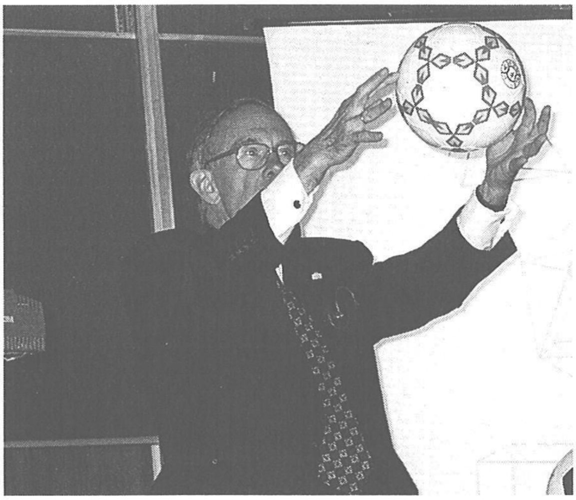
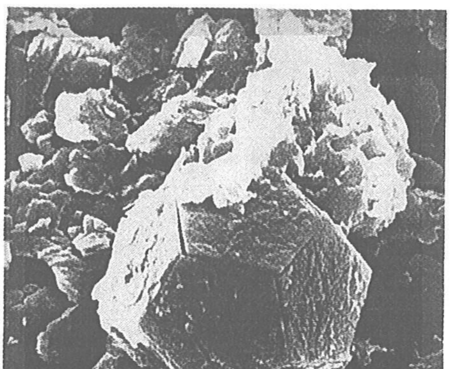
講演記録

第二回日本数学会関孝和賞受賞講演
‘正多面体とサッカーボール’

フリードリッヒ・ヒルツェブルッフ
(80 年から 95 年まで，マックス・プランク数学研究所所長)



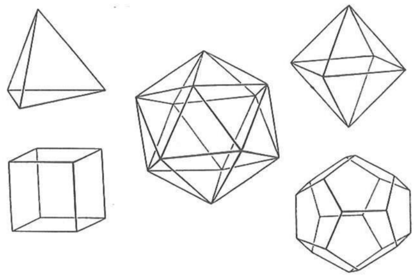
1996 年 11 月 9 日東京大学における受賞講演



Coccosphäre von Braarudosphaera bielowi
Vergrößerung etwa 5000 X

Aus dem Miozän (vor ca. 20 Mill. Jahren)
S. A. Jafar, Tübingen, 1975

正多面体はユークリッドの本（BC 300 年頃）の中で論じられています．まず，正多面体をお見せしましょう．



正多面体は自然界や芸術作品にも登場します．正 12 面体の例として次のようなものがあります．

Le dodécaèdre en argent
trouvé à Saint-Pierre de Genève

Lors de la campagne archéologique de fouilles entreprise à l'occasion de la dernière restauration de la cathédrale de Saint-Pierre à Genève, un dé romain en forme de dodécaèdre, datant du 4e siècle après Jésus-Christ, a été mis au jour. Les 12 faces pentagonales en argent portent les 12 signes du zodiaque: il est rempli de plomb (poids 297 g). Le «dé» a probablement servi à la prédiction de l'avenir par le jeu, mais la provenance et l'utilisation restent inconnues pour l'instant.

これはシュプリンガー・フェアラグのグッツ氏からいただいたものです

正多面体は次のような性質を持っています．各面は正 n 角形，各頂点（かど）から m 個の辺が出ています．どのような自然数 m，n が可能でしょうか？

n 角形の内角の和は

$$(n-2)\cdot 180^\circ$$

です．したがって

$$m\cdot\frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ < 360^\circ$$

となります（各頂点での角の和は，凸多面体であることから 360° より小さくなります）．この式は

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}>\frac{1}{2}$$

と同値です．$m\geq 3$，$n\geq 3$ であるこの不等式の自然数の解は (3,3)，(4,3)，(3,4)，(5,3)，(3,5) だけです．ドイツ語ですが次のトランスペアレンシーをお見せしましょう．

n = Valenz der Flächen

m = Valenz der Eckpunkte

Winkelsumme im n-Eck =

$(n-2)\cdot 180^\circ$, deshalb

$$m\ \frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ < 360^\circ$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}>\frac{1}{2}$$

			e	k	f	
Polyeder	n	m	b_o	b_1	b_2	Plato
Tetraeder	3	3	4	6	4	Feuer
Hexaeder	4	3	8	12	6	Erde
Oktaeder	3	4	6	12	8	Luft
Dodekaeder	5	3	20	30	12	Kosmos
Ikosaeder	3	5	12	30	20	Wasser

