

リアルな代数幾何

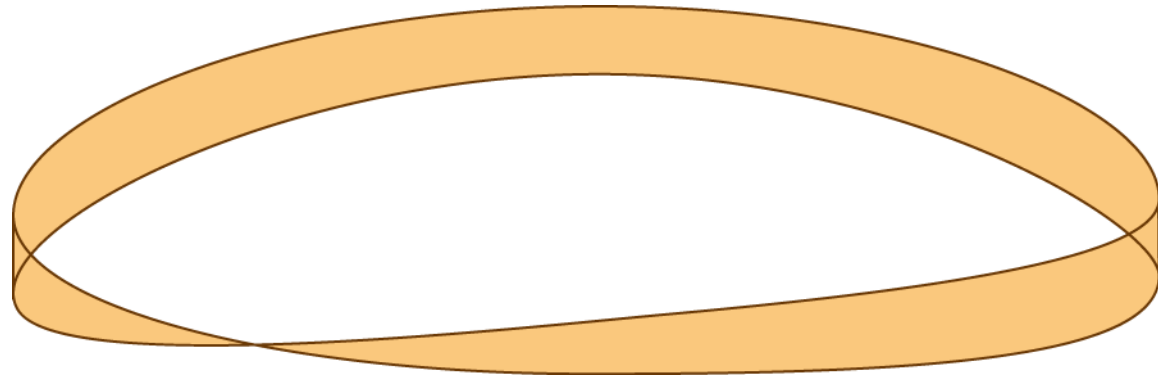
～ メビウスの帯からトロピカル曲線まで ～

首都大学東京 小林正典

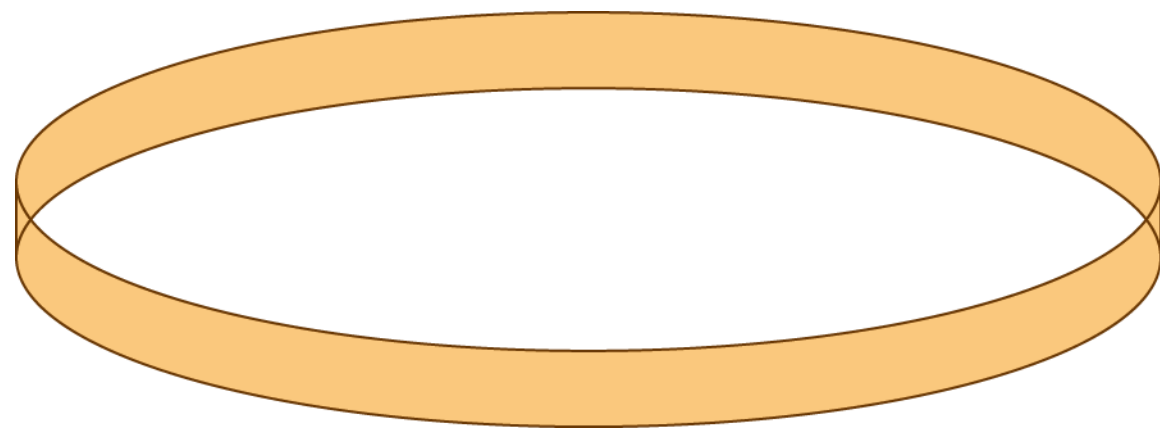
平成29年3月26日 市民講演会

第一部 メビウスの帯

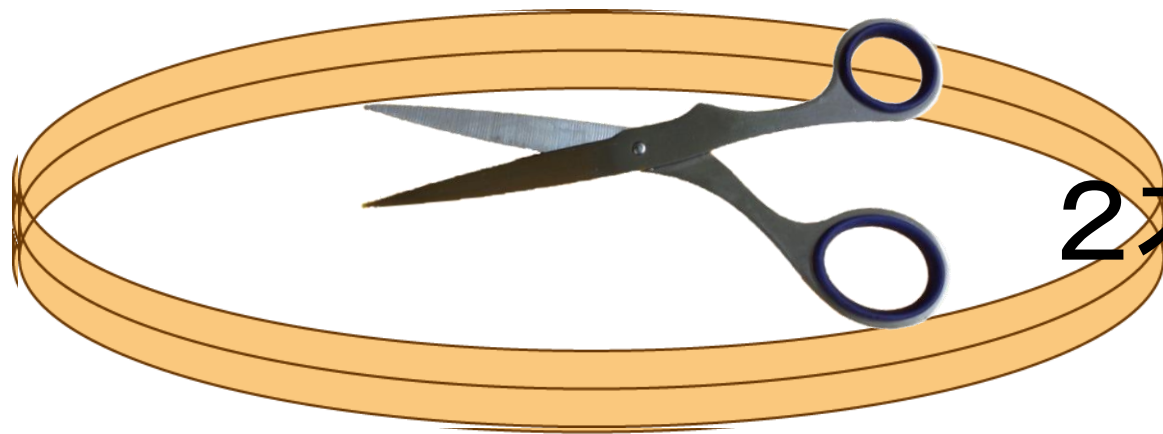
メビウスの帯



ふつうの帯

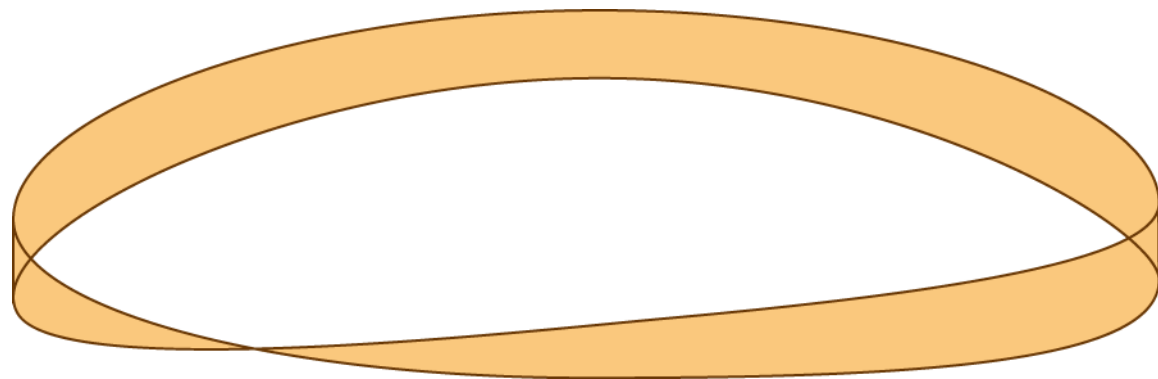


ふつうの帯を切ると

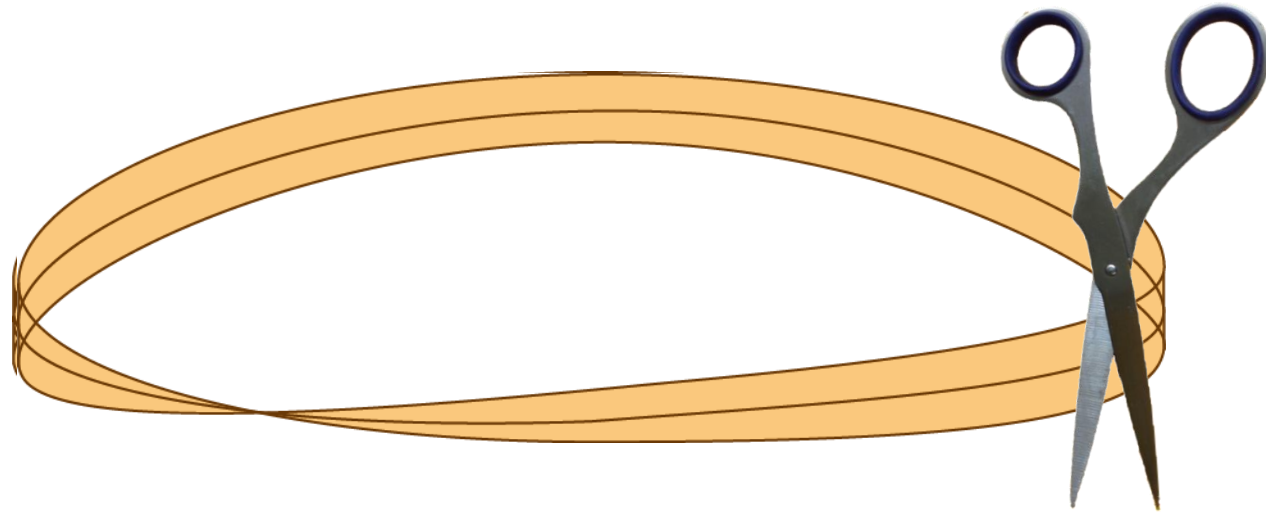


2本になる

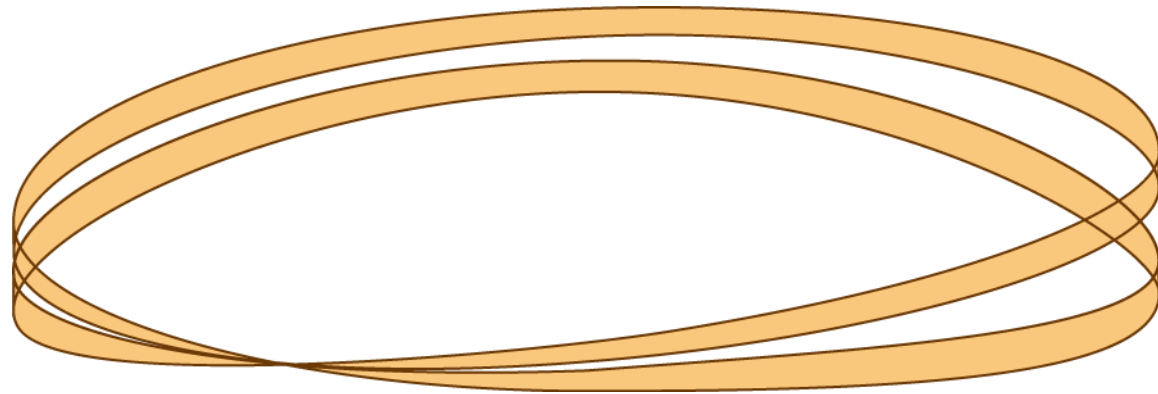
メビウスの帯を切ると



メビウスの帯を切ると

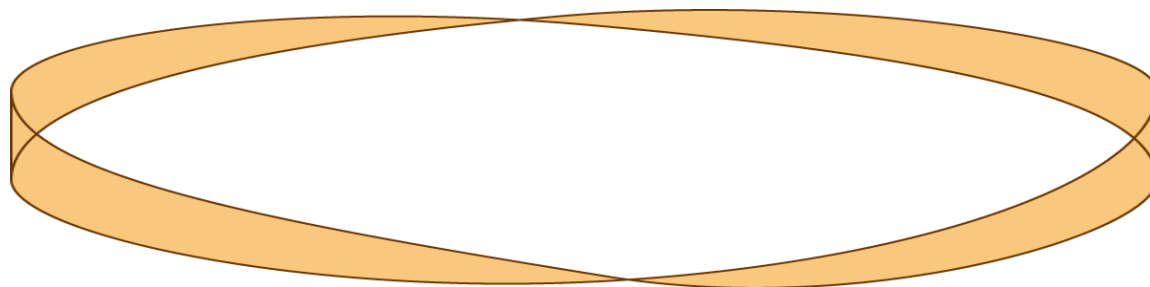


メビウスの帯を切ると

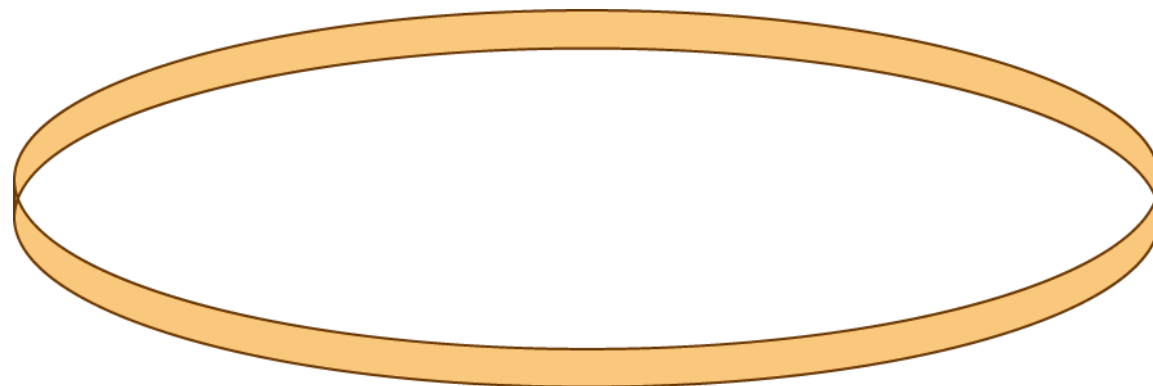


ねじれながら2周する帯になる

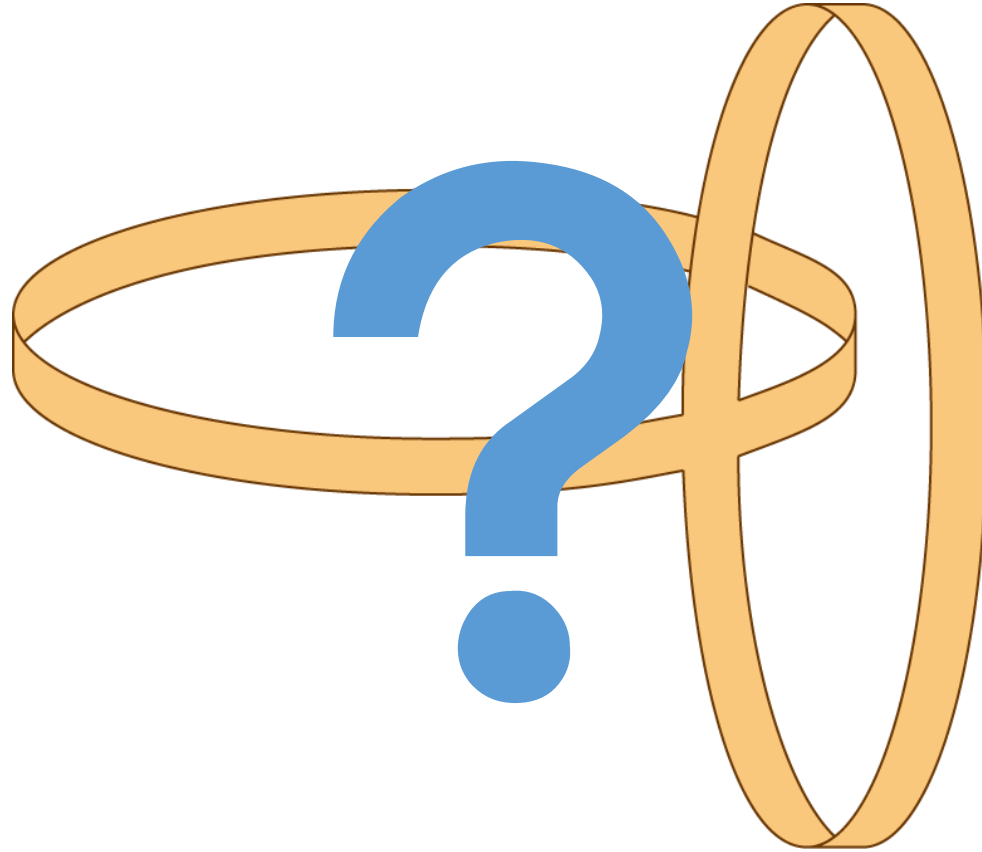
2回ねじれているが



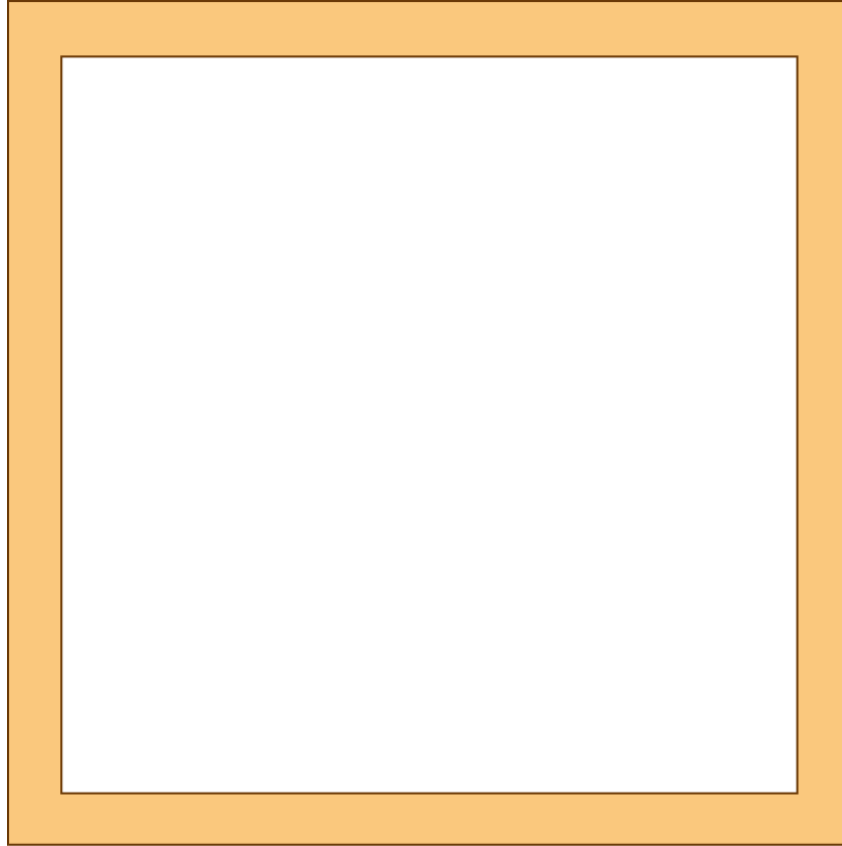
今回は区別しない



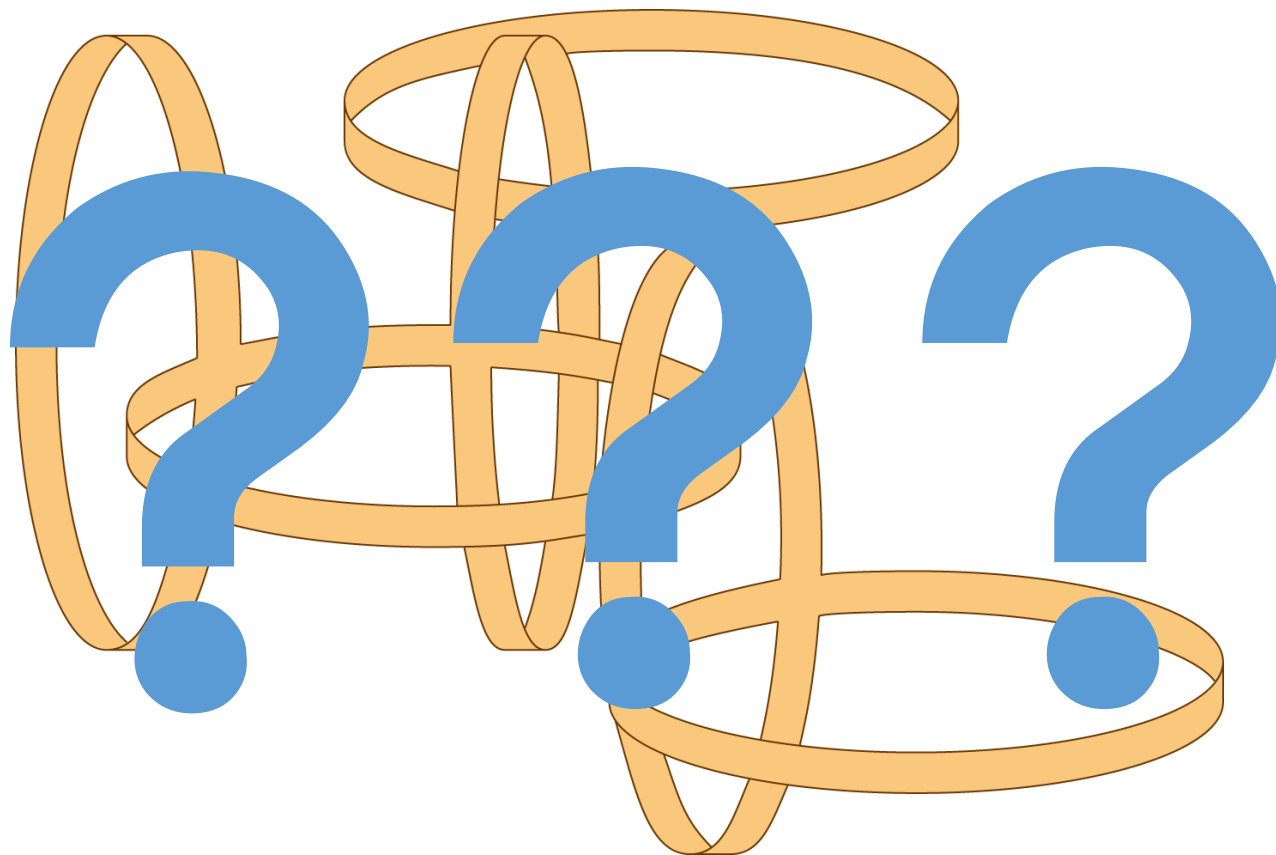
つなげた帯を切ると



つなげた帯を切るとこうなる



もっとつなげた帯を切ると？



簡単に求める3つのステップをご紹介します！

複雑なものをどう数える？

1. 扱いやすいものに置き換える

- 一対一対応

2. 単純な場合に帰着する

- 爆発

3. わかりやすく表す

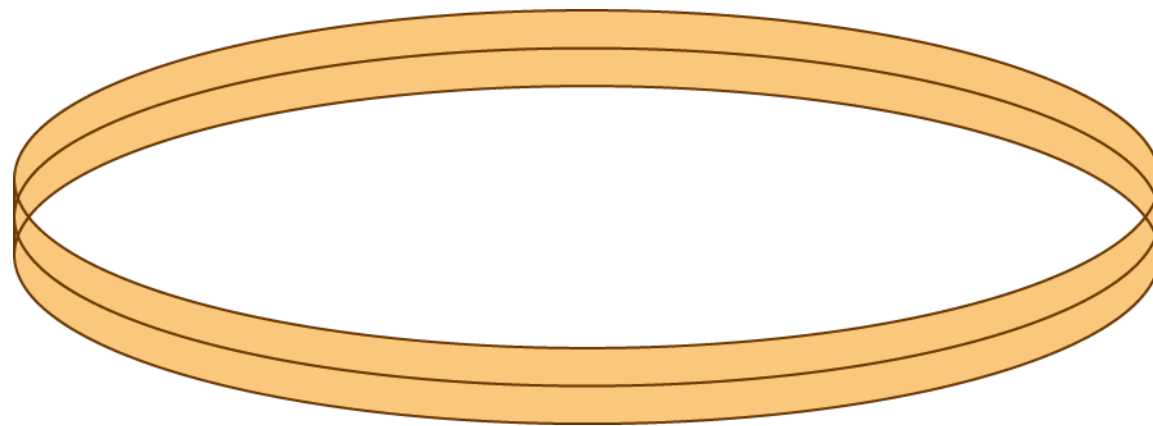
- グラフ

1. 一対一対応

- 信長 「あの山の木の本数を数えよ」
- 秀吉 縄を千本用意し、木に一本ずつ結ばせた
- 残った縄の本数から木の本数がわかる！
- 数えやすいものに「一対一対応」で置き換えることで、
漏れなく、重複なく、数え上げる （秀吉は補集合も用いた）

