

日本数学会 2016 年度年会

筑波大学

市民講演会

凸多面体の^{ふ えきりゅうこう}不易流行

日比孝之

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

2016 年 3 月 19 日

不易流行とは？

しょうふうはいかい
蕉風俳諧の理念の一つ。

蕉門に千歳不易せんざいふえきの句、一時流行いちじりゅうこうの句と云有。是を二ツに分つて教へ給へども。其基は一ツ也、不易を知らざれば基立がたく、流行を辨わきまへざれば風あらたならず。不易は古によろしく、後に叶ふ句なれば、千歳不易といふ。流行は一時一時の變にして、昨日の風今日よろしからず、今日の風明日に用ひがたきゆへ、一時流行とは云はやる事をいふなり。

きよらいしょう
『去來抄』

歴史的背景

「不易」編

1752年 オイラーの公式（オイラーの多面体定理）

1899年 ピックの公式

1962年 凸多面体のエルハート多項式

「流行」編

抽象論から具象論への時代の流れ

1975年 可換代数と凸多面体論

計算機の急激な発展、ソフトウェアの進化

1991年 グレブナー基底と凸多面体論

代数、計算、統計 . . .



基盤研究（S）2014年5月30日～2019年3月31日

統計と計算を戦略とする可換代数と凸多面体論の現代的潮流の誕生

「不易」編

- オイラーの公式
- 正多面体の分類
- ピックの公式
- ピックの公式の証明
- ピックの公式の一般化
- 一般次元の凸多面体
- 凸多面体のエルハート多項式

オイラーの公式

(3次元空間の) 凸多面体の頂点の個数 v と辺の個数 e と面の個数 f は、等式 $v - e + f = 2$ を満たす。

オイラーの公式

(3次元空間の) 凸多面体の頂点の個数 v と辺の個数 e と面の個数 f は、等式 $v - e + f = 2$ を満たす。



$$v = 60 \quad e = 90 \quad f = 32$$

正多面体の分類

正 f 面体の面が正 n 角形、頂点に集まる辺の個数を m とする。

正多面体の分類

正 f 面体の面が正 n 角形、頂点に集まる辺の個数を m とする。
すると、オイラーの公式から

$$(\#) \quad \frac{n}{m}f - \frac{n}{2}f + f = 2$$

が従う。

正多面体の分類

正 f 面体の面が正 n 角形、頂点に集まる辺の個数を m とする。
すると、オイラーの公式から

$$(\#) \quad \frac{n}{m}f - \frac{n}{2}f + f = 2$$

が従う。等式 (＃) を**受験数学の整数問題**として解くと

$$f = 4, 6, 8, 12, 20$$

となる。従って、正多面体は

正四面体 正六面体 正八面体 正十二面体 正二十面体

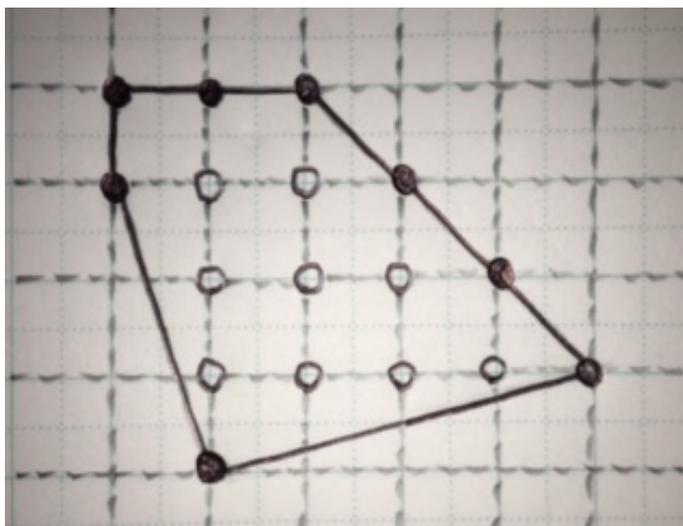
の 5 種類である。

ピックの公式

(2次元平面の) **格子凸多角形** \mathcal{P} の**内部**に含まれる**格子点**の個数を a とし、 \mathcal{P} の**境界**に含まれる**格子点**の個数を b とすると

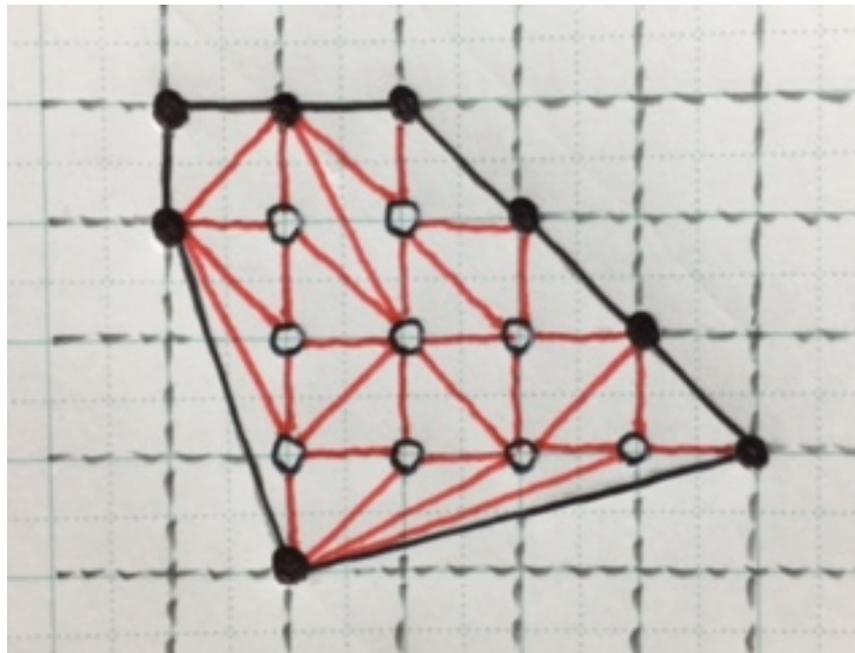
$$\mathcal{P} \text{ の面積} = a + \frac{1}{2}b - 1$$