正多面体のギリシャ語での名前は英語とほとんど同じですが，日本語でもあまり変わらないと思います．プラトンは私たちの世界を構成する基本的な元素を5個の正多面体と関連づけました．b_0，b_1，b_2 はそれぞれ多面体のかど（頂点）の個数，辺の個数，面の個数を表します．ギリシャ語の名前は面の個数からきています．ドイツでは b_0，b_1，b_2 のかわりに e，k，f が使われます (Ecken，Kanten，Flächen)．n，m から b_0，b_1，b_2 を計算することはできるでしょうか？まず

$$b_0 m = 2b_1$$

$$b_2 n = 2b_1$$

が成立します．この両式とオイラーの公式

$$b_0 - b_1 + b_2 = 2$$

を思いきって使うと

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2}=\frac{1}{b_1}$$

を得ます．こうして b_0，b_1，b_2 を n，m を使って表すことができます．n，m を入れ替えることは b_0，b_2 を入れ替えることになりますので，この入れ替えは次のようになります．

正四面体——正四面体

正六面体（立方体）——正八面体

正 12 面体——正 20 面体

この左辺と右辺に現れる正多面体の間の密接な関係についてはまもなく分かります．

まず，オイラーの公式についてお話ししましょう．オイラーはバーゼル（スイス）で 1707 年に生まれ，1741 年から 1766 年までベルリンのプロシアアカデミーでフレデリック大王のもとで働きました．オイラーは“応用数学”の分野でも天才であり大王の死まで多くの技術上の問題でフレデリック大王を助けましたが，大王はオイラーを冷遇しました．1766 年から 1783 年まではサンクトペテルブルクのロシアアカデミーでエカテリーナ二世のもとで働きました．エカテリーナ二世はフレデリック大王の場合よりはオイラーを優遇しました．オイラーの肖像はスイスの紙幣に登場します．

ついでにドイツの紙幣に登場するカール・フリードリッヒ・ガウス（1777-1855）もお見せしましょう．ガウスの曲率に関する仕事はオイラーの公式と密接に関係しています．オイラーの公式はどのようにして証明するのでしょうか？

ここでは，任意の凸多面体に対してオイラーの公式が正しいことを証明しましょう．多面体の表

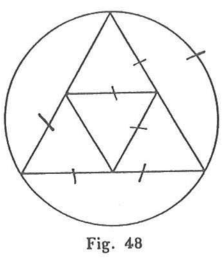


Fig. 48

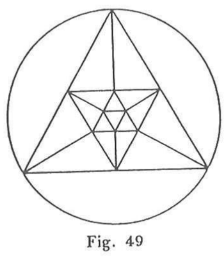


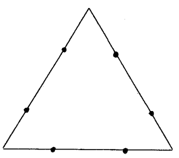
Fig. 49

ラーデマッヒャー・テプリッツの有名な本“数と図形”から

面は平面に射影することができます．面は国になります．一つの国は大洋と考えます．この大洋の中に無限遠点を仮想的につけ加えて平面を球面にします．この考え方は前頁の図で示されます．

この絵は正 20 面体と正 8 面体の図を表しています．ダムを開いて（辺を一つ取り除いて）水を入れてみましょう．辺が一つなくなり，二つの国が一つになります．もしも水がある辺の一方の側しか入っていないときにはさらにダムを開けましょう．その度に b_1 は 1 減り b_2 も同じく 1 減ります．すると，辺がつながってできた紐（輪を持たない）と一つの国（海がすべてを覆ってしまいました）になるまで $b_0-b_1+b_2$ は変化しません．この最後の状態では $b_0-b_1=1$，$b_2=1$ ですから，$b_0-b_1+b_2=2$ となり，最初の状態でも $b_0-b_1+b_2=2$ であることが分かります．