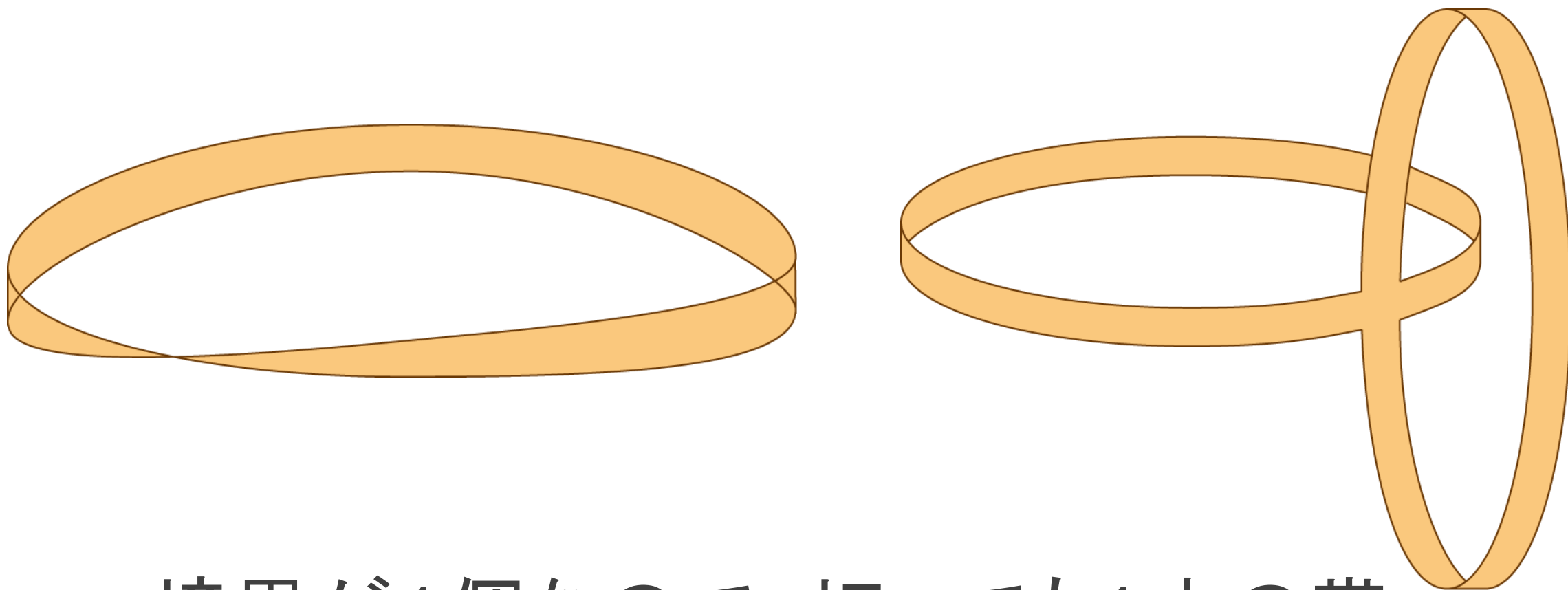
1. 一対一対応

- 切った後の帯は、切り口と元の境界で挟まれる



- 境界が n 個 $\Rightarrow n$ 個に切り分けられる

1. 一対一対応



境界が1個なので, 切っても1本の帯

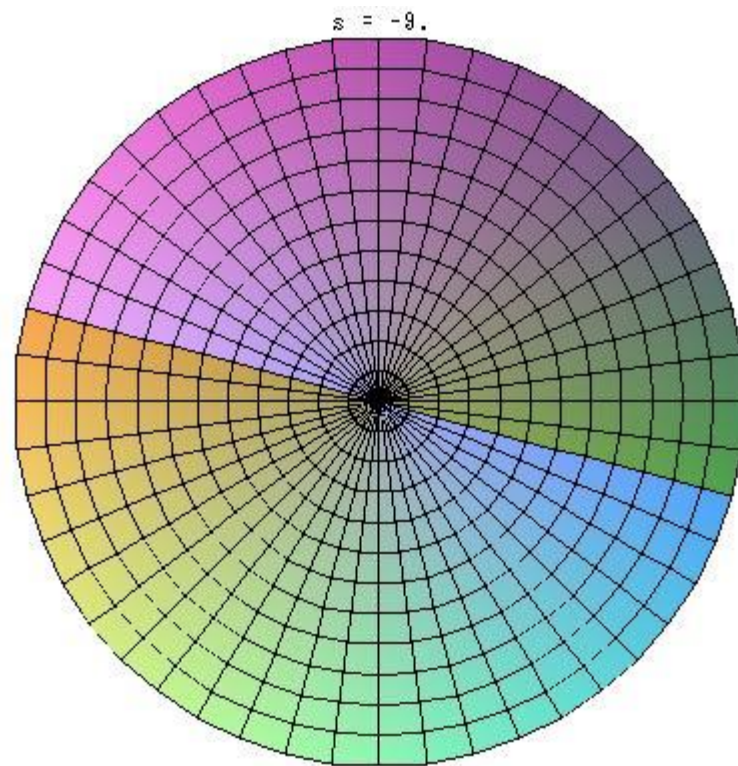
複雑なものをどう数える？

1. 扱いやすいものに置き換える
 - 一対一対応
2. 単純な場合に帰着する
 - 爆発
3. わかりやすく表す
 - グラフ

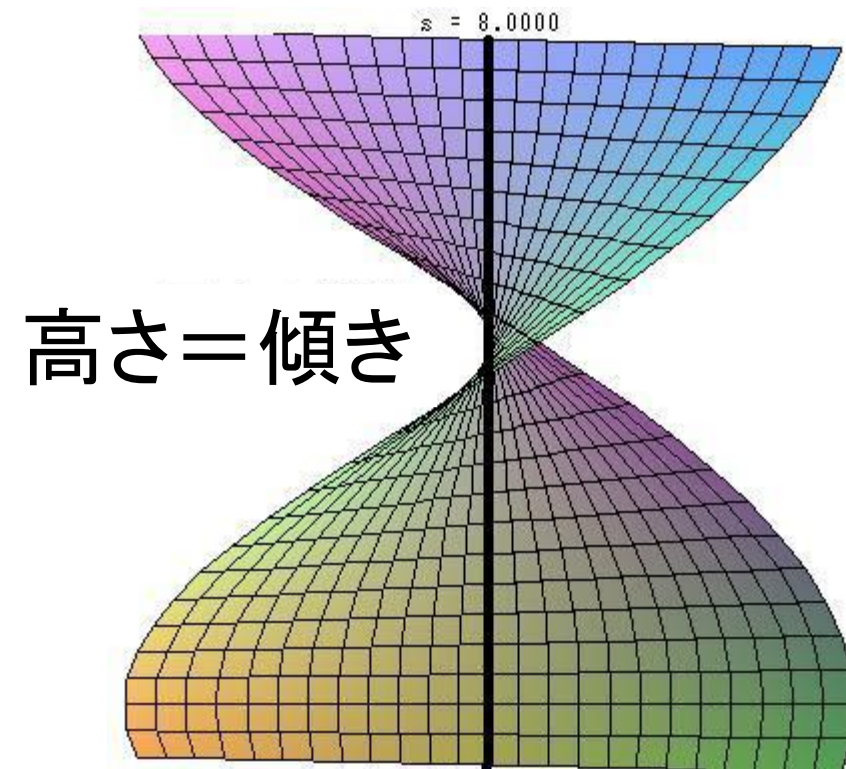
2. 爆発

- 境界を変えずに，輪の数を増やす操作
- 一点を，近づく方向ごとに違う点とみなす
- 円板からメビウスの帯ができる

2. 爆発



3. 爆発

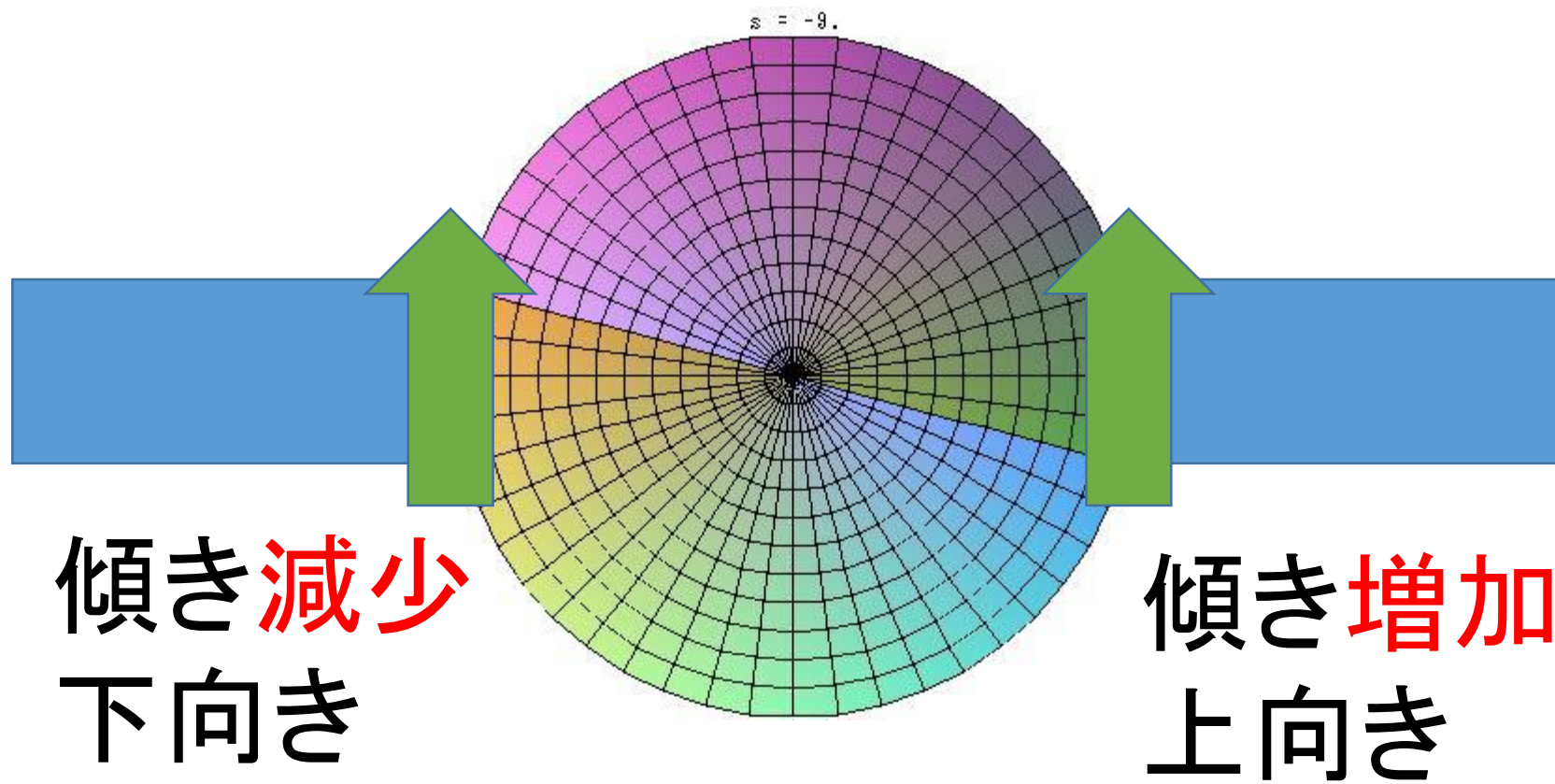


上下をつなぐ

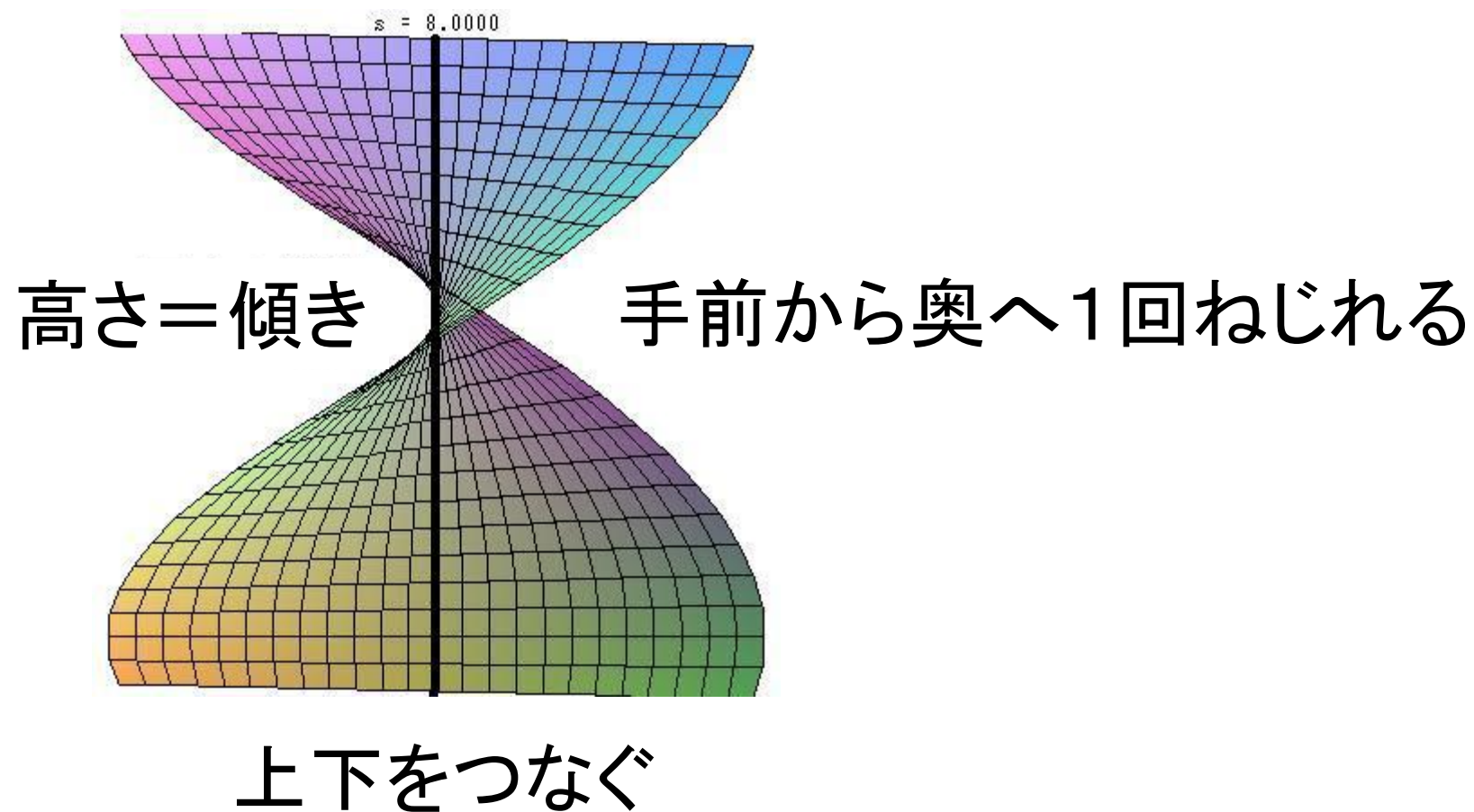
3. 爆発

- 中心の点を円に取り替える
- 境界は変わらない
- 増えた円に沿って1回ねじれる → メビウスの帯ができる
- 逆操作も可能（メビウスの帯は円板につぶせる）
- 実は、中心を通る線に沿っても1回ねじれる（次画面）

2. 爆発



2. 爆発

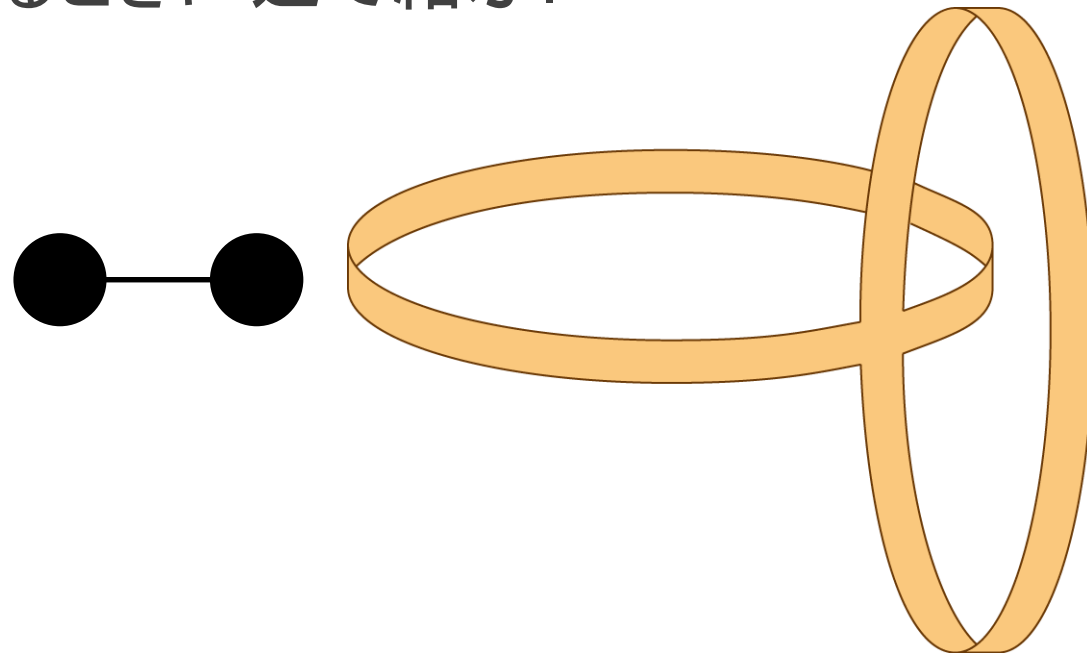


複雑なものをどう数える？

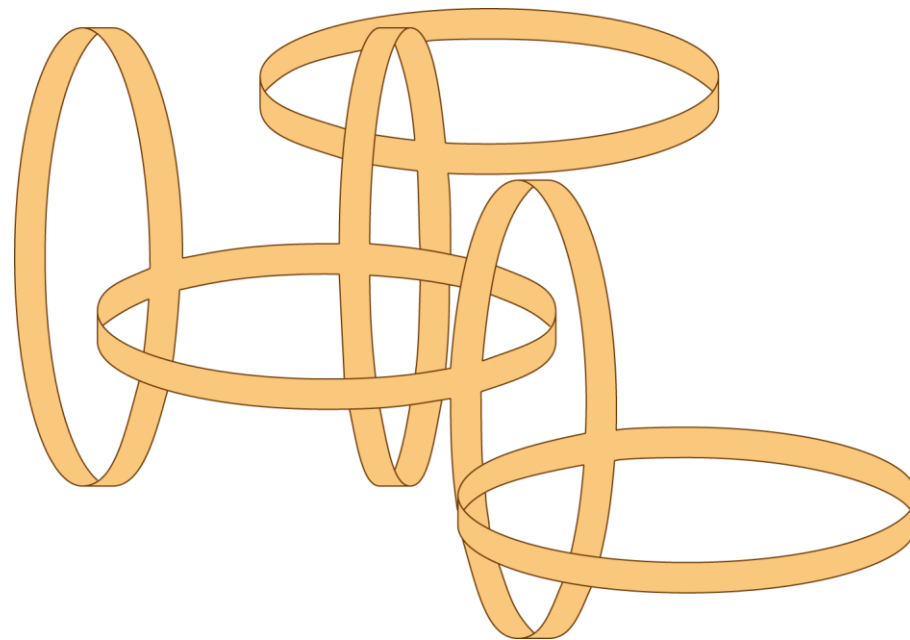
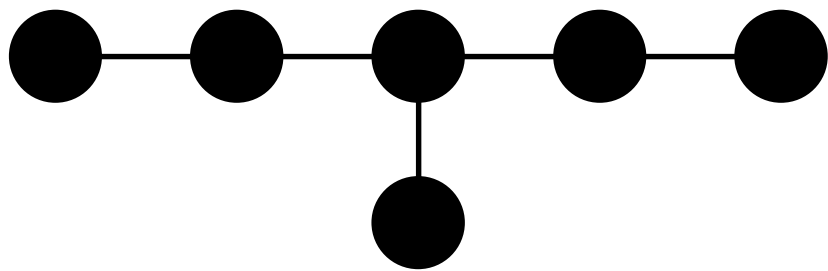
1. 扱いやすいものに置き換える
 - 一対一対応
2. 単純な場合に帰着する
 - 爆発
3. わかりやすく表す
 - グラフ

3. グラフ