が成立する。



$$a = 9 \quad b = 8 \quad \text{面積} 12$$

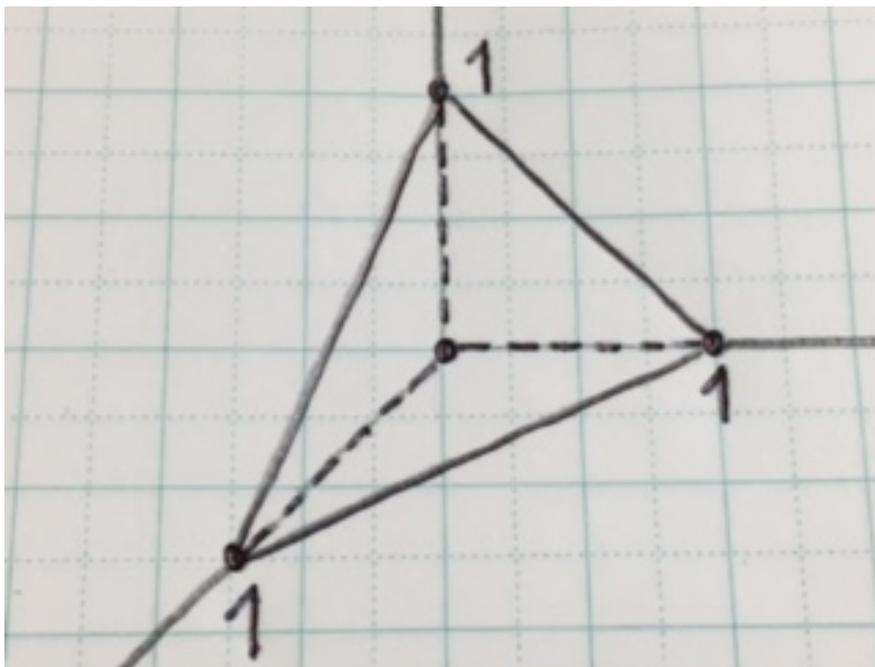
ピックの公式の証明



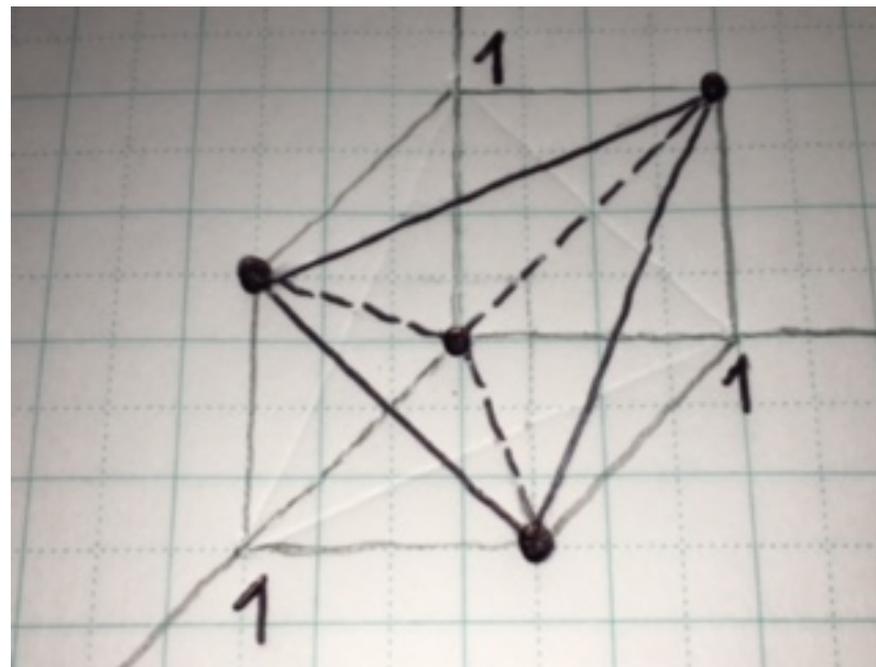
- (第1段) **基本三角形**に分割すると、三角形の個数は $2a + b - 2$ となる。
- (第2段) **基本三角形の面積**は $\frac{1}{2}$ である。

ピックの公式の一般化

$$\mathcal{P} = [000, 100, 010, 001] \quad \mathcal{Q} = [000, 110, 101, 011]$$

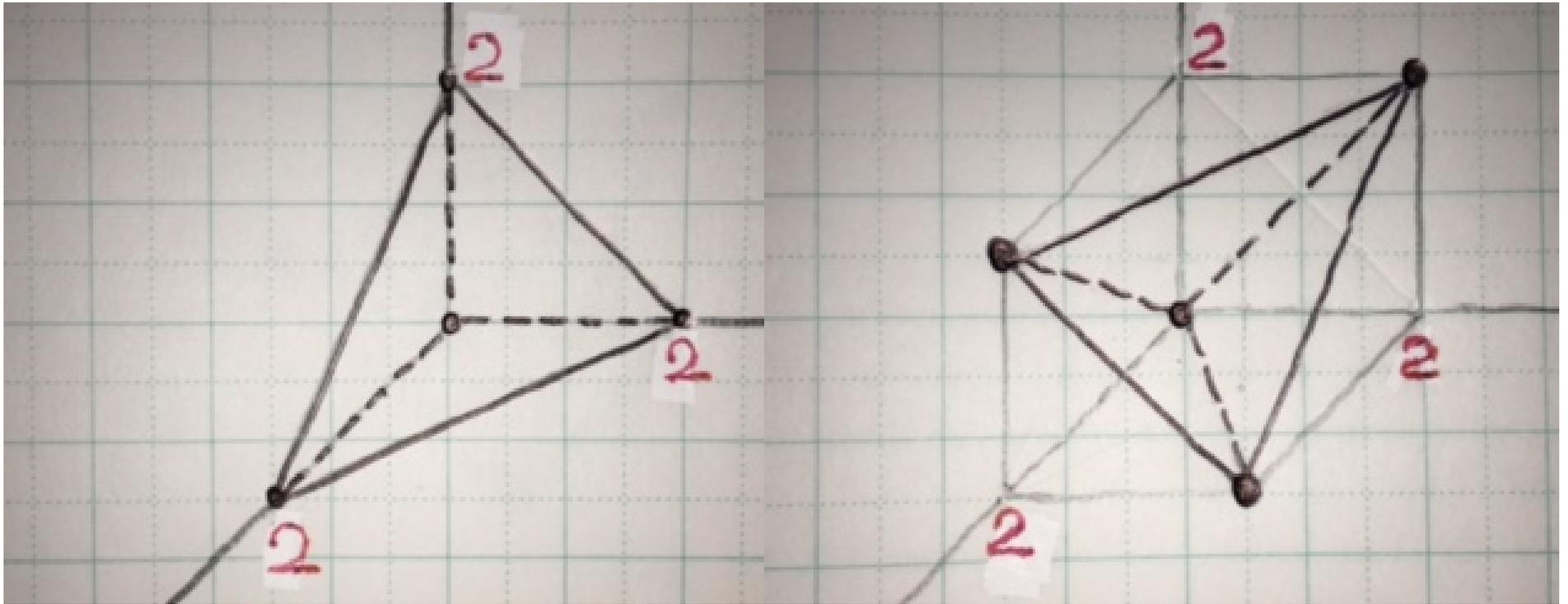


基本四面体
体積 $\frac{1}{6}$



基本四面体
体積 $\frac{1}{3}$

$$2\mathcal{P} = [000, 200, 020, 002] \quad 2\mathcal{Q} = [000, 220, 202, 022]$$