正 20 面体と正 12 面体の関係は対称変換の群を調べることによって明らかになります．対称変換というのは多面体を多面体に移す，ある軸に関する適当な角度の回転のことです．正 20 面体と正 12 面体は 6 本の対称の軸を持っています（正 20 面体の場合は頂点とその反対側の頂点を結んでできる軸，正 12 面体の場合は面の中心とその反対側の面の中心を結んでできる軸です）．これらの軸のまわりに $k \cdot 72°$（$k=1,2,3,4$，5 次の対称変換）の回転ができます．同様にして 10 本の 3 次の対称変換の軸，15 本の 2 次の対称変換の軸があります．対称変換の個数は全部で $6 \cdot 4+10 \cdot 2+15 \cdot 1=59$ になります．対称変換の群は，恒等変換も含めますので $N=60$ 個の元からなります．すべての正多面体に対して $N=2b_1$ が成り立ちます．対称変換の群の観点からは正 20 面体と正 12 面体，立方体と正 8 面体とは区別することができません．一方の正多面体の面の中心と他方の正多面体の頂点とが互いに対応しています．



さて，正 20 面体を考えてみましょう．正 20 面体上の特別でない点（頂点，辺の中点，面の中心以外の点）を取り，すべての対称変換をその点に施してみましょう．すると 60 個の点が得られます．これは与えられた点の対称変換の群による軌道です．たとえば，正 20 面体の面（三角形）を選びその境界上の点，ただし頂点や辺の中点以外の点を取ってみましょう．

すると軌道はそれぞれの辺に 2 個の点からなる 60 個の点になります．

さて，サッカーボールを調べてみましょう．普通，サッカーボールは 60 個の頂点を持った 12 個の黒い 5 角形を持っています．これは，上で述べたような軌道になっています．通常のサッカーボールは三角形上の点が三つの等しい部分に分かれている場合に対応します．面の中に正 6 角形ができます．かどに近い軌道の 5 点を通る平面で正 20 面体の 6 角形のかどの部分を切り取ることができます．このようにして，12 個の正 5 角形と 20 個の正 6 角形からなるかどを落とした正 20 面体ができます．したがって，$b_2=12+20=32$ となります．また，$b_1=30+60=90$，$b_0=60$ となります．$60-90+32=2$ となり，オイラーの公式が確かめられます．

次に，かどを落とした正 20 面体の化学での応用について述べましょう．

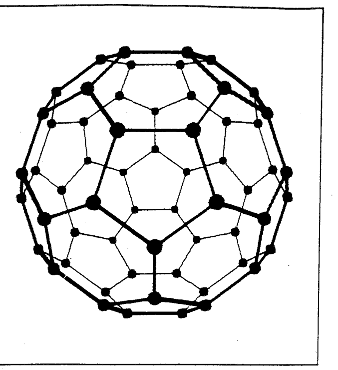


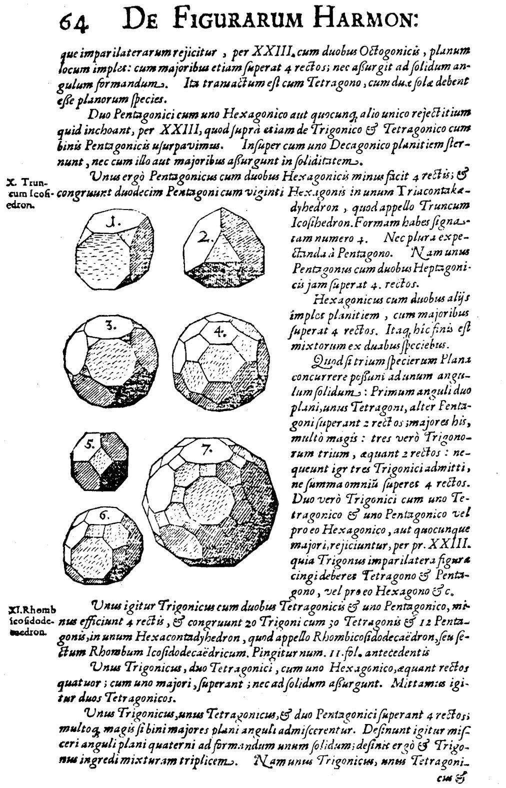
Abb. 1. Perspektivische Darstellung des fußballförmigen C_{60} Moleküls. Die Kohlenstoffatome befinden sich an den Ecken eines Polyeders, das Fünf- und Sechsecke als begrenzende Flächen hat (sog. gekapptes Ikosaeder). Im Unterschied zum idealen Polyeder mit gleichen Kantenlängen sind im realen C_{60} Molekül die Abstände benachbarter Kohlenstoffatome nicht alle identisch. Einschließlich seiner Elektronenwolke hat das Molekül etwa 1 nm Durchmesser.