メビウスの帯 (ねじれが奇数回) を ○
ふつうの帯 (ねじれが偶数回) を ●
で表し、交わるときに辺で結ぶ.



3. グラフ



3. グラフ

- 連続して爆発してみましよう

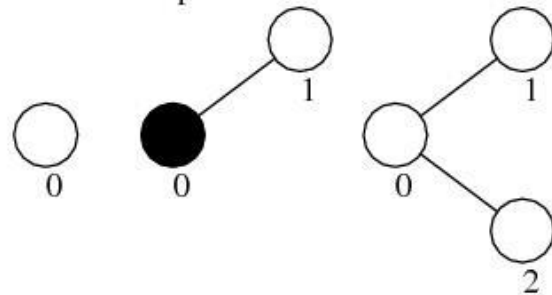
3. グラフ

(辺が2本以下の)○はつぶせる
隣の丸の白黒を入れ替える

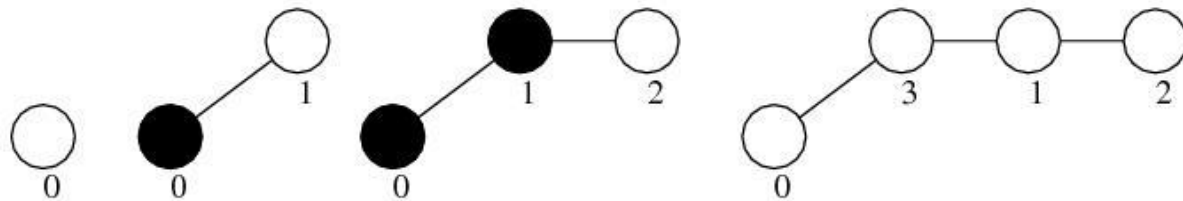
(1) Launch



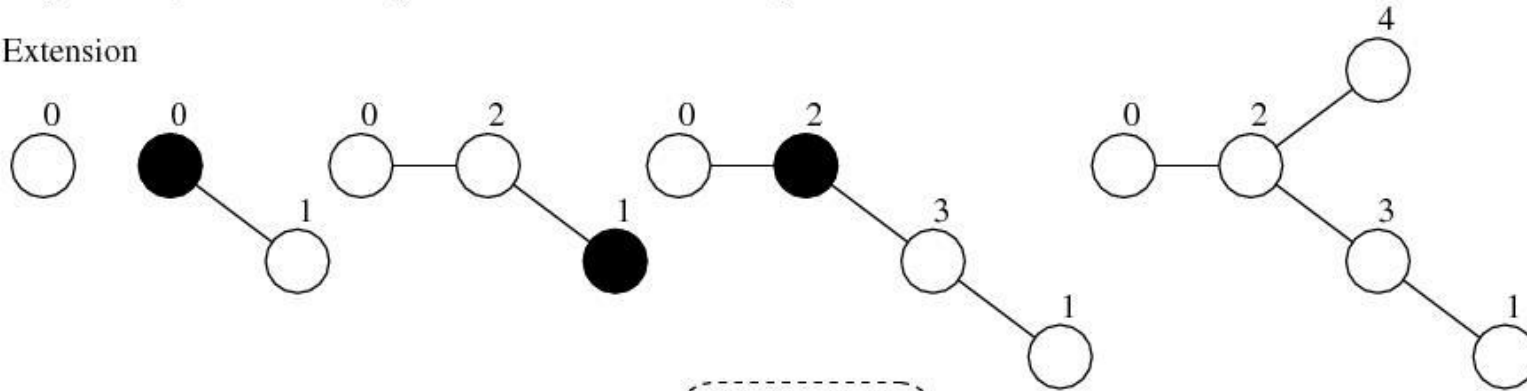
(2) Twin Extension



(3) Rifle Extension



(4) Tick Extension



グラフ $G = (V, W)$ とは有限個の頂点の集合 $V = \{P_1, \dots, P_n\}$ とそれらの間を結ぶ辺の集合 $W = \{E_1, \dots, E_m\}$ からなる図形とする。各辺 E_i は丁度 2つの頂点 P_{i_1}, P_{i_2} ($i_1 \neq i_2$) を持つ。頂点以外での辺同士の交わりは考えない。さらに、各頂点には白か黒の色がついていると仮定する。

例えば、図 1 のグラフは頂点が $n = 5$ 個、辺が $m = 4$ 個あり、辺 E_i ($i = 1, \dots, 4$) の頂点は P_i と P_5 である。 P_1, P_2 は白頂点であり、 P_3, P_4, P_5 は黒頂点である。

出発点とするグラフ G_1 (図 2) は、 $n = 1, m = 0$ であり、ただ 1つの頂点は白頂点であるとする。

与えられたグラフ $G = (V, W)$ から新しいグラフ $G' = (V', W')$ を作る 2 種類の操作を以下で定義する。これらの操作では頂点と辺の数をそれぞれ 1 ずつ増加する。