境界の格子点は10個
内部の格子点は0個

境界の格子点は10個
内部の格子点は1個

(3次元空間の) **格子凸多面体** \mathcal{P} の**内部**に含まれる格子点の個数を a とし、 \mathcal{P} の**境界**に含まれる格子点の個数を b とする。

(3次元空間の) **格子凸多面体** \mathcal{P} の**内部**に含まれる格子点の個数を a とし、 \mathcal{P} の**境界**に含まれる格子点の個数を b とする。

更に、 $2\mathcal{P}$ の**内部**に含まれる格子点の個数を a' とし、 $2\mathcal{P}$ の**境界**に含まれる格子点の個数を b' とする。

(3次元空間の) **格子凸多面体** \mathcal{P} の**内部**に含まれる格子点の個数を a とし、 \mathcal{P} の**境界**に含まれる格子点の個数を b とする。

更に、 $2\mathcal{P}$ の**内部**に含まれる格子点の個数を a' とし、 $2\mathcal{P}$ の**境界**に含まれる格子点の個数を b' とする。

このとき

$$\mathcal{P} \text{ の体積} = \frac{a' - \boxed{\text{ア}} a}{\boxed{\text{イ}}} + \frac{b' - \boxed{\text{ウ}} b}{\boxed{\text{エオ}}}$$

が成立する。

(3次元空間の) **格子凸多面体** \mathcal{P} の**内部**に含まれる格子点の個数を a とし、 \mathcal{P} の**境界**に含まれる格子点の個数を b とする。

更に、 $2\mathcal{P}$ の**内部**に含まれる格子点の個数を a' とし、 $2\mathcal{P}$ の**境界**に含まれる格子点の個数を b' とする。

このとき

$$\mathcal{P} \text{ の体積} = \frac{a' - 2a}{6} + \frac{b' - 2b}{12}$$

が成立する。

一般次元の凸多面体

空間 \mathbb{R}^d の図形 \mathcal{P} が

- (i) 有限個の超平面で囲まれ
- (ii) 有界であり
- (iii) 内部に半径 $\varepsilon > 0$ の d 次元球体を含む

のとき、 \mathcal{P} を次元 d の凸多面体と呼ぶ。

一般次元の凸多面体

空間 \mathbb{R}^d の図形 \mathcal{P} が

- (i) 有限個の超平面で囲まれ
- (ii) 有界であり
- (iii) 内部に半径 $\varepsilon > 0$ の d 次元球体を含む

のとき、 \mathcal{P} を次元 d の凸多面体と呼ぶ。

更に、 $\alpha \in \mathcal{P}$ が \mathcal{P} の頂点であるとは、条件

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma), \beta \in \mathcal{P}, \gamma \in \mathcal{P} \text{ ならば } \alpha = \beta = \gamma$$

が成立するときに言う。

一般次元の凸多面体

空間 \mathbb{R}^d の図形 \mathcal{P} が

- (i) 有限個の超平面で囲まれ
- (ii) 有界であり
- (iii) 内部に半径 $\varepsilon > 0$ の d 次元球体を含む

のとき、 \mathcal{P} を次元 d の凸多面体と呼ぶ。

更に、 $\alpha \in \mathcal{P}$ が \mathcal{P} の頂点であるとは、条件

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma), \beta \in \mathcal{P}, \gamma \in \mathcal{P} \text{ ならば } \alpha = \beta = \gamma$$

が成立するときに言う。

すると、次元 d の凸多面体の頂点の個数は有限個 ($> d$) である。
特に、頂点の個数が $d + 1$ 個のとき、 \mathcal{P} を d 単体と呼ぶ。

凸多面体のエルハート多項式

次元 d の格子凸多面体 \mathcal{P} の膨らまし $n\mathcal{P}$ の内部と境界に含まれる格子点の個数を $i(\mathcal{P}, n)$ とし、 $n\mathcal{P}$ の内部に含まれる格子点の個数を $i^*(\mathcal{P}, n)$ とする。但し、 $n = 1, 2, \dots$ である。

凸多面体のエルハート多項式

次元 d の格子凸多面体 \mathcal{P} の膨らまし $n\mathcal{P}$ の内部と境界に含まれる格子点の個数を $i(\mathcal{P}, n)$ とし、 $n\mathcal{P}$ の内部に含まれる格子点の個数を $i^*(\mathcal{P}, n)$ とする。但し、 $n = 1, 2, \dots$ である。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は n に関する次数 d の多項式

凸多面体のエルハート多項式

次元 d の格子凸多面体 \mathcal{P} の膨らまし $n\mathcal{P}$ の内部と境界に含まれる格子点の個数を $i(\mathcal{P}, n)$ とし、 $n\mathcal{P}$ の内部に含まれる格子点の個数を $i^*(\mathcal{P}, n)$ とする。但し、 $n = 1, 2, \dots$ である。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は n に関する次数 d の多項式
- その定数項は 1

凸多面体のエルハート多項式

次元 d の格子凸多面体 \mathcal{P} の膨らまし $n\mathcal{P}$ の内部と境界に含まれる格子点の個数を $i(\mathcal{P}, n)$ とし、 $n\mathcal{P}$ の内部に含まれる格子点の個数を $i^*(\mathcal{P}, n)$ とする。但し、 $n = 1, 2, \dots$ である。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は n に関する次数 d の多項式
- その定数項は 1
- その d 次の項の係数は \mathcal{P} の体積

凸多面体のエルハート多項式

次元 d の格子凸多面体 \mathcal{P} の膨らまし $n\mathcal{P}$ の内部と境界に含まれる格子点の個数を $i(\mathcal{P}, n)$ とし、 $n\mathcal{P}$ の内部に含まれる格子点の個数を $i^*(\mathcal{P}, n)$ とする。但し、 $n = 1, 2, \dots$ である。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は n に関する次数 d の多項式
- その定数項は 1
- その d 次の項の係数は \mathcal{P} の体積
- その $d - 1$ 次の項の係数は \mathcal{P} の表面積の $\frac{1}{2}$

凸多面体のエルハート多項式

次元 d の格子凸多面体 \mathcal{P} の膨らまし $n\mathcal{P}$ の内部と境界に含まれる格子点の個数を $i(\mathcal{P}, n)$ とし、 $n\mathcal{P}$ の内部に含まれる格子点の個数を $i^*(\mathcal{P}, n)$ とする。但し、 $n = 1, 2, \dots$ である。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は n に関する次数 d の多項式
- その定数項は 1
- その d 次の項の係数は \mathcal{P} の体積
- その $d - 1$ 次の項の係数は \mathcal{P} の表面積の $\frac{1}{2}$
- **(相互法則)** $i^*(\mathcal{P}, n) = (-1)^d i(\mathcal{P}, -n)$