Dr. Wolfgang Krätschmer, Max-Planck-Institut für Kernphysik, Heidelberg

Konstinos Fostiropulos
Donald R. Huffman, Tucson.
Arizona

60個の炭素原子が，かどを落とした正20面体の頂点に位置している炭素分子 C_{60} があります．前に述べたように，これは正20面体群の軌道です．1996年10月10日の Frankfurter Allgemaine Zeitung[1] に“サッカーボール狂の研究者達”と題する記事が載り，その中でノーベル化学賞が Harold W. Croto（英国），Robert F. Curl, Jr. と Richard E. Smalley（共に米国）に C_{60} の発見に対して与えられると報じられました．おめでとう！C_{60} の多量合成に成功したハイデルベルクのマックス・プランク核物理学研究所の Wolfgang Krätschmer も候補者としてふさわしかったと言われています．日本人の科学者もこの件では関係していることを知っています．しかしながら，ユークリッドとアルキメデスもこの賞を分かちあうのにふさわしいと思われます．

すべての面が正 n 角形で（しかし n は変わってもよい，たとえば，かどを落とした正20面体の場合は n=5,6 になります），すべての辺の長さが等しく，各かどが互いに対称変換で移すことができる多面体をアルキメデス多面体と呼びます．13個の興味深いアルキメデス多面体があります．ケプラーは，1619年に出版した「世界の調和」（Harmonices mundi）[2] の中でそれらをすべて取り上げその性質を研究しています．


64 DE FIGURARUM HARMON:

que imparilaterarum rejicitur, per XXIII. cum duobus Octogonicis, planum locum implet: cum majoribus etiam superat 4 rectos; nec assurgit ad solidum angulum formandum. Ita transactum est cum Tetragono, cum duæ solæ debent esse planorum species.

Duo Pentagonici cum uno Hexagonico aut quocunq; alio unico rejectitium quid inchoant, per XXIII, quod suprà etiam de Trigonico & Tetragonico cum binis Pentagonicis usurpavimus. Insuper cum uno Decagonico planitiem sternunt, nec cum illo aut majoribus assurgunt in soliditatem.

X. Truncum Icosiedron. Unus ergò Pentagonicus cum duobus Hexagonicis minus facit 4 rectis; & congruunt duodecim Pentagoni cum viginti Hexagonis in unum Triacontakædyhedron, quod appello Truncum Icosihedron. Formam habes signatam numero 4. Nec plura expectanda à Pentagono. Nam unus Pentagonus cum duobus Heptagonicis jam superat 4. rectos.

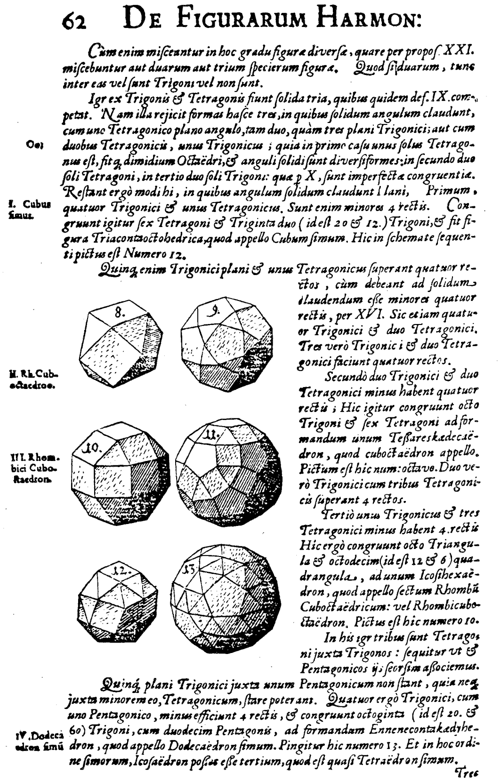
Hexagonicus cum duobus alijs implet planitiem, cum majoribus superat 4 rectos. Itaq; hic finis est mixtorum ex duabus speciebus.