図 1

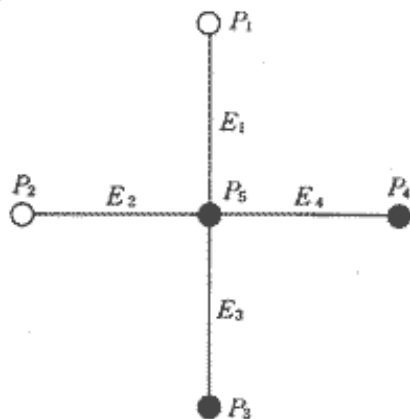
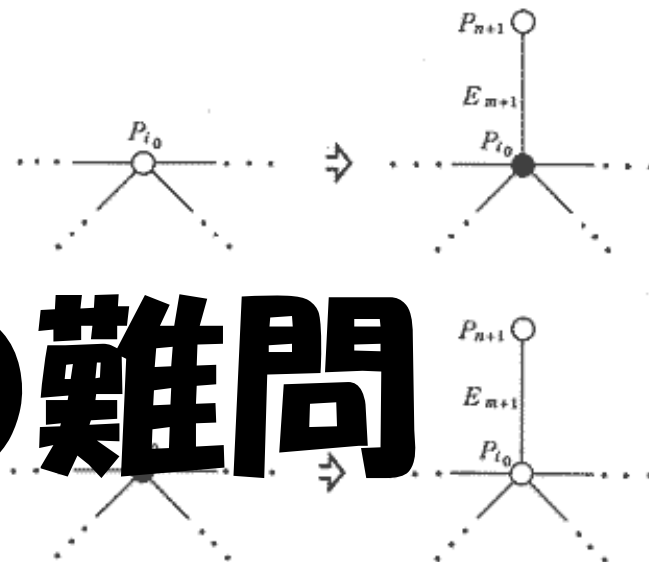


図 2



(操作 1) この操作は G の頂点 P_{i_0} を 1 つ選ぶと定まる。 V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。 W' は W に新しい辺 E_{m+1} を加えたものとする。 E_{m+1} の頂点は P_{i_0} と P_{n+1} とし、 G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。 G において頂点 P_{i_0} の色が白又は黒ならば、 G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする (図 3)。

図 3

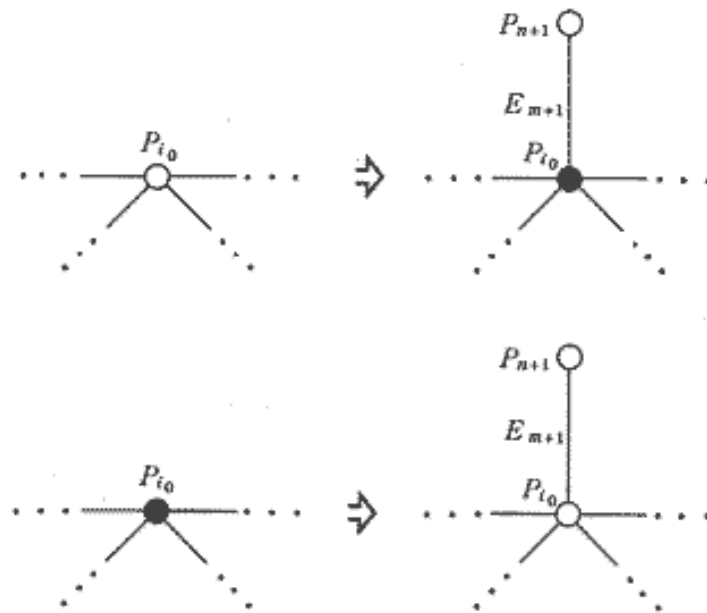


(操作 2) この操作は G の辺 E_{j_0} を 1 つ選ぶと定まる。 V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。 W' は W から E_{j_0} を取り去り、新しい辺 E_{m+1}, E_{m+2} を加えたものとする。 E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき、 E_{m+1} の頂点は P_{i_1} と P_{n+1} であり、 E_{m+2} の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする。 G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。 G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば、 G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。 P_{i_2} についても同様に变化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする (図 4)。

例題 (東大・1998年度後期)

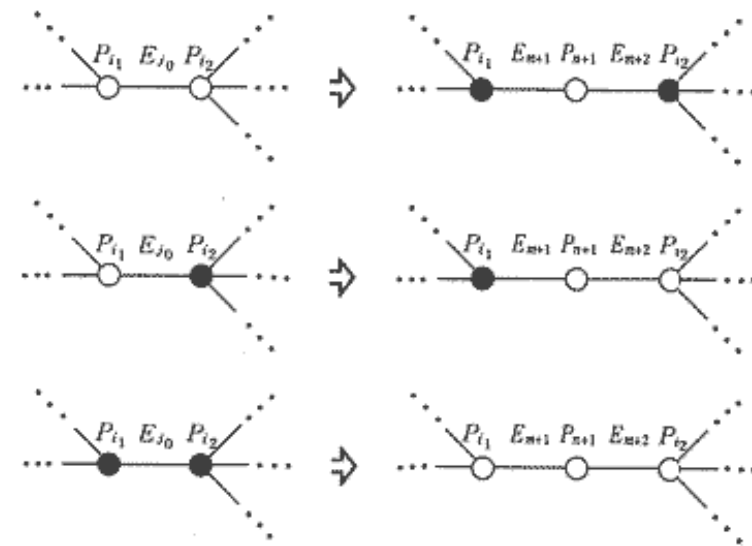
(操作1) この操作は G の頂点 P_{i_0} を1つ選ぶと定まる。 V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。 W' は W に新しい辺 E_{m+1} を加えたものとする。 E_{m+1} の頂点は P_{i_0} と P_{n+1} とし、 G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。 G において頂点 P_{i_0} の色が白又は黒ならば、 G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする (図3)。

図3



(操作2) この操作は G の辺 E_{j_0} を1つ選ぶと定まる。 V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。 W' は W から E_{j_0} を取り去り、新しい辺 E_{m+1} , E_{m+2} を加えたものとする。 E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき、 E_{m+1} の頂点は P_{i_1} と P_{n+1} であり、 E_{m+2} の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする。 G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。 G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば、 G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。 P_{i_2} についても同様に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする (図4)。

図4



出発点のグラフ G_1 にこれら2種類の操作を有限回繰り返し施して得られるグラフを可能グラフと呼ぶことにする。次の問に答えよ。

- (1) 図5の3つのグラフはすべて可能グラフであることを示せ。ここで、すべての頂点の色は白である。
- (2) n を自然数とすると、 n 個の頂点を持つ図6のような棒状のグラフが可能グラフになるために n のみたすべき必要十分条件を求めよ。ここで、すべての頂点の色は白である。

図5

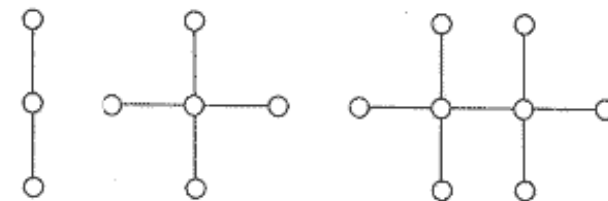


図6



グラフの操作に対し，爆発を対応させる

- ○は3つずつつぶせる

$\triangle - \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \rightarrow \triangle - \bigcirc - \bullet \rightarrow \blacktriangle - \bigcirc - \rightarrow \triangle$

- ○の個数を3で割って，余り0, 1のとき：つぶせる
- 余り2のとき： $\rightarrow \bigcirc - \bigcirc \rightarrow \bullet$ （ふつうの帯）
- 境界は2個なので円板にできない．

(2)の略解

答： 白丸の個数 n を 3 で割った余りが 0 または 1 であること.

•**必要性** 白丸を 1, 黒丸を 0 に対応させ, グラフを数列

$$s = a_1 a_2 \dots a_n$$

で表す. 関数(完全不変量) $g(s) \in \{0,1\}$ を漸化式

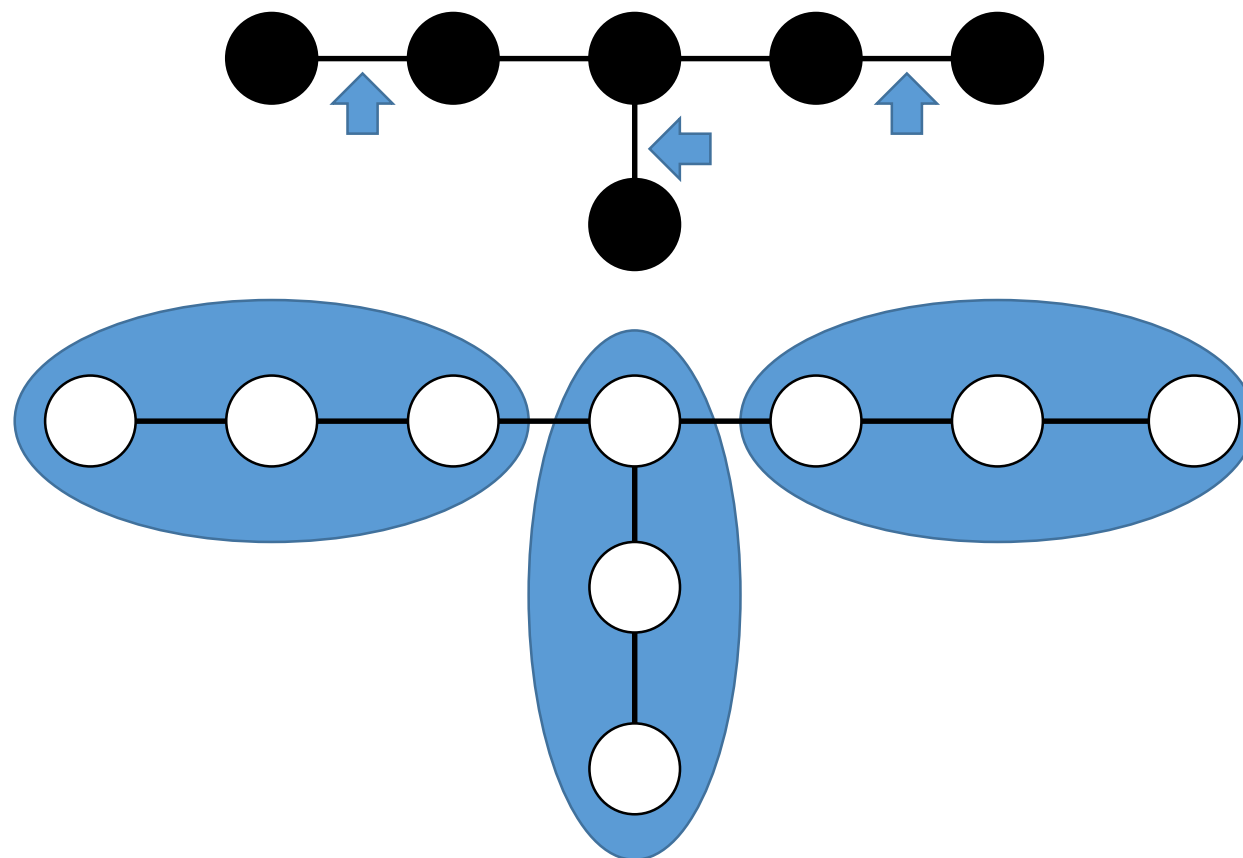
$$g(s) = a_n g(a_1 \dots a_{n-1}) + g(a_1 \dots a_{n-2}) \text{ を 2 で割った余り}$$

$$g() = 1, \quad g(a) = a \quad (a = 0,1)$$

で定めると, $g(s)$ は各操作で不変である.

•**十分性** 他の部分を変えずに白丸を 3 個連続で増やせる.

問題の解答



円板につぶせたので境界は1個. 1本になる.

複雑なものをどう数える？

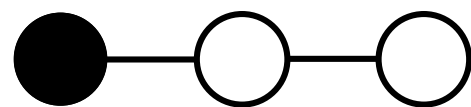
1. 扱いやすいものに置き換える
 - 一対一対応
2. 単純な場合に帰着する
 - 爆発
3. わかりやすく表す
 - グラフ

背景にあるのは交点数

- ふつうの帯が0, メビウスの帯が1とは？
- 中心線の自分自身との交点数
- 中心線を少しずらしたとき, 元と交わる点の個数は, 偶奇が定まる
- 公式 [K-Kuo][K] グラフが木のとき次が成り立つ.
切ったときの個数 = 中心線たちの交点行列の余階数 + 1
つぶせる $\Leftrightarrow$ 交点行列が正則