凸多面体のエルハート多項式

次元 d の格子凸多面体 \mathcal{P} の膨らまし $n\mathcal{P}$ の内部と境界に含まれる格子点の個数を $i(\mathcal{P}, n)$ とし、 $n\mathcal{P}$ の内部に含まれる格子点の個数を $i^*(\mathcal{P}, n)$ とする。但し、 $n = 1, 2, \dots$ である。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は n に関する次数 d の多項式
- その定数項は 1
- その d 次の項の係数は \mathcal{P} の体積
- その $d - 1$ 次の項の係数は \mathcal{P} の表面積の $\frac{1}{2}$
- **(相互法則)** $i^*(\mathcal{P}, n) = (-1)^d i(\mathcal{P}, -n)$

定義

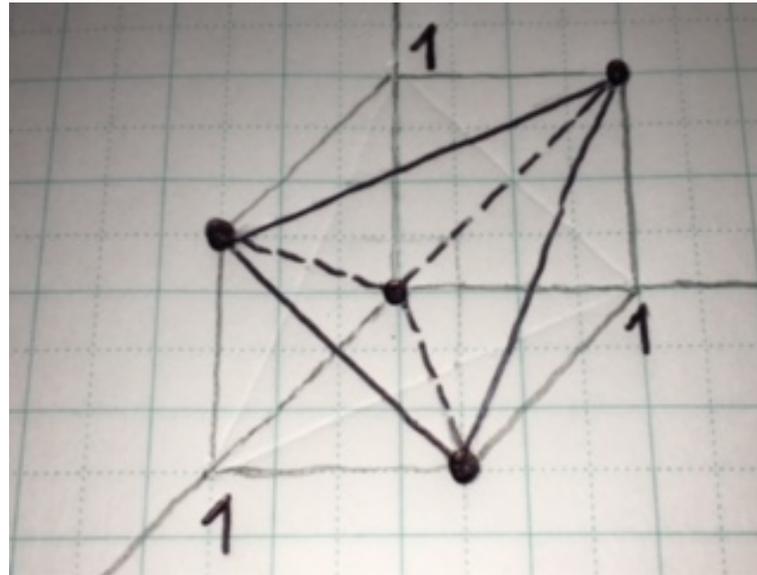
多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を \mathcal{P} のエルハート多項式と呼ぶ。

例

$$\mathcal{P} = [(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)]$$

$$i(\mathcal{P}, n) = \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$$

$$i^*(\mathcal{P}, n) = \frac{1}{3}(n^3 - 3n^2 + 5n - 3)$$



例

$$\mathcal{Q} = [(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 13)]$$

$$i(\mathcal{Q}, n) = \frac{1}{6}(13n^3 + 6n^2 - n + 6)$$

$$i^*(\mathcal{Q}, n) = \frac{1}{6}(13n^3 - 6n^2 - n - 6)$$

十一 予想

$$d = 5$$

+++ $(n + 1)^5$ 单位立方体

$$++- (28561n^5 + 58136n^4 + 30576n^3 + 994n^2 - n + 6)/6$$

$$+-+ (19n^5 + 44n^4 + 24n^3 - 2n^2 + 5n + 6)/6$$

$$-++ (5200n^5 + 2920n^4 - 147n^3 + 2366n^2 + 239n + 6)/6$$

$$+-- (2000000000n^5 + 203000000n^4 + 4620000n^3 - 59300n^2 - 1580n + 3)/3$$

$$-+- (371/120)n^5 + (1/8)n^4 - (1/24)n^3 + (15/8)n^2 - (1/20)n + 1$$

$$--+ (16000n^5 + 2800n^4 - 13440n^3 - 157n^2 + 86n + 3)/3$$

$$--- (80n^5 + 92n^4 - 24n^3 - 41n^2 - 2n + 3)/3$$

「流行」編

- グレブナー基底
 - *) 単模三角形分割
 - *) トーリックイデアール
 - *) グレブナー基底
 - *) 正則三角形分割
- 可換代数
 - *) 母函数
 - *) 球面の三角形分割
 - *) Cohen–Macaulay 環

グレブナー基底

- *) 単模三角形分割
- *) トーリックイデアール
- *) グレブナー基底
- *) 正則三角形分割

単模三角形分割

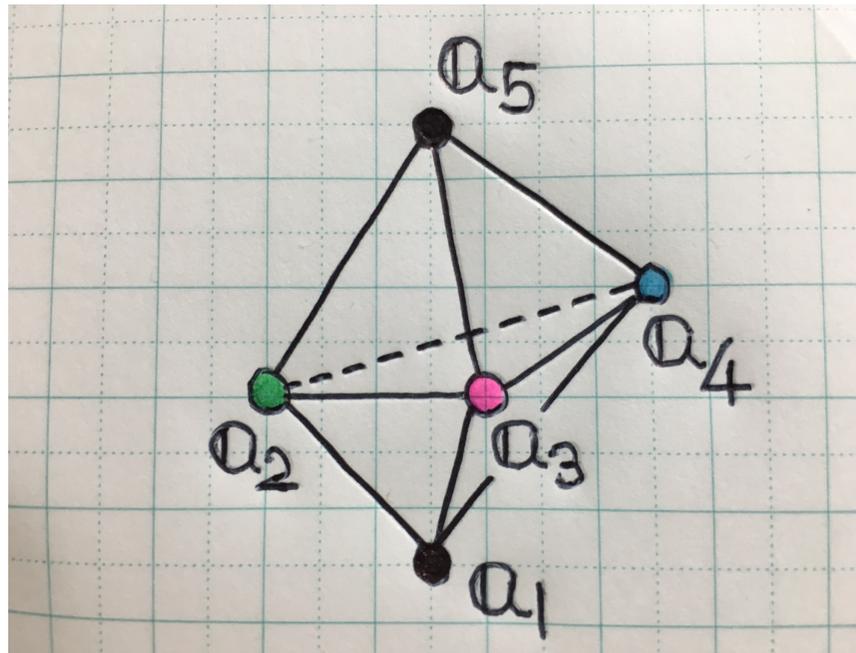
空間 \mathbb{R}^d の次元 d の **格子凸多面体** の（頂点以外の格子点を使うことも許す） **格子 d 単体** による分割を **格子三角形分割** と呼ぶ。