Quod si trium specierum Plana concurrere possunt ad unum angulum solidum: Primum anguli duo plani, unus Tetragoni, alter Pentagoni superant 2 rectos; majores his, multò magis: tres verò Trigonorum trium, æquant 2 rectos: nequeunt igr tres Trigonici admitti, ne summa omniũ superet 4 rectos. Duo verò Trigonici cum uno Tetragonico & uno Pentagonico vel pro eo Hexagonico, aut quocunque majori, rejiciuntur, per pr. XXIII. quia Trigonus imparilatera figura cingi deberet Tetragono & Pentagono, vel pro eo Hexagono &c.

XI. Rhombicosidodecaedron. Unus igitur Trigonicus cum duobus Tetragonicis & uno Pentagonico, minus efficiunt 4 rectis, & congruunt 20 Trigoni cum 30 Tetragonis & 12 Pentagonis, in unum Hexacontadyhedron, quod appello Rhombicosidodecaëdron, seu sectum Rhombum Icosidodecaëdricum. Pingitur num. 11. fol. antecedentis

Unus Trigonicus, duo Tetragonici, cum uno Hexagonico, æquant rectos quatuor; cum uno majori, superant; nec ad solidum assurgunt. Mittamus igitur duos Tetragonicos.

Unus Trigonicus, unus Tetragonicus, & duo Pentagonici superant 4 rectos; multoq; magis si bini majores plani anguli admiscerentur. Desinunt igitur misceri anguli plani quaterni ad formandum unum solidum; desinit ergò & Trigonus ingredi mixturam triplicem. Nam unus Trigonicus, unus Tetragonicus &


62 DE FIGURARUM HARMON:

Cùm enim misceantur in hoc gradu figuræ diversæ, quare per propos. XXI. miscebuntur aut duarum aut trium specierum figuræ. Quod si duarum, tunc inter eas vel sunt Trigoni vel non sunt.

Igr ex Trigonis & Tetragonis fiunt solida tria, quibus quidem def. IX. competit. Nam illa rejicit formas hasce tres, in quibus solidum angulum claudunt, cum uno Tetragonico plano angulo, tam duo, quàm tres plani Trigonici; aut cum duobus Tetragonicis, unus Trigonicus; quia in primo casu unus solus Tetragonus est, fitq; dimidium Octaëdri, & anguli solidi sunt diversiformes: in secundo duo soli Tetragoni, in tertio duo soli Trigoni: quæ p X, sunt imperfectæ congruentiæ. Restant ergò modi hi, in quibus angulum solidum claudunt Plani, Primum, quatuor Trigonici & unus Tetragonicus. Sunt enim minores 4 rectis. Congruunt igitur sex Tetragoni & Triginta duo (id est 20 & 12.) Trigoni, & fit figura Triacontaoctohedrica, quod appello Cubum simum. Hic in schemate sequenti pictus est Numero 12.

I. Cubus simus.

Quinq; enim Trigonici plani & unus Tetragonicus superant quatuor rectos, cùm debeant ad solidum claudendum esse minores quatuor rectis, per XVI. Sic etiam quatuor Trigonici & duo Tetragonici. Tres verò Trigonici & duo Tetragonici faciunt quatuor rectos.

II. Rh. Cuboctaedron. Secundò duo Trigonici & duo Tetragonici minus habent quatuor rectis; Hic igitur congruunt octo Trigoni & sex Tetragoni ad formandum unum Tessareskædecaëdron, quod cuboctaëdron appello. Pictum est hic num: octavo. Duo verò Trigonici cum tribus Tetragonicis superant 4 rectos.

III. Rhombici Cubo-ctaedron. Tertiò unus Trigonicus & tres Tetragonici minus habent 4. rectis Hic ergò congruunt octo Triangula & octodecim (id est 12 & 6) quadrangula, ad unum Icosihexaëdron, quod appello sectum Rhombũ Cuboctaëdricum: vel Rhombicuboctaëdron. Pictus est hic numero 10.

