桁ずらす)。

万	千	百	十	⊕	
					商
⊢		⊢	⊢	⊣	⊕ 実
		⊢	⊣	⊥	方
				⊢	廉
				⊥	隅

万	千	百	⊕	一	
					商
⊢		⊢	⊢	⊣	⊕ 実
	⊢	⊣	⊥		方
		⊢			廉
	⊥				隅

次に、答の十の位が3と見当がつくので「位マーカ―」の下に3をおいて「連続乗加」します。この結果を見ると「実」の段が22355であり0でないので、30は答でないということになり、計算を続けます。

万	千	百	⊕	一	
			⊣		商
⊢		⊢	⊢	⊣	⊕ 実
	⊢	⊣	⊥		方
		⊢			廉
	⊥				隅

万	千	百	十	⊕	
			⊣		商
⊢	⊢	⊢	⊣	⊣	⊕ 実
⊥	⊢	⊣	⊥		⊕ 方
	⊢	⊢			廉
	⊥				隅

「段マーカ―」が「方」の上であり最下段の「隅」の上ではないので、「連続乗加」をあと2回行います。そうすると「段マーカ―」が最下段の「隅」の上に来ます。これで十の位を終わります。

万	千	百	⊕	一	
					商
					実
		┌	┆		方
	┌	└└			廉
	┆				隅

万	千	百	⊕	一	
					商
					実
		┌	┆		方
		└└			廉
	┆				隅

十の位の作業が終わったので、答の一の位の数を求めるために、「位マーカ―」を「一」の上に戻し、対応する「シフト」を行います。「段マーカ―」も「実」の上に戻しておきます。（算盤上には「商」の段を無視すれば、

$$x^3 + 97x^2 + 3961x - 22355 = 0$$

という方程式が得られています。）

万	千	百	十	⊖	
					商
					実
			┌	┆	方
				└└	廉
				┆	隅

答の一の位の数が見当がつくので「位マーカ―」の下に5をおいて「連続乗加」します。この結果を見ると「実」の段が0になったので、「商」の段の35が答であるということになり、計算は終了します。（「実の段が0でなければ小数点以下に移って同様の計算を続けます。）

万	千	百	十	一	
					商
					実
			T		方
				TT	廉
					隅

万	千	百	十	一	
					商
					実
			TT		方
					廉
					隅

2.8 方程式を解く方法 (4): 方程式の解き方のまとめ

方程式を算木で解くときは、答の一番上の位の数から順に求めていきます。答が長い小数になるときは必要なだけの桁数を求めて計算を中止して、最後の数を四捨五入します。

方程式を解く具体的な手順は次のようになります。

ステップ1: 答の一番上の位の数

まず答の一番上の位の数の見当をつけるのですが、これは経験を積まないとうまくできません。とにかく見当がついたとして話を進めます。「位マーカ―」が一番上の位に移し対応するシフトを行います。

次に「位マーカ―」の下の「商」の段のマスに見当をつけた数を置き、この数を使って最下段から「連続乗加」して「段マーカ―」を「方」の上に移します。さてこのとき、もし「実」の段が0になっていれば、見当をつけた数が方程式の正確な答だということになっています。もちろん計算は終了です。

もし「実」の段が0でなければ、次の位の数を求めるステップに移ります。ここが重要ですが、次の位に移るには算盤上の算木の調整が必要になります。この調整には「連続乗加」を「段マーカ―」が最下段にくるまで必要な回数だけ行います。この「位」での作業はこれで終了です。

ステップ2：答の次の位の数

次の位の数を求める準備として「位マーカ―」を1桁右に移し、対応するシフトを行い、「段マーカ―」を「実」の上に戻しておきます。答のこの位の数の見当をつけますが、これは比較的易しいことが分かります。

次に「位マーカ―」の下の「商」の段のマスに見当をつけた数を置き、この数を使って最下段から「連続乗加」します。その結果「段マーカ―」は「方」の上に移っています。さてこのとき、もし「実」の段が0になっていれば、ここまでに見当をつけた桁の数が方程式の正確な答だということになっています。もちろん計算は終了です。

もし「実」の段が0でなければ、次の位の数を求めるステップに移ります。次の位に移るまえに、調整の「連続乗加」を「段マーカ―」が最下段にくるまで必要な回数だけ行うことを忘れてはいけません。

ステップ3：必要な桁数までの近似解

「実」の段が0にならないときは、ステップ2に戻って計算を続けます。何回繰り返しても「実」の段が0にならないときは必要な桁数だけ求めて終わりにして、最後の数を四捨五入しておきます。

実際には算盤の大きさや用意した算木の数に限りがあるので 続行不可能になれば終了するしかありません。江戸時代の池田昌意著『数学乗除往来』(1674年)には、幅が約150cmの絹の算盤と、赤と黒の算木を180本ずつ用意すると書いてあるそうです([6]100ページ)。

必要な「乗加」の回数

一つの位での作業で「乗加」を行う回数は、とりあえず1回「連続乗加」するので

- 1次方程式のときは 1回、
- 2次方程式のときは 2回、
- 3次方程式のときは 3回、
- 4次方程式のときは 4回

「乗加」を行います。「実」の段が0でないときは、「連続乗加」が繰り返し必要なので、さらに

- 1次方程式のときは 0回、
- 2次方程式のときは 1回、

3次方程式のときは $2 + 1 = 3$ 回，

4次方程式のときは $3 + 2 + 1 = 6$ 回

「乗加」が必要になります。

このように，次数が上がれば上がるほど必要な「乗加」の回数が増えていきます。

参考文献

- [1] 西森敏之「算木」『教育科学 / 数学教育』明治図書，2003年11月号
- [2] 西森敏之「算木を使って3次方程式を解く」『教育科学 / 数学教育』明治図書，2003年11月号
- [3] 西森敏之「算木で3次方程式を解く」『数学文化』(数学協会編)日本評論社，2004年10月
- [4] 西森敏之「算木の数学教育での利用」『教育科学 / 数学教育』明治図書，2004年11月号
- [5] 西森敏之「算木で方程式が解ける理由」『教育科学 / 数学教育』明治図書，2005年8月号
- [6] 佐藤健一「新・和算入門」研成社，2000年8月
- [7] 王青翔「算木を超えた男」東洋書店，1999年2月

(にしもり としゆき 北海道大学・高等教育機能開発総合センター)