単模三角形分割

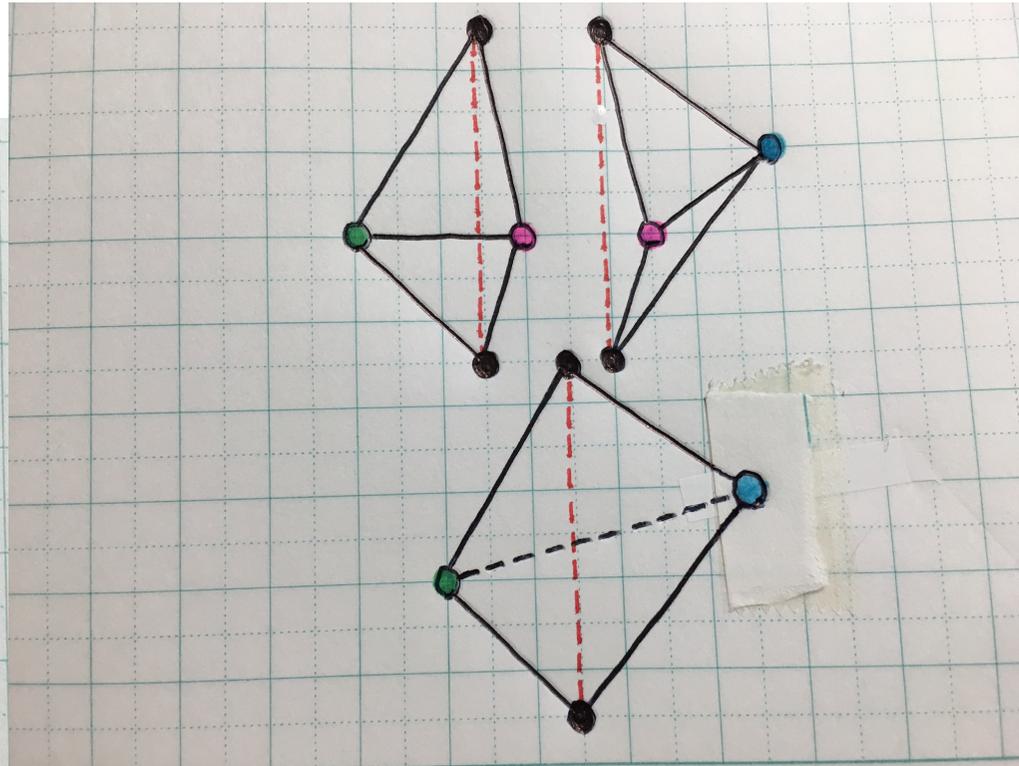
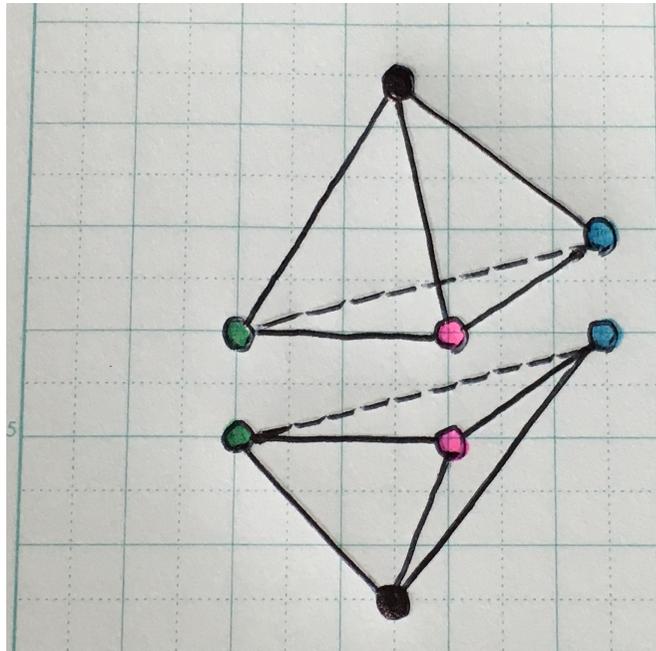
空間 \mathbb{R}^d の次元 d の **格子凸多面体** の（頂点以外の格子点を使うことも許す）**格子 d 単体** による分割を **格子三角形分割** と呼ぶ。

その格子三角形分割を構成する、すべての格子 d 単体の体積が $\frac{1}{d!}$ のとき、この三角形分割を **単模三角形分割** と呼ぶ。

例 3次元空間の $a_1 = (0, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 1)$
 $a_4 = (0, 1, 1)$, $a_5 = (1, 1, 1)$ を頂点とする bipyramid



の格子三角形分割は 2 個ある。



左側は単模三角形分割ではない。右側は単模三角形分割である。

空間 \mathbb{R}^d の次元 d の格子凸多面体 \mathcal{P} が単模三角形分割を持つと豊富な御利益がある。

- **(組合せ論)** \mathcal{P} のエルハート多項式 (特に、体積) の計算
- **(可換代数)** \mathcal{P} のトーリック環が **Cohen–Macaulay 環**
- **(代数幾何)** トーリックファノ多様体の **正規性**
- **(整数計画)** \mathcal{P} の **整分割性** が従う。
すなわち、 $n\mathcal{P}$ に属する格子点は \mathcal{P} に属する n 個の格子点の和として表示される。
- **(超幾何関数)** \mathcal{P} に付随する **A 超幾何系の階数** の計算
 A_{n-1} ; Gelfand–Graev–Postnikov (1997)
 B_n, C_n, D_n ; W. Fong (2000) ; OH (2001)
- **(統計)** **マルコフ基底** の発見に有効 (?)
 D_n と 3 水準 Box–Behnken 計画 (arXiv:1502.02323)

トーリックイデアル

整数を成分とする d 行 n 列の行列 $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,d \\ j=1,2,\dots,n}}$ があったとき

$$\begin{bmatrix} & A & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす**整数**ベクトル $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ の全体を $\text{Ker}_{\mathbb{Z}} A$ と表す。

変数 x_1, \dots, x_n を準備し、 $\text{Ker}_{\mathbb{Z}} A$ に属するベクトル

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ に付随する二項式 } f_{\mathbf{b}} \text{ を}$$

$$f_{\mathbf{b}} = f_{\mathbf{b}}^{(+)} - f_{\mathbf{b}}^{(-)} = \prod_{b_i > 0} x_i^{b_i} - \prod_{b_j < 0} x_j^{-b_j}$$

と定義する。 例 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ならば $f_{\mathbf{b}} = x_1^2 x_3 - x_2^3$

変数 x_1, \dots, x_n を準備し、 $\text{Ker}_{\mathbb{Z}} A$ に属するベクトル

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ に付随する二項式 } f_{\mathbf{b}} \text{ を}$$

$$f_{\mathbf{b}} = f_{\mathbf{b}}^{(+)} - f_{\mathbf{b}}^{(-)} = \prod_{b_i > 0} x_i^{b_i} - \prod_{b_j < 0} x_j^{-b_j}$$

と定義する。 **例** $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ならば $f_{\mathbf{b}} = x_1^2 x_3 - x_2^3$

定義 **単項式順序** $<$ を固定する。二項式の集合

$$\left\{ f_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in \text{Ker}_{\mathbb{Z}} A, f_{\mathbf{b}}^{(+)} > f_{\mathbf{b}}^{(-)} \right\}$$