In his igr tribus sunt Tetragoni juxta Trigonos: sequitur ut & Pentagonicos ijs seorsim associemus.

IV. Dodecaedron simũ. Quinq; plani Trigonici juxta unum Pentagonicum non stant, quia neq; juxta minorem eo, Tetragonicum, stare poterant. Quatuor ergò Trigonici, cum uno Pentagonico, minus efficiunt 4 rectis, & congruunt octoginta (id est 20. & 60) Trigoni, cum duodecim Pentagonis, ad formandam Ennenecontakædyhedron, quod appello Dodecaëdron simum. Pingitur hic numero 13. Et in hoc ordine simorum, Icosaëdron posset esse tertium, quod est quasi Tetraëdron simum.

Tres

4番目がかどを落とした正20面体（サッカーボール）です．

“… et congruunt duodecim Pentagoni cum viginti Hexagonis in unum Triacontakedyhedron, quod appello Truncum Icosihedron. Formam habes signatam numero 4.”[3]

1 ドイツの代表的な新聞の一つ
2 宇宙の和音と訳すこともできる
3 合同の12個の正5角形と20個の正6角形を寄せ集めて，かどを落とした正20面体と呼ばれる32面体ができる．図形番号4

化学者は，各頂点から3本の辺が出て正5角形と正6角形だけからなる多面体に興味を持っています．彼らは，こうした多面体の頂点に炭素原子が位置する炭素分子を発見しようとしています．古典的な化学の教えるところによれば炭素は原子価4を持っています．さて，このような多面体を使うと，それぞれの炭素原子は辺で他の3個の原子と結ばれます．したがって一つの辺では二重結合になります．このようなケクレ構造をサッカーボールに与えることができます．二つの6角形の間の辺では二重結合になります．化学では上のような性質を持った多面体を有名な建築家 Buckminister Fuller (1895-1983) にちなんでフラーレンと呼んでいます．

オイラーの公式からフラーレンでは5角形の数は常に12になります．このことを示すために凸多面体に対して同じ公式をまず証明しましょう．r 個の辺が出ている頂点の個数を $b_0(r)$ とし，r 個の辺で囲まれる面の個数を $b_2(r)$ とします ($r\geq 3$)．すると

$$\sum b_0(r)=b_0,\quad \sum b_2(r)=b_2$$

$$\sum rb_0(r)=2b_1,\quad \sum rb_2(r)=2b_1$$

が成り立ちます．すると，オイラーの公式より次の式が得られます．

$$(*)\quad \begin{array}{l} 12+\sum(r-6)\,b_0(r)+\sum(2r-6)\,b_2(r)=0 \\ 12+\sum(r-6)\,b_2(r)+\sum(2r-6)\,b_0(r)=0 \end{array}$$

最初の式は

$$12+2b_1-6b_0+4b_1-6b_2=0$$

と同値になり，これはオイラーの公式に他なりません．添数の0と2とを取り替えることによって二番目の式も同様に示されます．フラーレンに対しては，$r\neq 3$ のとき $b_0(r)=0$，$r\neq 5,6$ のとき $b_2(r)=0$ より，二番目の式から $b_2(5)=12$ が得られます．最初の式からは

$$b_0=20+2b_2(6)$$

$$b_1=30+3b_2(6)$$

$$b_2=12+b_2(6)$$

が得られます．$b_2(6)=0$ の場合は正12面体，$b_2(6)=20$ はサッカーボールにあたります．6角形の個数 $b_2(6)$ は2以上の任意の値を取りうることを示すことができます．化学の文献には（正確な引用文献を忘れてしまいました）与えられた b_0 に対してフラーレンのすべての組み合わせ論的タイプをコンピュータを使って計算したものがあります．$b_0=60$ のときは異なるタイプの数は1760になります．しかし，5角形が互いに交わらないものはただ一種類，すなわちサッカーボールしかありません．$b_0=78$ のときは21822個のタイプがありますが，5角形が互いに交わらないものは5種類だけです．

（$*$）の二番目の式から，凸多面体では

$$3b_2(3)+2b_2(4)+b_2(5)\geq 12$$

が常に成立することがいえます．この式で等号が成立するのは $r\neq 3$ に対しては $b_0(r)=0$ かつ $r\geq 7$ に対しては $b_2(r)=0$ が成り立つときに限ることが分かります．立方体，正4面体，正12面体およびすべてのフラーレンではこの条件が満足されています．