交点行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

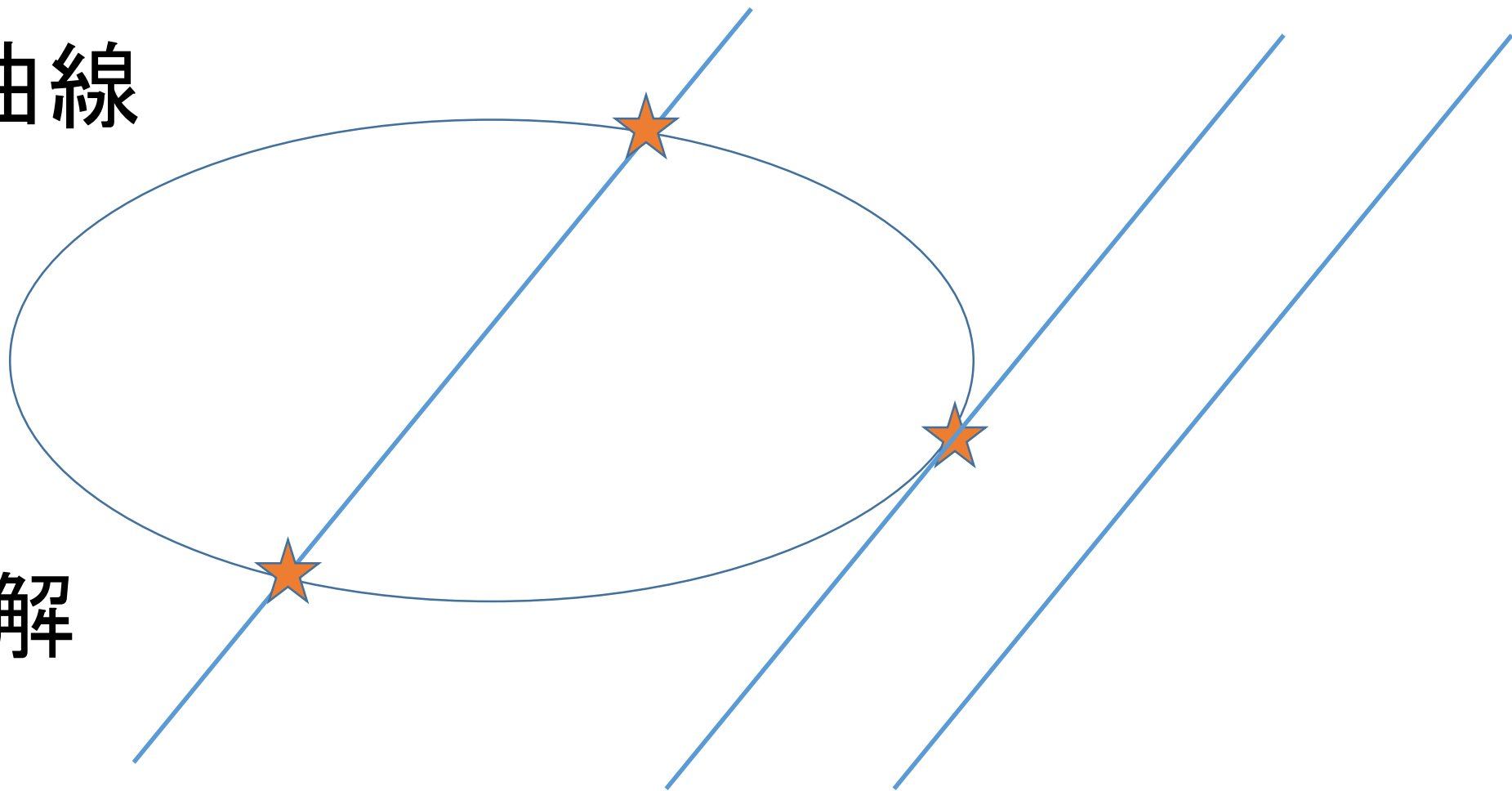


正則行列なので、境界は1個・つぶれる

第二部 トロピカル曲線

平面曲線の交点数

直線と2次曲線

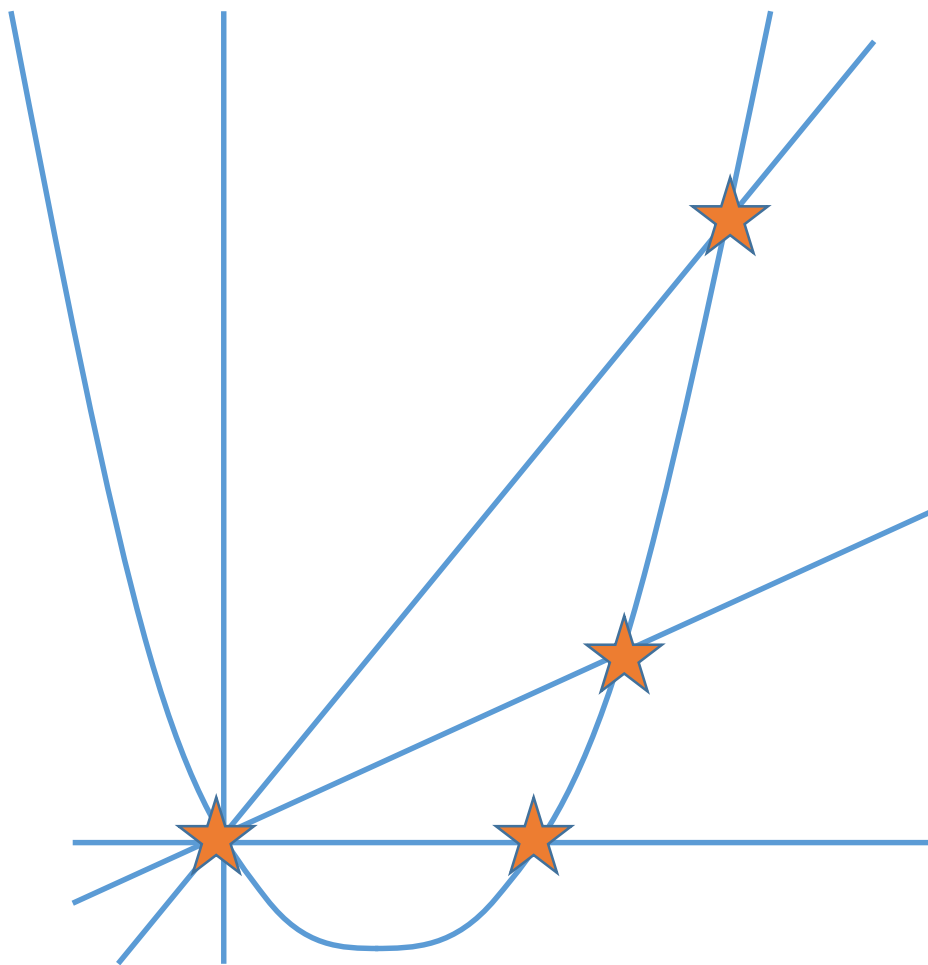


重解, 虚数解

平面曲線の交点数

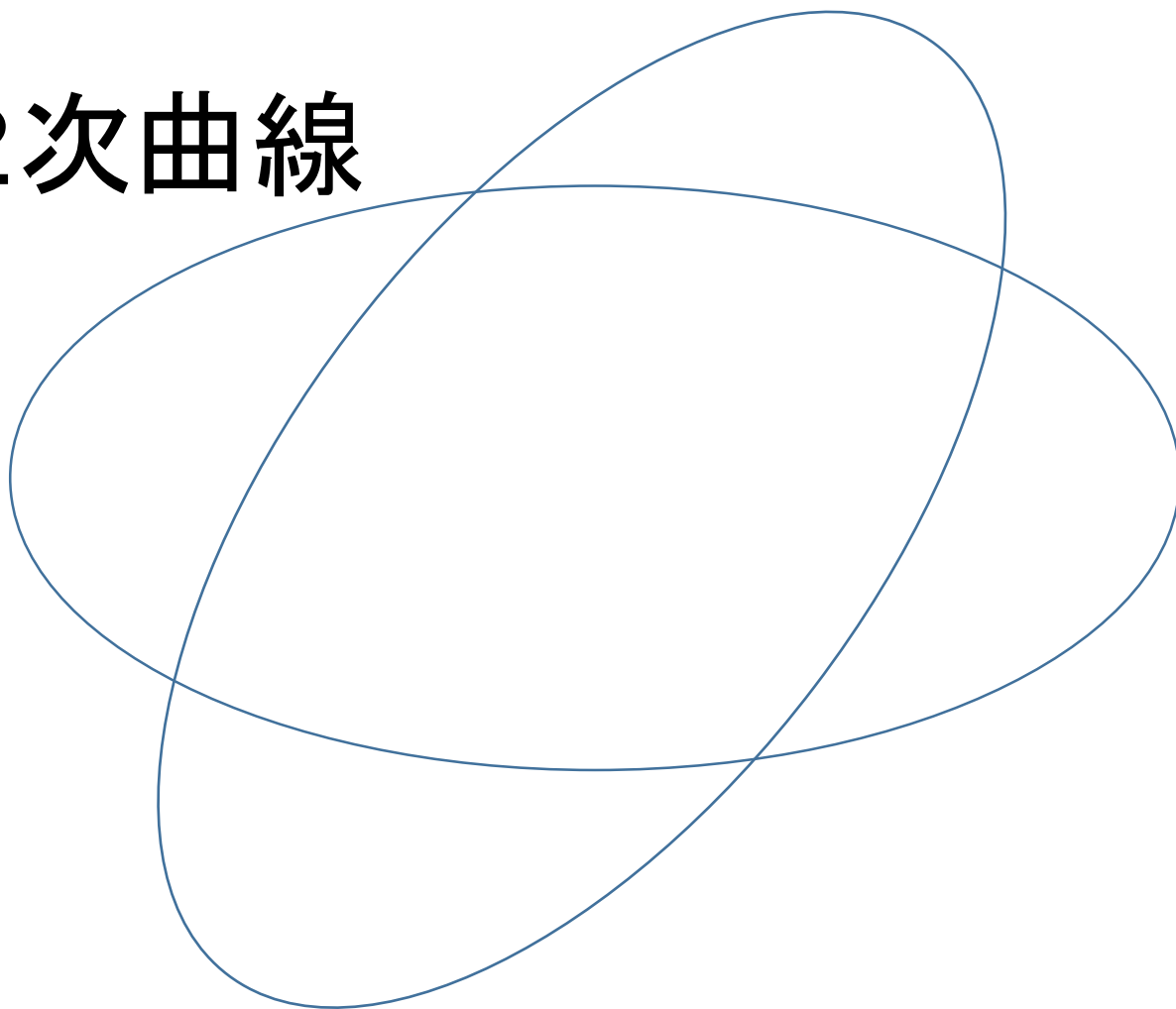
直線と2次曲線

無限遠



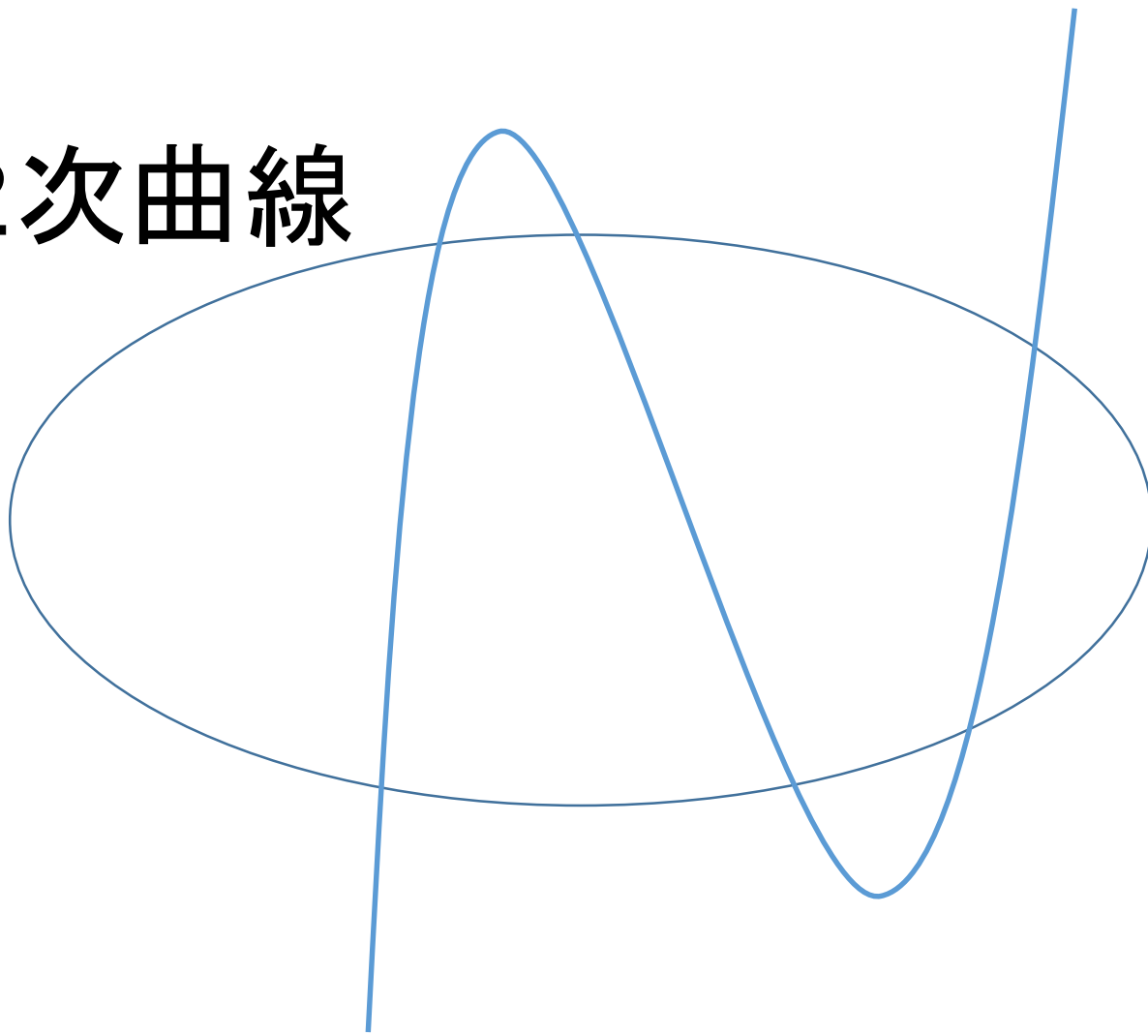
平面曲線の交点数

2次曲線と2次曲線



平面曲線の交点数

3次曲線と2次曲線

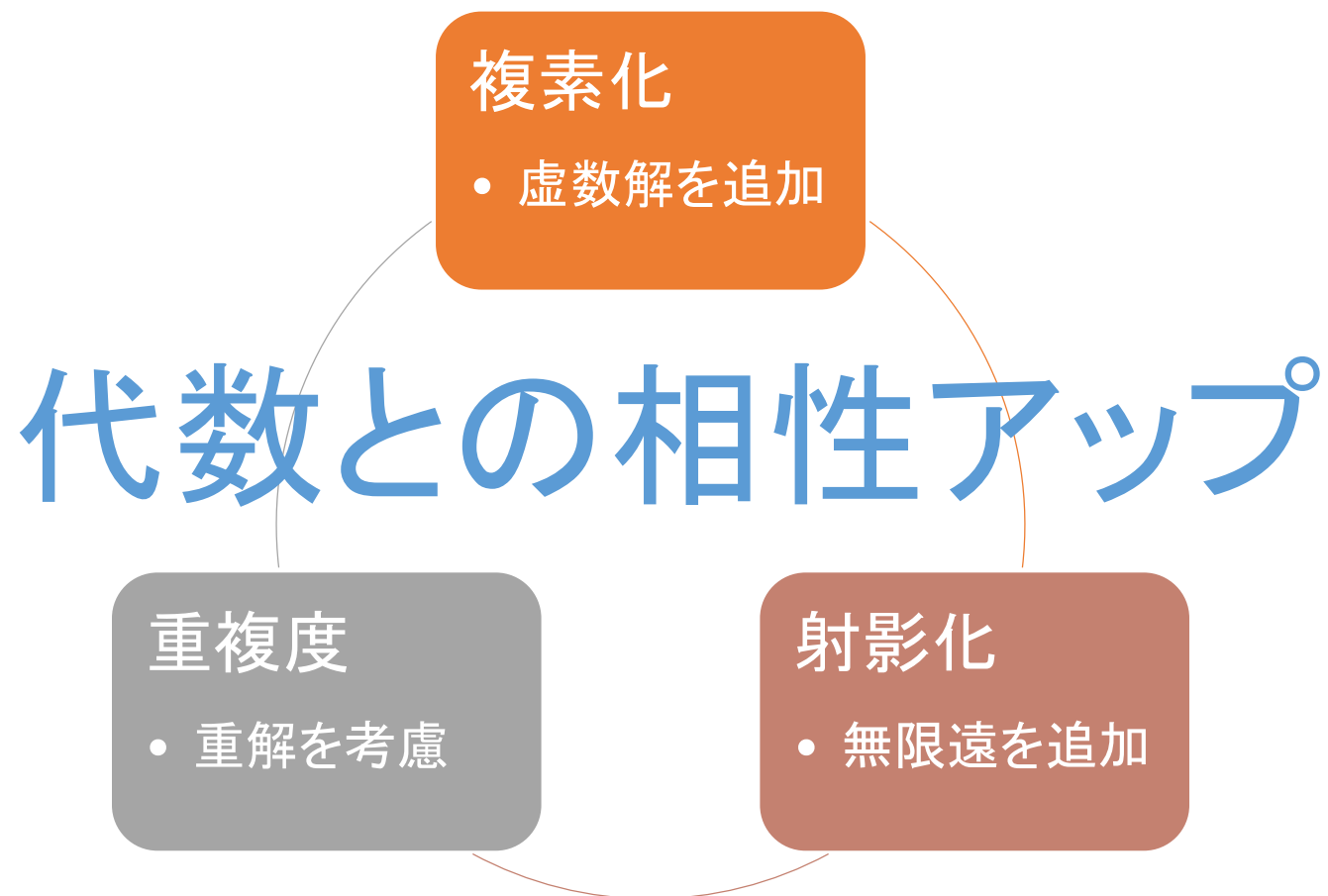


平面曲線の交点数

共通成分のない実平面曲線に対し



平面曲線の交点数



平面曲線の交点数

共通成分のない複素射影平面曲線に対し



ベズー(Bézout)の定理

代数の可視化

幾何

交点数

可視性

実

点が不足

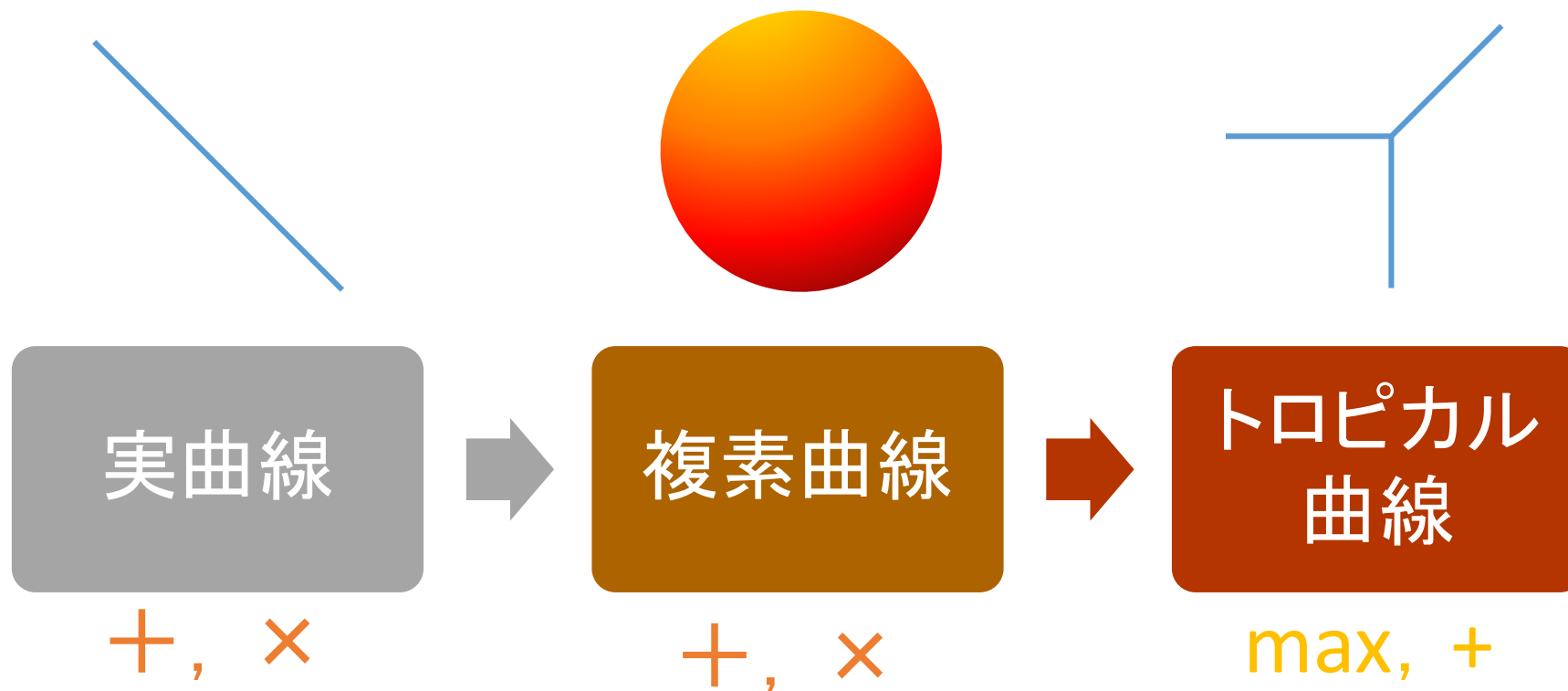
曲がる

複素
射影

ベークの
定理

高次元

トロピカル化 次元が再び半分に！



$$F(X, Y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_t |f(x, y)|$$

トロピカル化 (超離散化, 脱量子化)

$$F(X, Y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_t |f(x, y)|$$

- 実部を考える代わりに, 絶対値をとる
- $+$ $\rightarrow$ Max $\times \rightarrow +$
- トロピカル代数 (MaxPlus代数)
- $c x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \rightarrow a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n + b$
- 多項式 $\rightarrow$ それらの最大