(が生成するイデアル)

を I_A と表し、 A の**トーリックイデアル**と呼ぶ。

グレブナー基底

組合せ論の古典的な結果 (**Dicksonの補題**) から

補題

トーリックイデアル I_A に属する有限個の二項式 $f_{\mathbf{b}(1)}, \dots, f_{\mathbf{b}(s)}$ を適当に選ぶと、条件

『 $f_{\mathbf{b}} \in I_A$ ならば $f_{\mathbf{b}}^{(+)}$ は $f_{\mathbf{b}(1)}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}(s)}^{(+)}$ の何れかで割り切れる』

が満たされる。

グレブナー基底

組合せ論の古典的な結果 (**Dicksonの補題**) から

補題

トーリックイデアル I_A に属する有限個の二項式 $f_{\mathbf{b}(1)}, \dots, f_{\mathbf{b}(s)}$ を適当に選ぶと、条件

『 $f_{\mathbf{b}} \in I_A$ ならば $f_{\mathbf{b}}^{(+)}$ は $f_{\mathbf{b}(1)}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}(s)}^{(+)}$ の何れかで割り切れる』

が満たされる。

定義

二項式の集合 $\{ f_{\mathbf{b}(1)}, \dots, f_{\mathbf{b}(s)} \}$ を I_A の **グレブナー**

基底 と呼ぶ。他方、単項式の集合 $\{ f_{\mathbf{b}(1)}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}(s)}^{(+)} \}$

(が生成するイデアル) を I_A の **イニシャルイデアル** と呼ぶ。

正則三角形分割

次元 d の格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に属する格子点の全体を $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ とし、それらを列ベクトルとする d 行 n 列の行列を $A(\mathcal{P})$ とする。

例

$$\mathcal{P} = [(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)]$$

$$A(\mathcal{P}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

正則三角形分割

次元 d の格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に属する格子点の全体を $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ とし、それらを列ベクトルとする d 行 n 列の行列を $A(\mathcal{P})$ とする。

例 $\mathcal{P} = [(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)]$

$$A(\mathcal{P}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

定義 整数行列 $A(\mathcal{P})$ のトーリックイデアル $I_{A(\mathcal{P})}$ を \mathcal{P} のトーリックイデアルと呼ぶ。

正則三角形分割

次元 d の格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に属する格子点の全体を $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ とし、それらを列ベクトルとする d 行 n 列の行列を $A(\mathcal{P})$ とする。

例 $\mathcal{P} = [(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)]$

$$A(\mathcal{P}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

定義 整数行列 $A(\mathcal{P})$ のトーリックイデアル $I_{A(\mathcal{P})}$ を \mathcal{P} のトーリックイデアルと呼ぶ。

以下、 $I_{A(\mathcal{P})}$ のグレブナー基底 $\{f_{\mathbf{b}(1)}, \dots, f_{\mathbf{b}(s)}\}$ とイニシャルイデアル $\{f_{\mathbf{b}(1)}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}(s)}^{(+)}\}$ を考える。

例

$$\mathcal{P} = [(\overset{\mathbf{a}_1}{0, 0, 0}), (\overset{\mathbf{a}_2}{1, 1, 0}), (\overset{\mathbf{a}_3}{1, 0, 1}), (\overset{\mathbf{a}_4}{0, 1, 1}), (\overset{\mathbf{a}_5}{1, 1, 1})]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix}$$

例

$$\mathcal{P} = [(\overset{\mathbf{a}_1}{0, 0, 0}), (\overset{\mathbf{a}_2}{1, 1, 0}), (\overset{\mathbf{a}_3}{1, 0, 1}), (\overset{\mathbf{a}_4}{0, 1, 1}), (\overset{\mathbf{a}_5}{1, 1, 1})]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix}$$

$$f_{\mathbf{b}} = x_1 x_5^2 - x_2 x_3 x_4$$

$$f_{-\mathbf{b}} = x_2 x_3 x_4 - x_1 x_5^2$$

例

$$\mathcal{P} = [(\overset{\mathbf{a}_1}{0}, \overset{\mathbf{a}_2}{1}, \overset{\mathbf{a}_3}{0}), (\overset{\mathbf{a}_1}{1}, \overset{\mathbf{a}_2}{1}, \overset{\mathbf{a}_3}{0}), (\overset{\mathbf{a}_1}{1}, \overset{\mathbf{a}_2}{0}, \overset{\mathbf{a}_3}{1}), (\overset{\mathbf{a}_1}{0}, \overset{\mathbf{a}_2}{1}, \overset{\mathbf{a}_3}{1}), (\overset{\mathbf{a}_1}{1}, \overset{\mathbf{a}_2}{1}, \overset{\mathbf{a}_3}{1})]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix}$$

$$f_{\mathbf{b}} = x_1 x_5^2 - x_2 x_3 x_4$$

單項式順序 $x_1 x_5^2 > x_2 x_3 x_4$

$$f_{-\mathbf{b}} = x_2 x_3 x_4 - x_1 x_5^2$$

$$x_2 x_3 x_4 > x_1 x_5^2$$

例

$$\mathcal{P} = [(\overset{\mathbf{a}_1}{0, 0, 0}), (\overset{\mathbf{a}_2}{1, 1, 0}), (\overset{\mathbf{a}_3}{1, 0, 1}), (\overset{\mathbf{a}_4}{0, 1, 1}), (\overset{\mathbf{a}_5}{1, 1, 1})]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix}$$

$$f_{\mathbf{b}} = x_1 x_5^2 - x_2 x_3 x_4$$

単項式順序 $x_1 x_5^2 > x_2 x_3 x_4$

グレブナー基底 $\{f_{\mathbf{b}}\}$

$$f_{-\mathbf{b}} = x_2 x_3 x_4 - x_1 x_5^2$$

$x_2 x_3 x_4 > x_1 x_5^2$

$\{f_{-\mathbf{b}}\}$

例

$$\mathcal{P} = [(\overset{a_1}{0}, \overset{a_1}{0}, \overset{a_1}{0}), (\overset{a_2}{1}, \overset{a_2}{1}, \overset{a_2}{0}), (\overset{a_3}{1}, \overset{a_3}{0}, \overset{a_3}{1}), (\overset{a_4}{0}, \overset{a_4}{1}, \overset{a_4}{1}), (\overset{a_5}{1}, \overset{a_5}{1}, \overset{a_5}{1})]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix}$$