ケプラーは，一つのかどで一個の正5角形と二個の正7角形が現れることは，角度の和が360°を越えるので不可能であるといっています．

$$108^\circ+2\cdot\frac{5\cdot 180^\circ}{7}>360^\circ.$$

"Nam unus Pentagonus cum duobus Heptagonicis jam superat 4 rectos."[4]

それぞれのかどで，不足 δ を 360° からこのかどに集まるすべての角度の和を引いたものとして定義しましょう．デカルトの結果は

(＊＊)　　　　$\sum\delta_i=720^\circ$　（すべてのかどにわたる和）

と同値です．ライプニッツ（関孝和と同時代の偉大な人物）はデカルトの結果をパリの図書館で写しました．デカルトの原稿はなくなってしまいましたが，ライプニッツの写しは現存しています．

Descartes 1596–1650

Progymnasmata
de solidorum elementis
excerpta ex manuscripto Cartesii
Leibniz 1676
(vgl. P. Costabel 1987)

Si quatuor angular plani recti
ducantur per numerum angulorum
solidorum & ex producto tollantur
8 anguli recti plani, remanet
aggregatum ex omnibus angulis
planis qui in superficie talis
corporis solidi existunt

$$360^\circ\cdot e - 720^\circ = 180^\circ \sum_{r\geq 3}(r-2)f_r$$

$$e - 2 = k - f$$

$$\sum_i \delta_i = 720^\circ$$

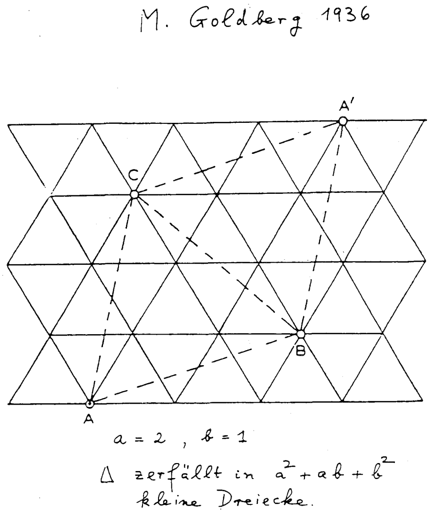
δ_i (für einen Eckpunkt i) $=$
360° − Summe der Winkel in i

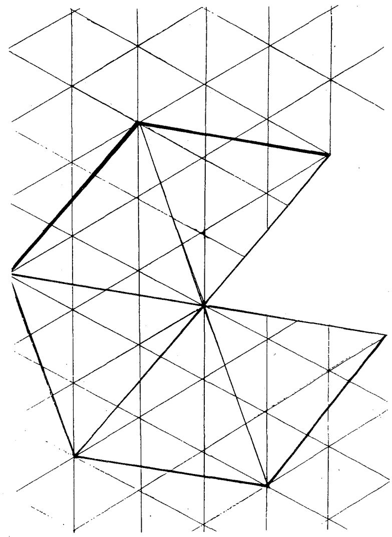
このトランスペアランシーはドイツ語とラテン語です（$k=b_1$, $f=b_2$, $f_r=b_2(r)$）．デカルトの結果はオイラーの公式と同値であることが分かります．公式（＊＊）は凸曲面の曲率に関する積分 $\int\kappa dF$ が $4\pi(=720^\circ)$ であるというガウスの有名な結果の離散版です．デカルトの肖像をのせた新しいフランスの紙幣が出るべきでしょう．次のようなお札を提案します．

ところでどのようにしてフラーレンを構成したらよいのでしょうか？沢山の方法があります．完全な調査はしていません．最近，ヒルベルトモ

[4] というのは，一つの正５角形と２つの正７角形は４直角をすでに越えてしまうからである．

ジュラー曲面と関係して Bertram Kostant “The Graph of the Truncated Icosahedron and the Last Letter of Galois” (Notices of the American Mathematical Society, 42 巻 September 1995)（かどを切った正 20 面体のグラフとガロワの最後の手紙）を調べました．このことに関しては京都大学の談話会で話しました．Kostant は P. W. Fowler and D. E. Manolopoulos, An Atlas of Fullerenes, Oxford, 1995（フラーレンの地図）に言及していますが，この本をまだ見たことはありません．ここでは M. Goldberg によって 1936 年に与えられた構成法をお話ししましょう．次の図で説明されるように正 20 面体を $20(a^2+ab+b^2)$ 個の三角形に分割することができます．