トロピカル化

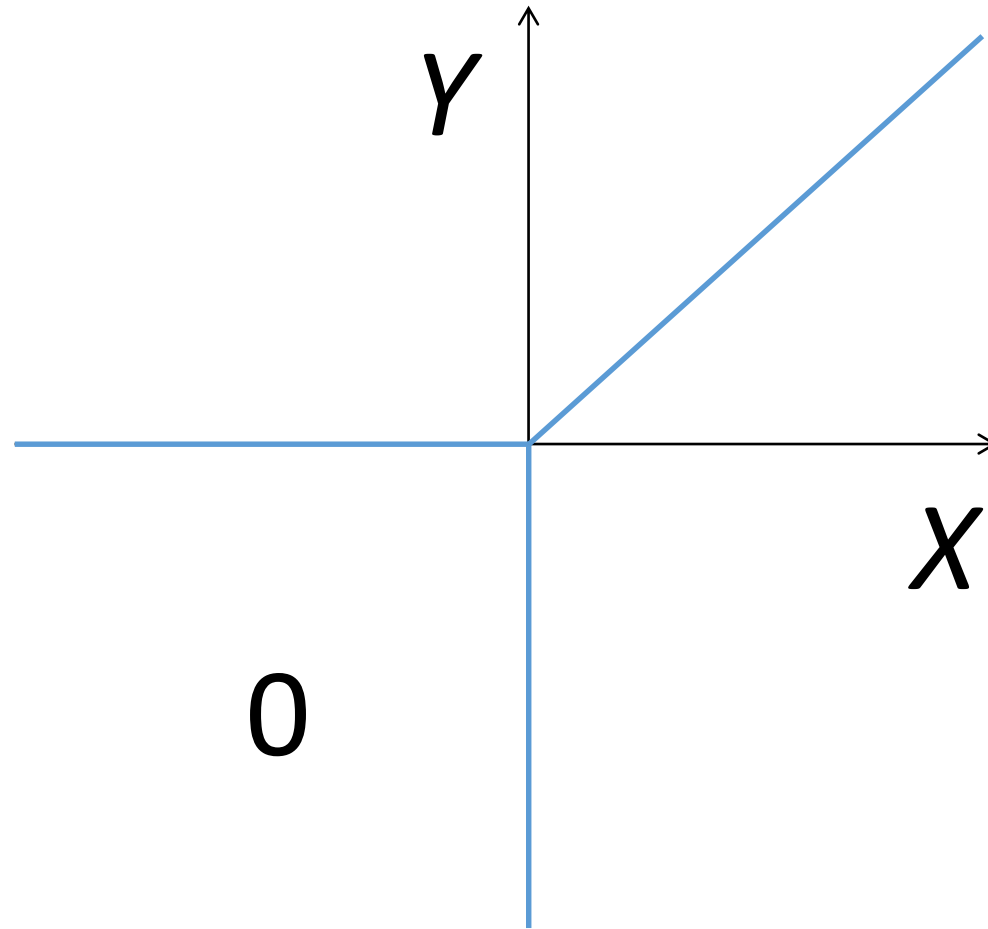
- フランスの情報科学者たち
この代数の研究者Imre Simon（ブラジル在住）
に因んでトロピカル代数と呼ぶ
- Mikhalkin, Sturmfels（2003頃）
対応する幾何をトロピカル幾何と呼ぶ

平面トロピカル曲線

平面曲線 $f(x, y) = 0$ のトロピカル化
(Bergman扇)

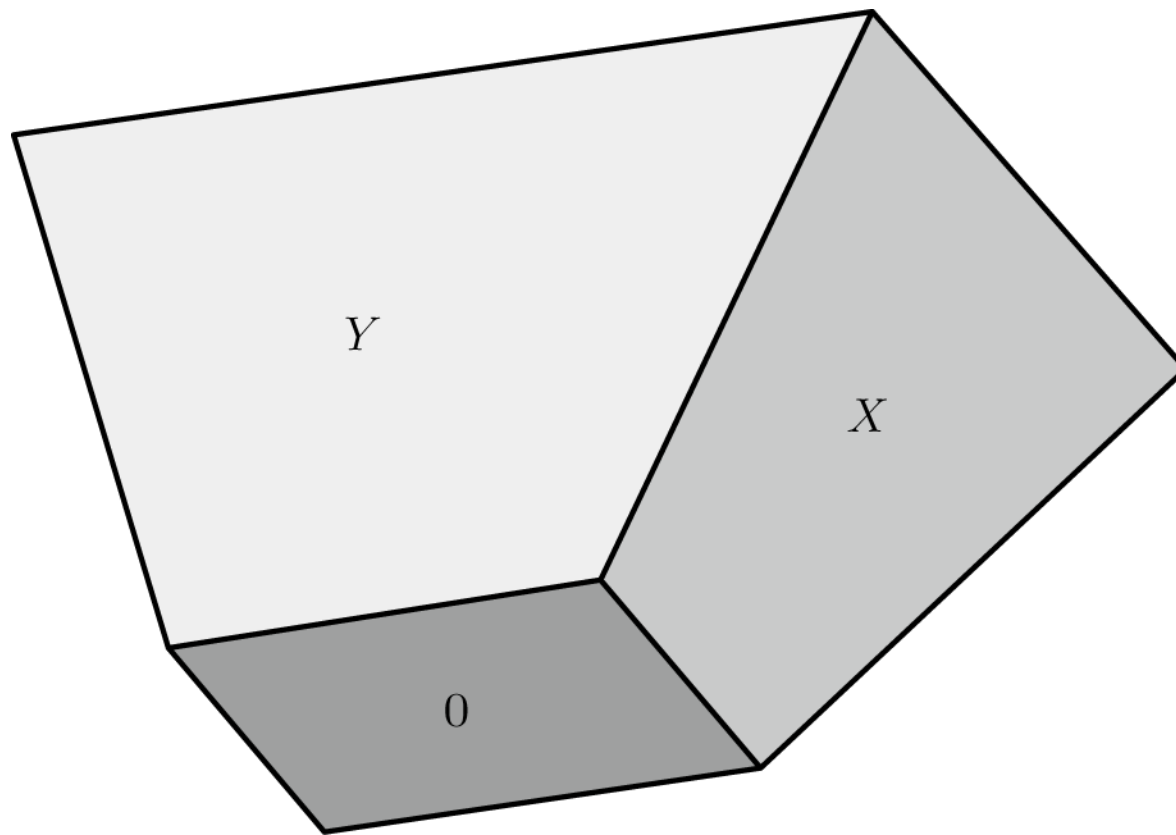
= $f(x, y)$ のトロピカル化 $F(X, Y)$ の複数項
が同時に最大となる点 [Kapurano]