$$f_{\mathbf{b}} = x_1 x_5^2 - x_2 x_3 x_4$$

単項式順序 $x_1 x_5^2 > x_2 x_3 x_4$

グレブナー基底 $\{f_{\mathbf{b}}\}$

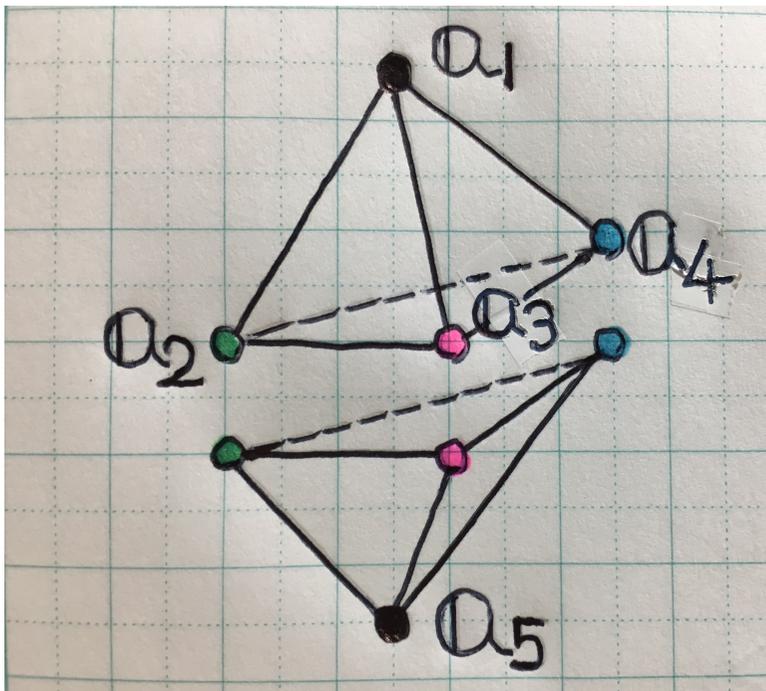
イニシャルイデアル $\{x_1 x_5^2\}$

$$f_{-\mathbf{b}} = x_2 x_3 x_4 - x_1 x_5^2$$

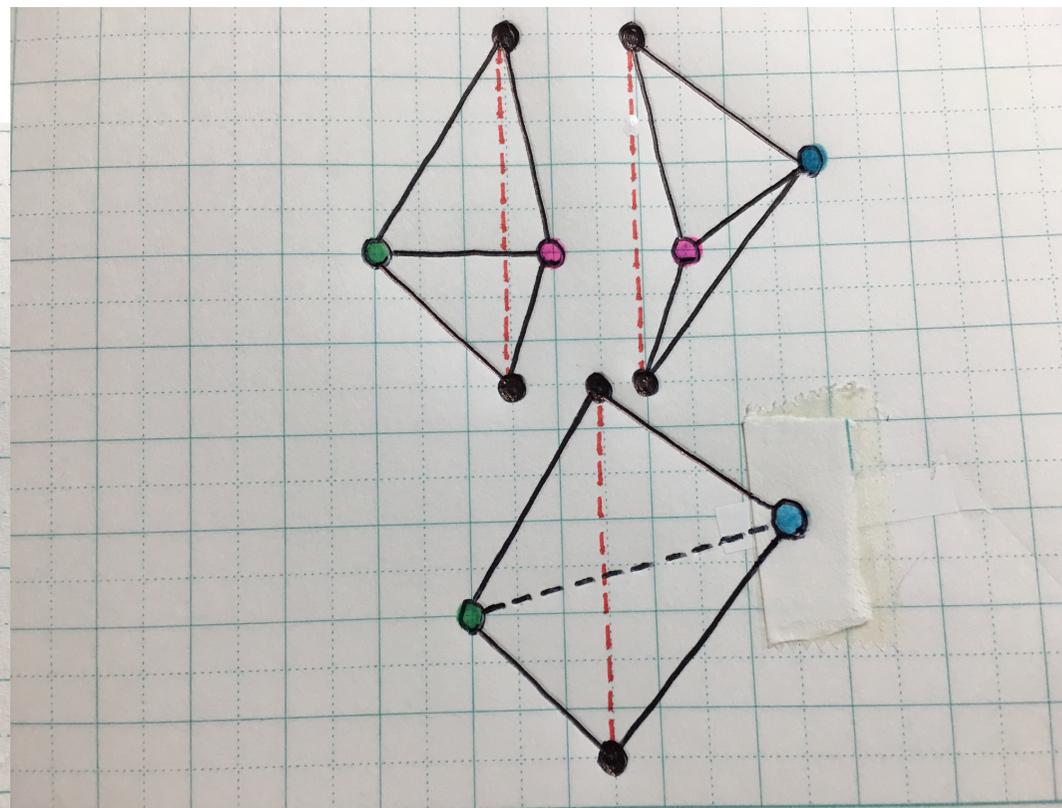
$x_2 x_3 x_4 > x_1 x_5^2$

$\{f_{-\mathbf{b}}\}$

$\{x_2 x_3 x_4\}$



$$\{x_1 x_5^2\}$$



$$\{x_2 x_3 x_4\}$$

格子 d 単体 π の頂点の集合を $V(\pi) \subset \{a_1, \dots, a_n\}$ とする
とき、格子 d 単体の集合

$$\left\{ \pi : \right.$$

$$\left. i = 1, \dots, s \right\}$$

格子 d 単体 π の頂点の集合を $V(\pi) \subset \{a_1, \dots, a_n\}$ とする
とき、格子 d 単体の集合

$$\left\{ \pi : \right.$$
$$\left. i = 1, \dots, s \right\}$$

は $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の三角形分割となる (Sturmfels)。

格子 d 単体 π の頂点の集合を $V(\pi) \subset \{a_1, \dots, a_n\}$ とするとき、格子 d 単体の集合

$$\left\{ \pi : \right. \\ \left. i = 1, \dots, s \right\}$$

は $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の三角形分割となる (Sturmfels)。

定義

そのような三角形分割は $f_{\mathbf{b}(1)}^{(+)} , \dots , f_{\mathbf{b}(s)}^{(+)}$ に付随する $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の**正則三角形分割**と呼ばれる。

格子 d 単体 π の頂点の集合を $V(\pi) \subset \{a_1, \dots, a_n\}$ とするとき、格子 d 単体の集合

$$\left\{ \pi : \left\{ k : x_k \mid f_{\mathbf{b}(i)}^{(+)} \right\} \not\subset \left\{ k : a_k \in V(\pi) \right\}, \right. \\ \left. i = 1, \dots, s \right\}$$

は $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の三角形分割となる (Sturmfels)。

定義 そのような三角形分割は $f_{\mathbf{b}(1)}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}(s)}^{(+)}$ に付随する $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の**正則三角形分割**と呼ばれる。