これは三角形のみからなる凸多面体の組み合わせ論的構造を与えます．

$$r \neq 3 \text{ のとき } b_2(r)=0,\quad b_2=20(a^2+ab+b^2).$$

$b_0(5)=12$ であり $r \neq 5,6$ のとき $b_0(r)=0$ でありかつ

$$b_0=10(a^2+ab+b^2)+2$$
$$b_1=30(a^2+ab+b^2)$$
$$b_2=20(a^2+ab+b^2)$$

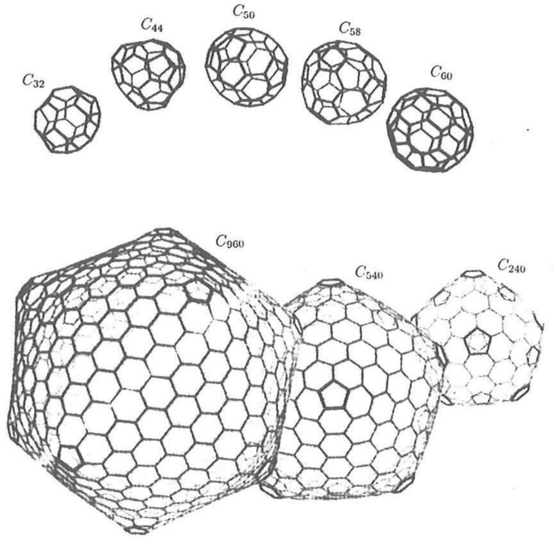
が成り立ちます．D.L.D.Caspar と A.Klug 1962（ノーベル賞）によると，ある種のウイルスはこのような多面体の頂点にキャプソメア[5]が位置した防護ボールのような構造（キャプシド[6]）を持っているとのことです．

次に双対多面体を考えましょう．面の中心は双対多面体の頂点（かど）に対応します．b_0 と b_2 とが入れ替わります．

$$b_0=20(a^2+ab+b^2)$$
$$b_1=30(a^2+ab+b^2)$$
$$b_2=10(a^2+ab+b^2)+2$$
$$b_2(6)=10(a^2+ab+b^2-1)$$

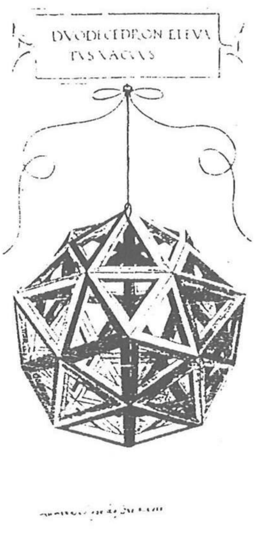
[5] キャプシドのたんぱく質サブユニット
[6] ウィルスの核酸を包む，らせん状または多面体の構造，たんぱく質よりなる

を満足するフラーレンが得られます．$a=b=1$ のときがサッカーボールです．$a=b$ のときは $b_0=60a^2$ になります．C_{60a^2} の絵をお見せしましょう．



Fullerenes
by Robert F. Curl and Richard E. Smalley,
Scientific American,
October, 1991.

双対サッカーボール（$a=b=1$，$b_0=32$）はレオナルド・ダ・ヴィンチが描いています．



Leonardo da Vinci
in Luca Pacioli
De Divina Proportione
Milano Bibliotheca Ambrosiana
1509

これは正20面体の対称性を有しており，32個のキャプソメアを持ったピコルナウイルスの防護覆い（キャプシド）に他なりません．この点に関してはH.S.M.Coxeter "Virus macromolecules and geodesic domes" 1971（ウイルス巨大分子と測地線ドーム）を参照して下さい．

［この講演はチューリッヒ工科大学とミュンヒェンのシーメンス基金で行った講演を大幅に短縮改編したものです．］

（上野　健爾　訳）