トロピカル直線



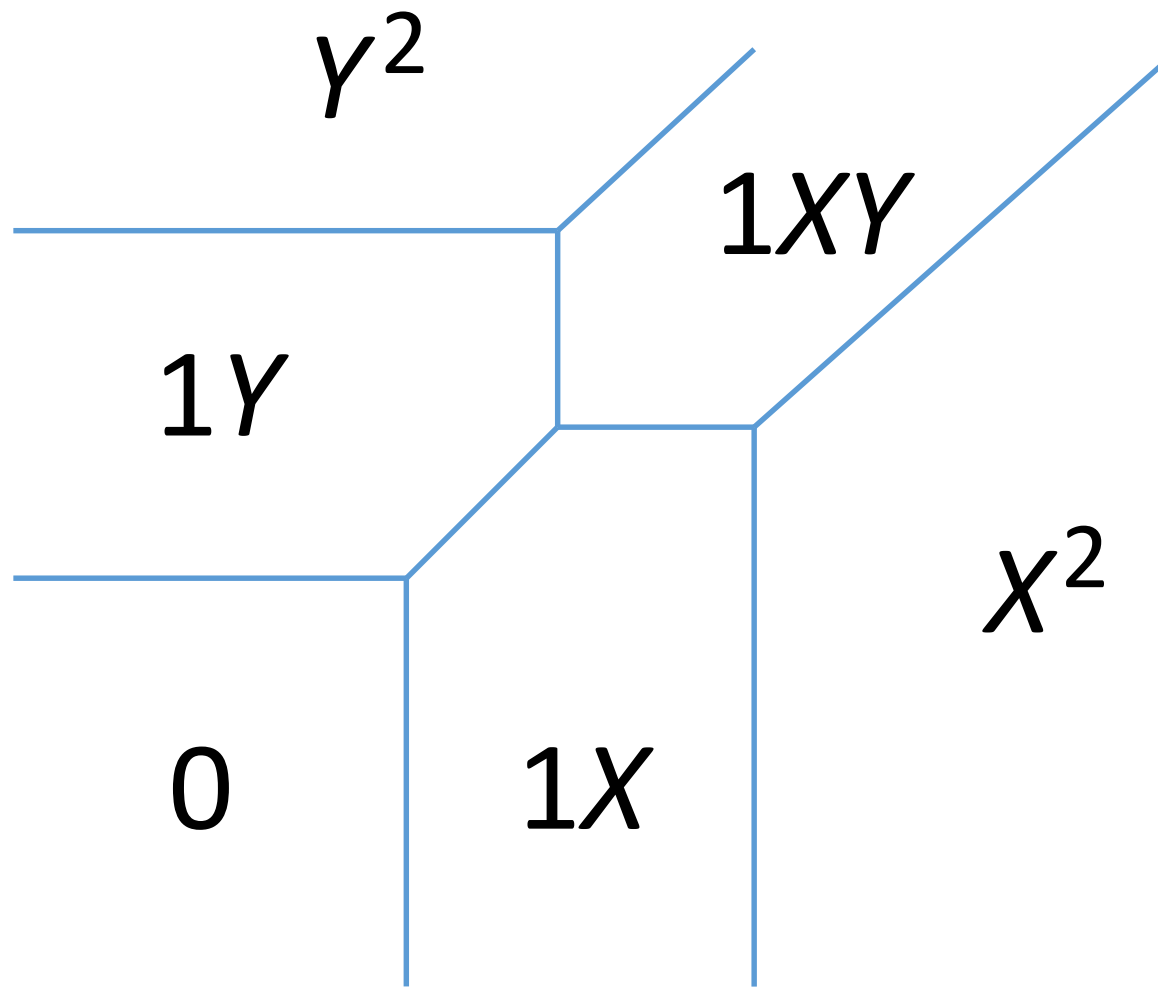
$$F = \max(X, Y, 0) = "X+Y+0"$$

トロピカル直線



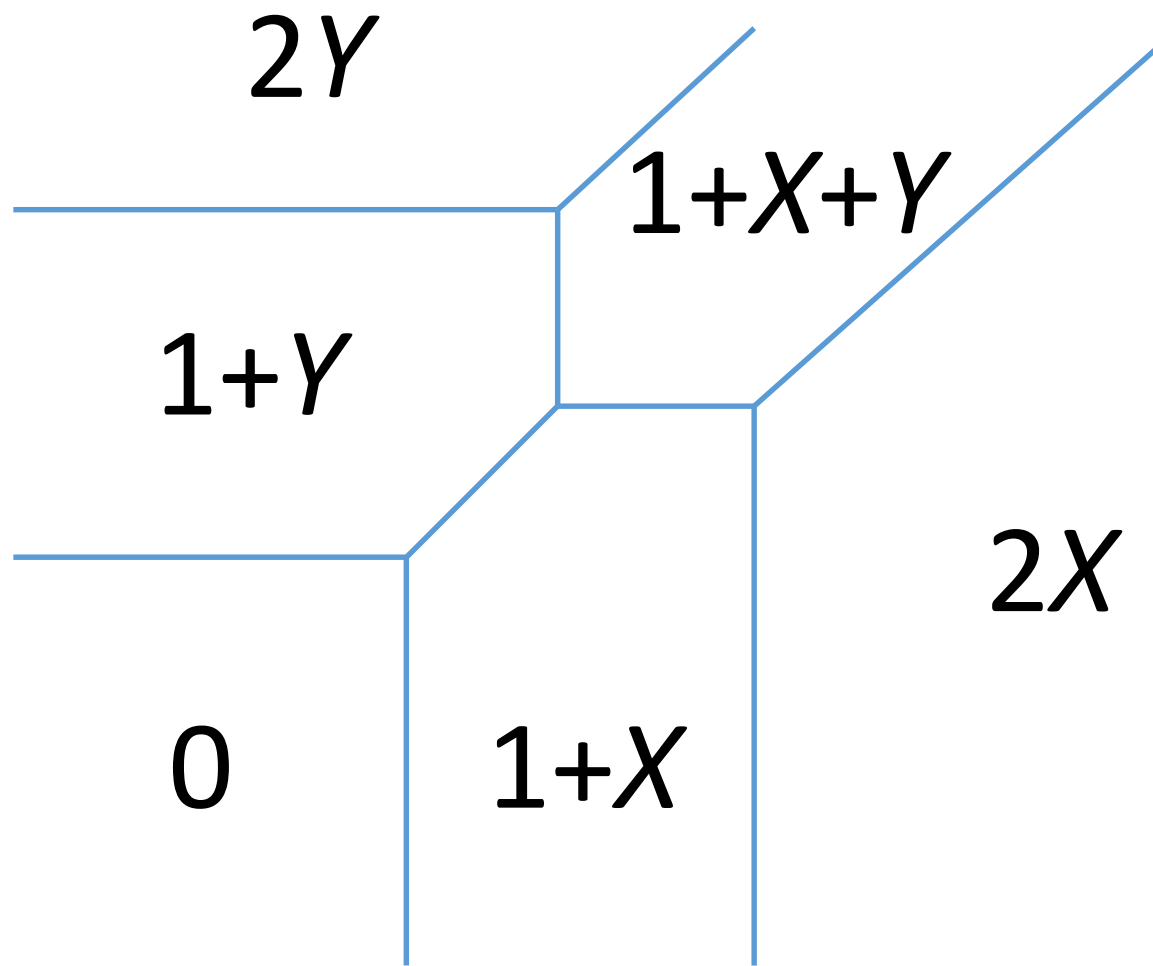
$$F = \max(X, Y, 0) = "X+Y+0"$$

(トロピカル)2次曲線の例



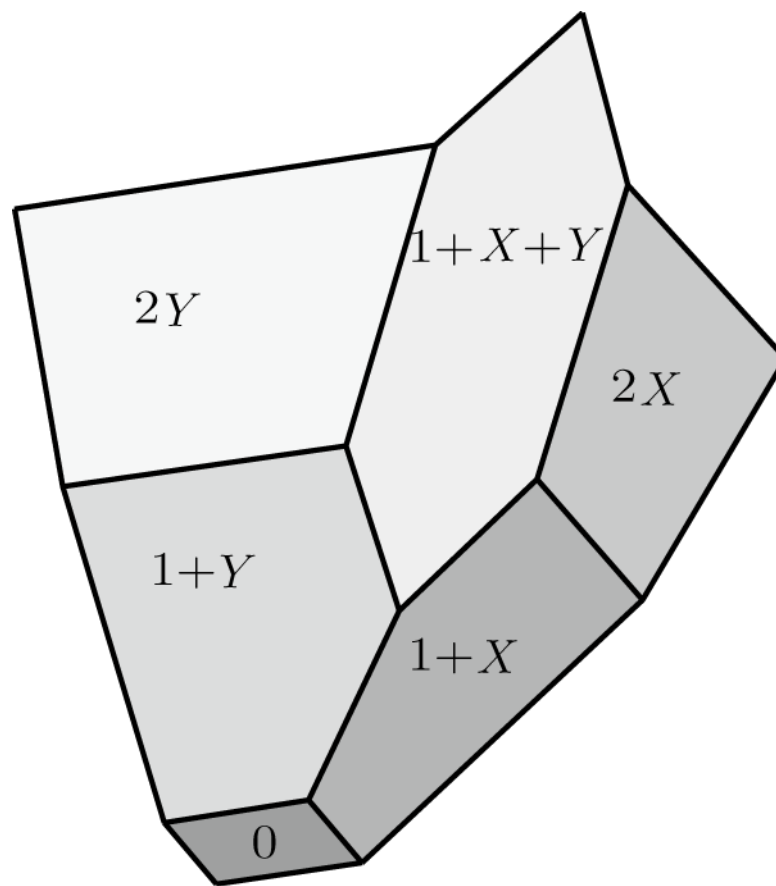
$$F = "X^2 + 1XY + Y^2 + 1X + 1Y + 0"$$

(トロピカル)2次曲線の例



$$F = \max\{2X, 1+X+Y, 2Y, 1+X, 1+Y, 0\}$$

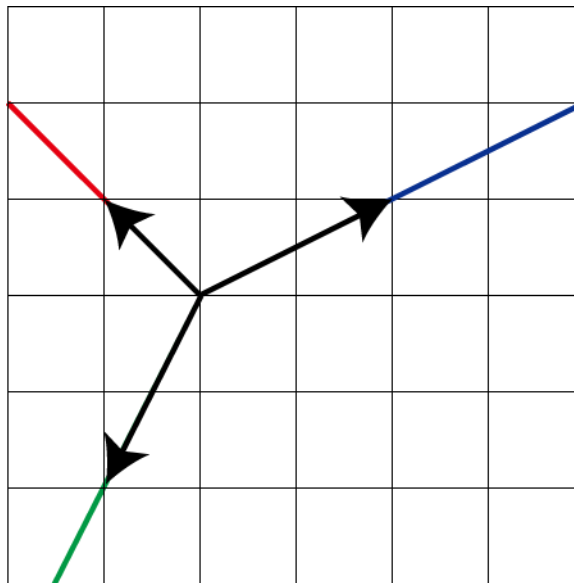
(トロピカル) 平面2次曲線の例



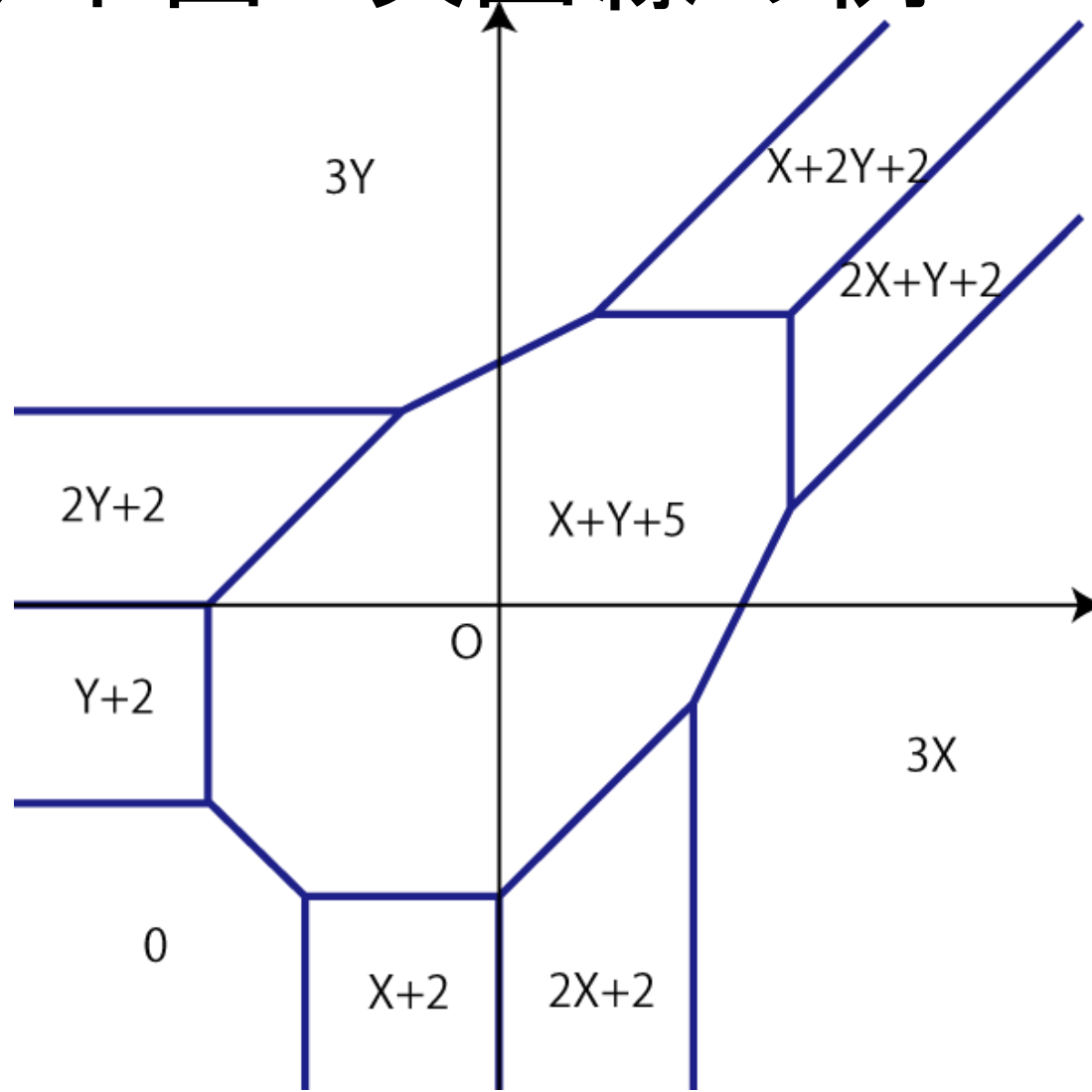
$$F = \max\{2X, 1+X+Y, 2Y, 1+X, 1+Y, 0\}$$

平面トロピカル曲線

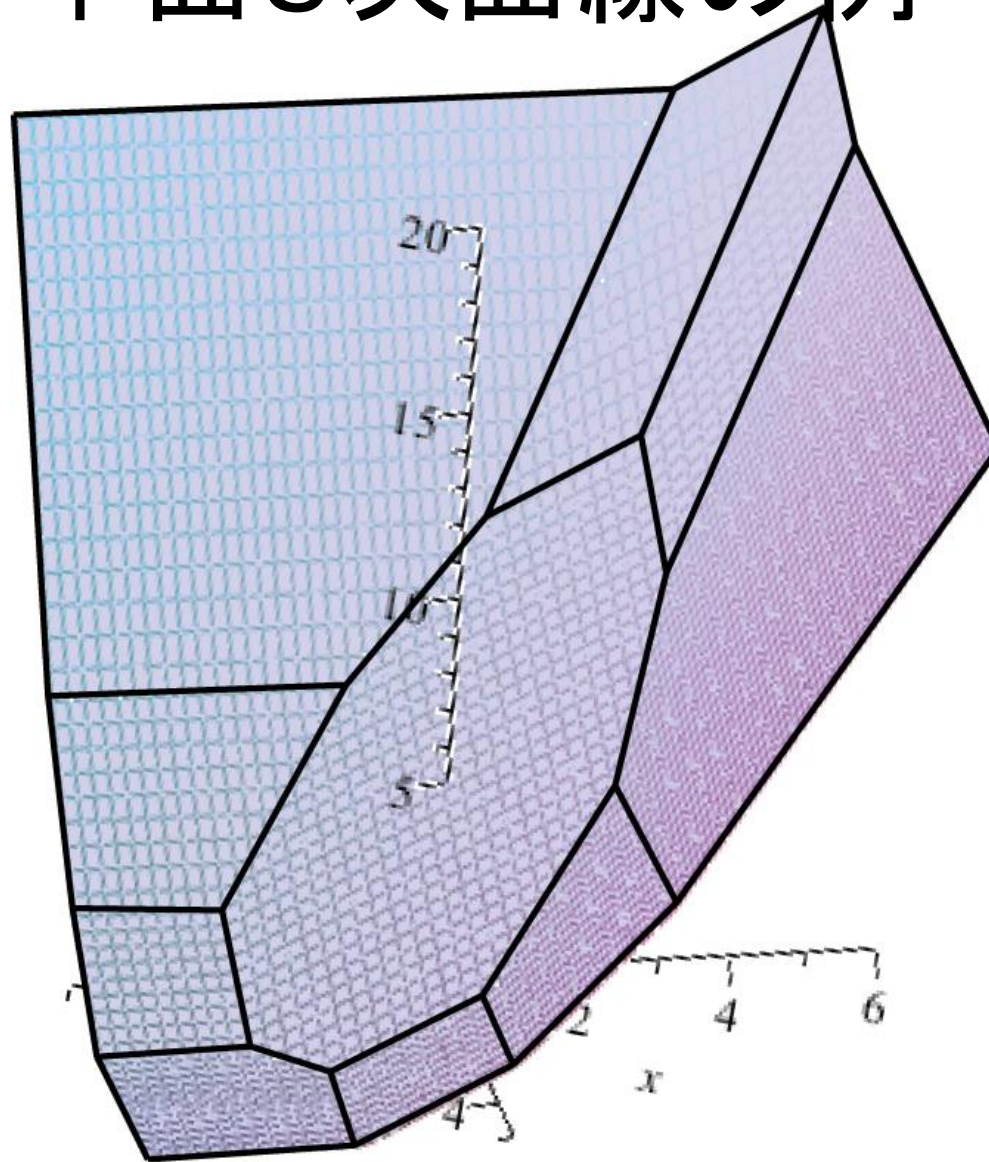
- 平面の折れ線グラフ（傾きは有理数 or ∞ ）
+ 各辺の重複度（張力）
- 釣合条件
 - トロピカル曲線 $\Leftrightarrow$ 各点で張力が釣り合う



(トロピカル)平面3次曲線の例



(トロピカル)平面3次曲線の例



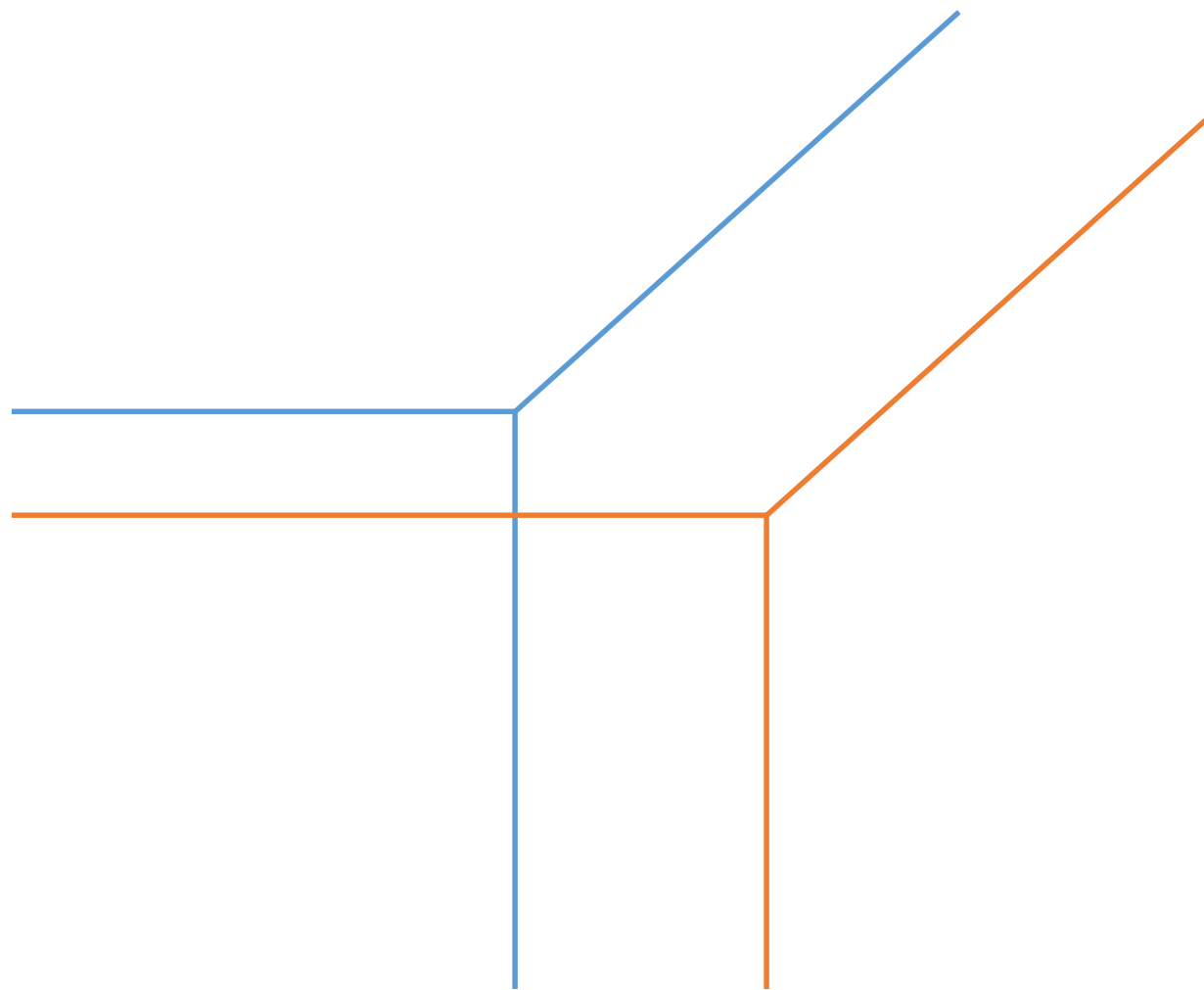
曲線の交点数

共通成分のない**トロピカル**平面曲線に対し

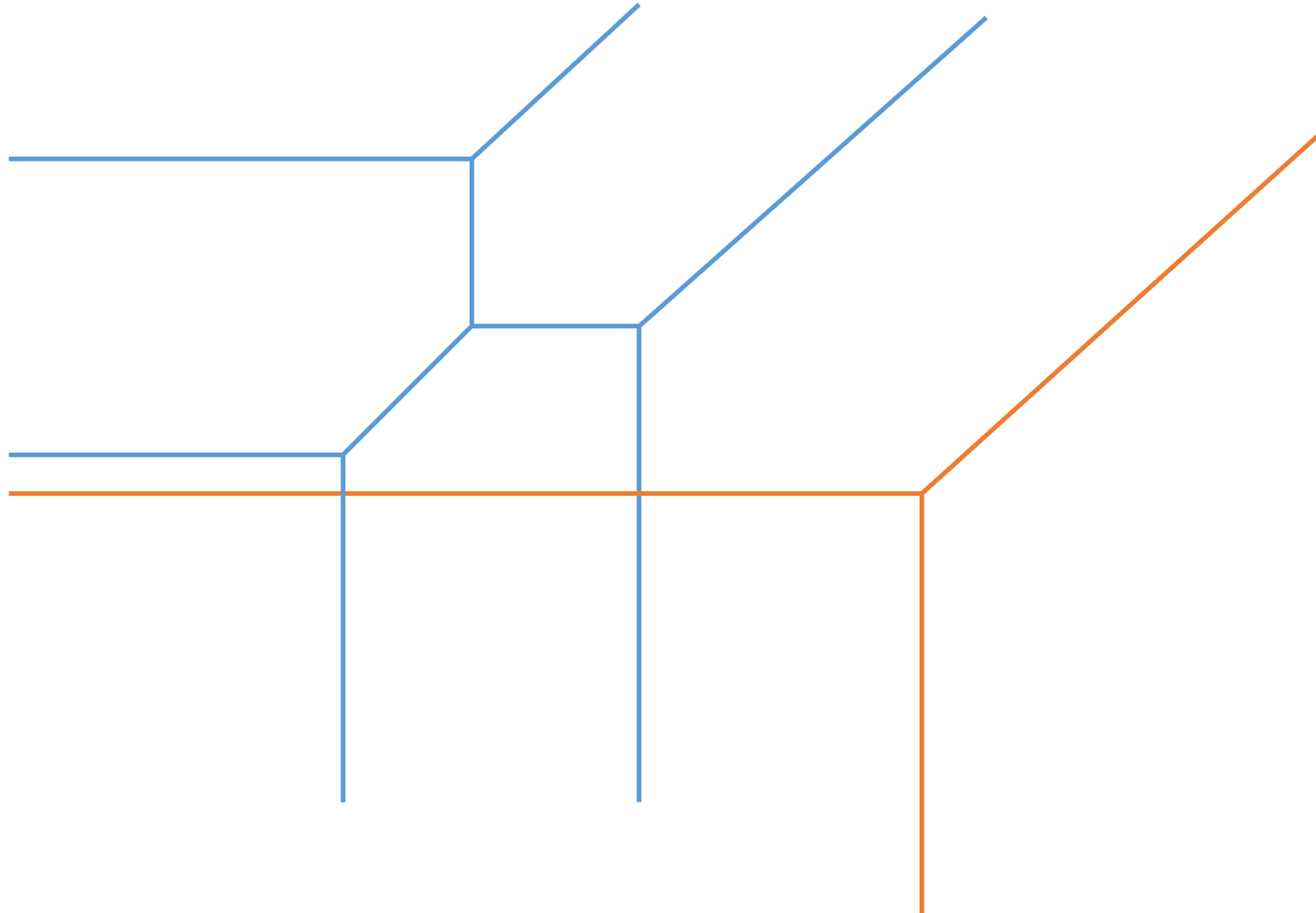


Sturmfels; Richter-Gebert, Sturmfels, Theobald; 梶原

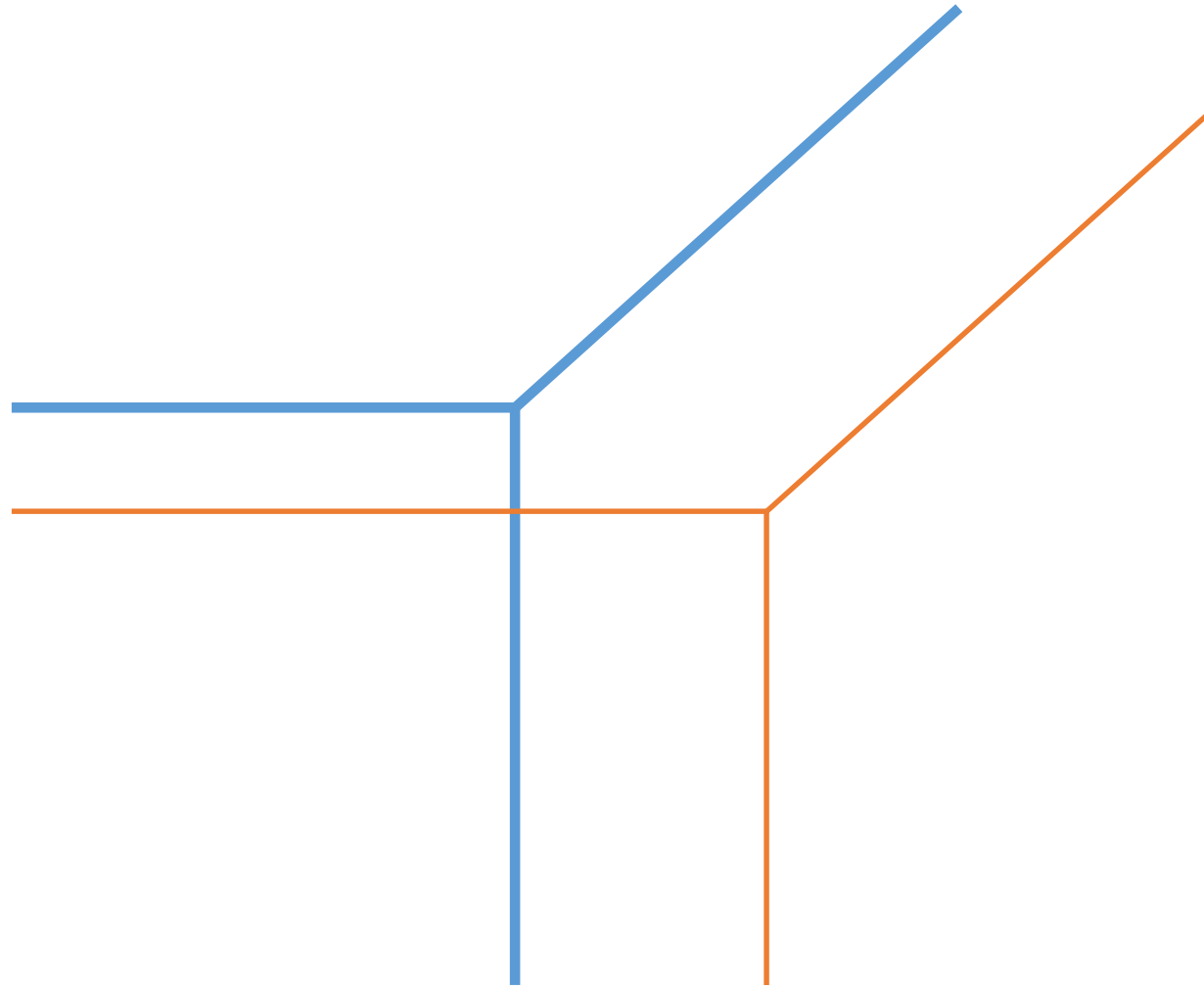
(トロピカル)2直線



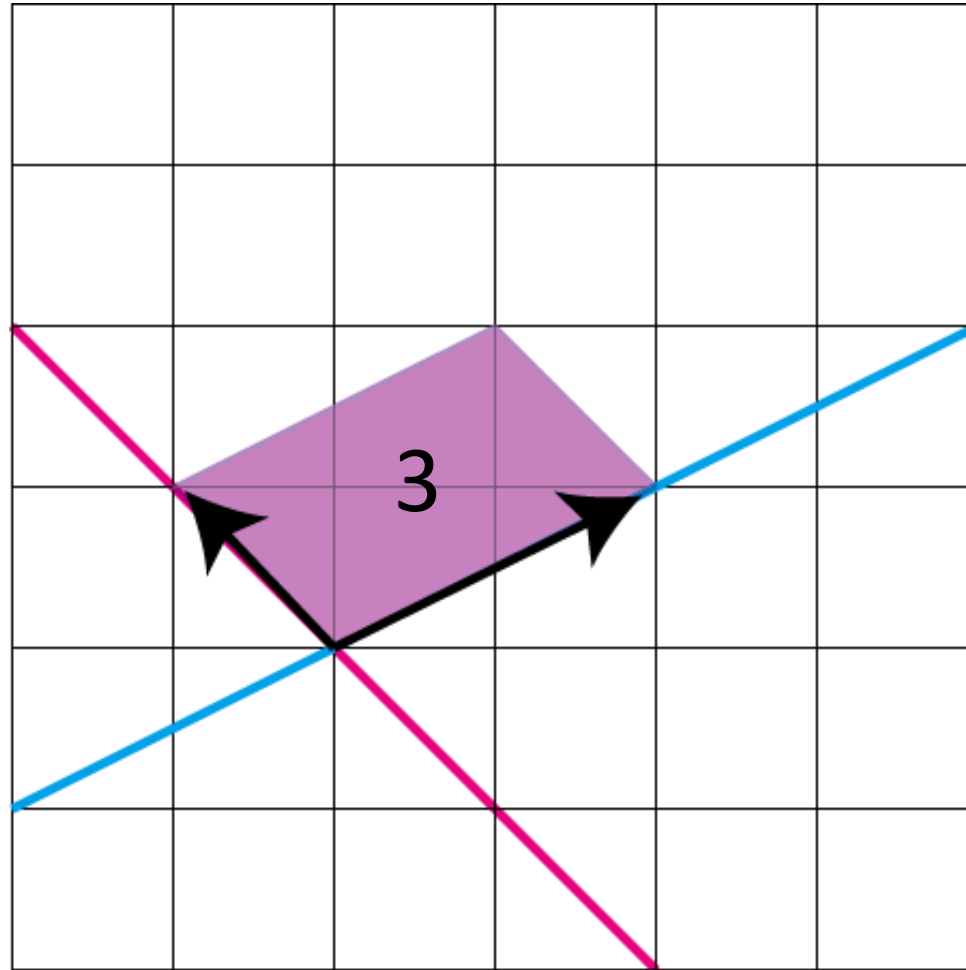
(トロピカル) 2次曲線と直線



(遠くからの) 2次曲線と直線



局所交点数＝面積



代数の可視化

幾何

交点数

可視性

実

点が不足

曲がる

複素
射影

ベズーの
定理

高次元

トロピカル

ベズーの
定理

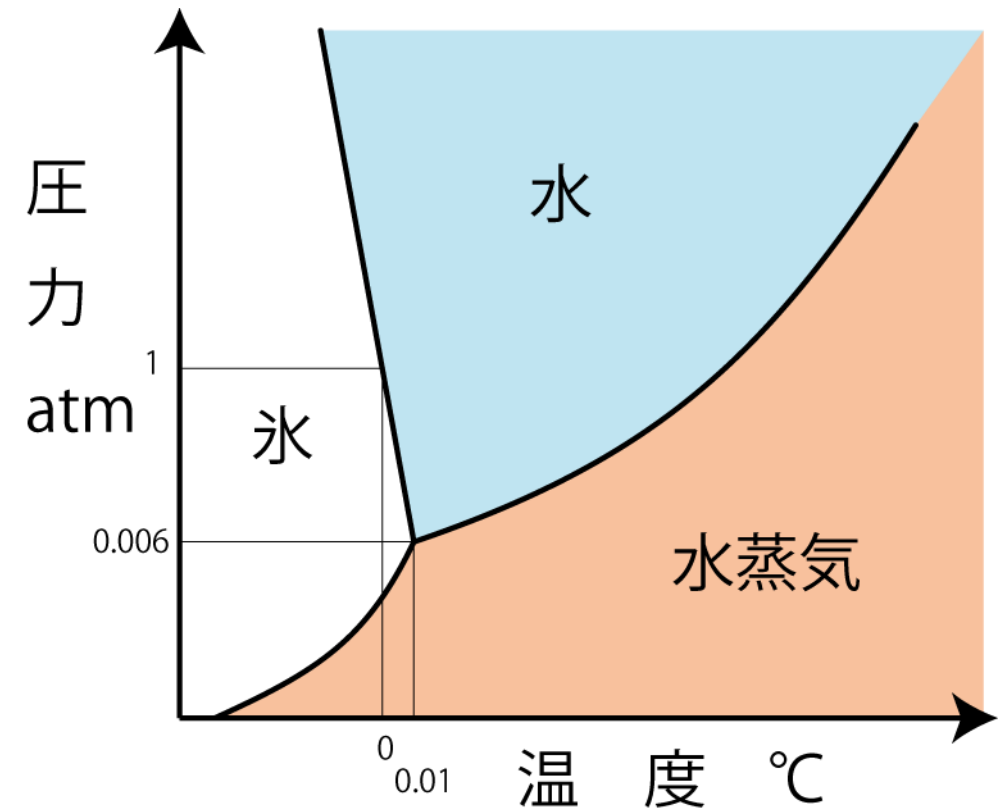
区分的に
線形

トロピカル曲線

- 上のような折れ線 (Bergman扇) をつなげてできる距離付きグラフ
- 複素射影曲線の個数をトロピカル曲線から求める (Mikhalkin)
- コンパクトリーマン面 (代数曲線) と類似の主張が示され始めている.
- 例: Riemann – Roch の定理 [Baker-Norine] 他
- テキスト [Maclagan – Sturmfels], [Mikhalkin – Rau]

第三部 離散事象との関わり

相図 (phase diagram)

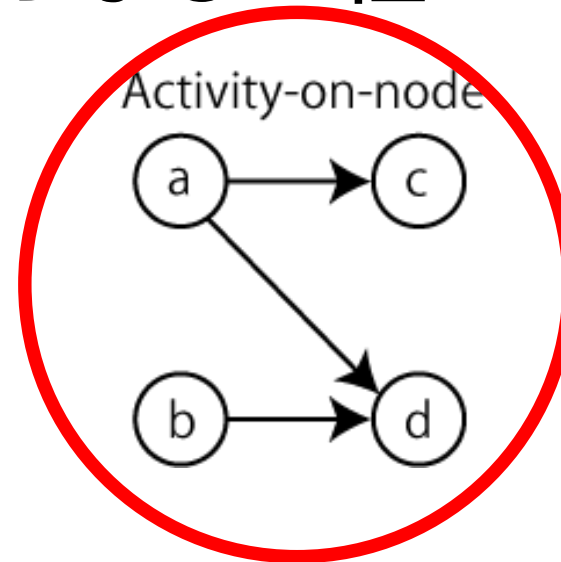
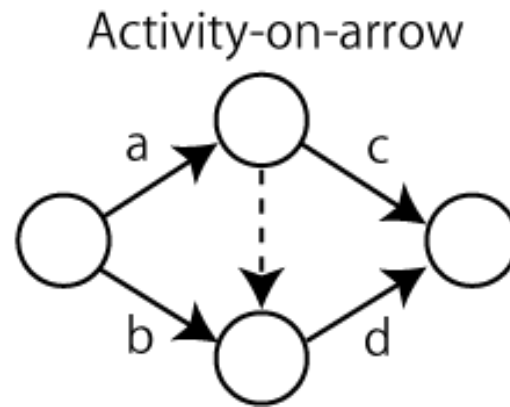


- 安定状態 = ポテンシャル関数の最小値を与えるもの
 - 最大値(最小値)関数の可視化
- 相の境界を調べたい
 - まずは線形近似 → トロピカル幾何

プロジェクトネットワーク

依存関係のある作業からなる工程

Activity	Predecessor
a	-
b	-
c	a
d	a, b



有向グラフ(サイクル・近道なし) + 各作業の所要時間

= 非負実数の重みが付いた順序集合(重み付きHasse図)

最短完了時間

プロジェクト開始から完了までに必要な最小時間

作業 i の最短完了時間

= $\max \{ \text{直前の作業たちの最短完了時間} \} + \text{作業 } i \text{ の所要時間}$

⇒ 所要時間のトロピカル多項式

項 = 開始から完了までの極大経路

最大値を与える項 = クリティカルパス

最短完了時間の性質

命題 最短完了時間は所要時間のP多項式である.

「P多項式」 = 非可除(各項に整序関係なし),
 各変数に関して1次, 係数は0
∴ Newton多面体は0/1多面体である.
 どの項もNewton多面体の頂点になる.

「R多項式」 = 最短完了時間となる

- R多項式の特徴付け [伊藤2015]

クリティカルパスの遷移 [K-Odagiri]

定理 P 多項式 F に対し次が成り立つ.

$\{ (\text{positive orthant} - V(F)) \text{ の連結成分} \} \quad \leftarrow 1-1 \rightarrow \quad \{ F \text{ の項} \}$

特に, F が R 多項式の時,

- すべての経路はある所要時間で単独でクリティカルパスになる.
- クリティカルパスの遷移は, トロピカル超曲面 $V(F)$ 上で起こる. (相転移面)

ご清聴に感謝いたします.