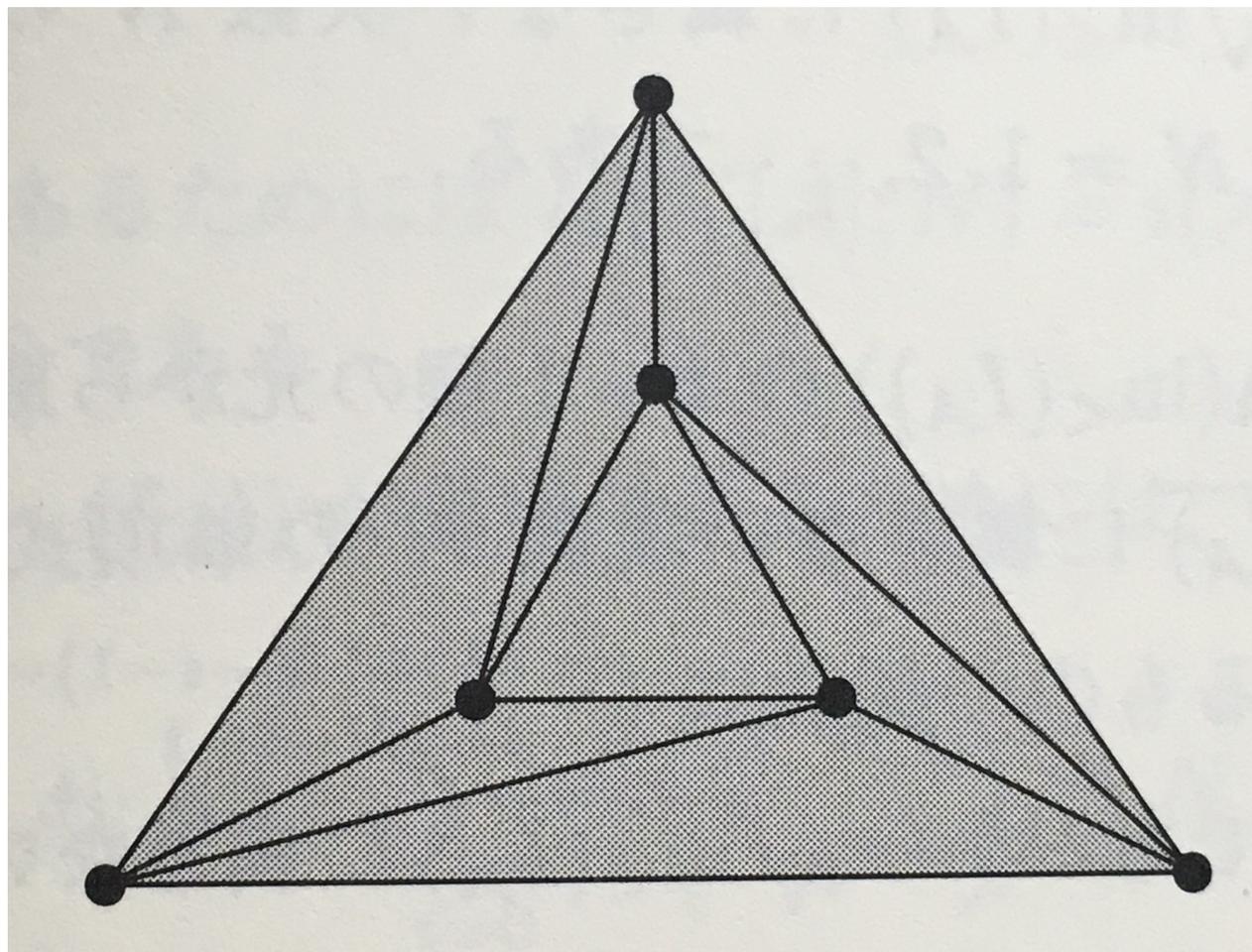
格子 d 単体 π の頂点の集合を $V(\pi) \subset \{a_1, \dots, a_n\}$ とするとき、格子 d 単体の集合

$$\left\{ \pi : \left\{ k : x_k \mid f_{\mathbf{b}(i)}^{(+)} \right\} \not\subset \left\{ k : \mathbf{a}_k \in V(\pi) \right\}, \right. \\ \left. i = 1, \dots, s \right\}$$

は $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の三角形分割となる (Sturmfels)。

定義 そのような三角形分割は $f_{\mathbf{b}(1)}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}(s)}^{(+)}$ に付随する $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の**正則三角形分割**と呼ばれる。

特に、**単項式** $f_{\mathbf{b}(1)}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}(s)}^{(+)}$ のそれぞれが **sauarefree** ならば、付随する正則三角形分割は**単模**である。



非正則三角形分割

可換代数

- *) 母函数
- *) 球面の三角形分割
- *) Cohen–Macaulay 環

母函数

非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots の母函数

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots \quad (*)$$

を考える。

母函数

非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots の母函数

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots \quad (*)$$

を考える。いま、偶然にも、母函数 (*) が有理函数

$$\frac{h_0 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + \dots + h_d\lambda^d}{(1 - \lambda)^d} \quad (**)$$

になったと仮定する。

母函数

非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots の母函数

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots \quad (*)$$

を考える。いま、偶然にも、母函数 (*) が有理函数

$$\frac{h_0 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + \dots + h_d\lambda^d}{(1 - \lambda)^d} \quad (**)$$

になったと仮定する。

例 $a_n = \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$ の母函数は

$$(1 + \lambda^2) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \lambda^n$$

母函数

非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots の母函数

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots \quad (*)$$

を考える。いま、偶然にも、母函数 (*) が有理函数

$$\frac{h_0 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + \dots + h_d\lambda^d}{(1 - \lambda)^d} \quad (**)$$

になったと仮定する。

例 $a_n = \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$ の母函数は

$$(1 + \lambda^2) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \lambda^n = (1 + \lambda^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \right)^4$$

母函数

非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots の**母函数**

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots \quad (*)$$

を考える。いま、**偶然にも**、母函数 (*) が**有理函数**

$$\frac{h_0 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + \dots + h_d\lambda^d}{(1 - \lambda)^d} \quad (**)$$

になったと仮定する。

例 $a_n = \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$ の母函数は
 $(1 + \lambda^2) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \lambda^n = \frac{1 + \lambda^2}{(1 - \lambda)^4}$ となる。

このとき、**不等式**

$$(\star) \quad 0 \leq h_i \leq \binom{h_1 + i - 1}{i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, d$$

を示すにはどうすればいいであろうか？

このとき、**不等式**

$$(\star) \quad 0 \leq h_i \leq \binom{h_1 + i - 1}{i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, d$$

を示すにはどうすればいいであろうか？

定理 非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots が **Krull 次元 d の Cohen–Macaulay 標準的次數環のヒルベルト函数** であるならば、その数列の母函数は、有理函数 (**) となり、更に、不等式 (☆) が成立する。

球面の三角形分割

次元 $d - 1$ の球面 S^{d-1} の三角形分割 Δ の f 列を

$$f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$$

とする。

以下、**頂点の個数 $v = f_0$ を固定する。**

球面の三角形分割

次元 $d - 1$ の球面 \mathbb{S}^{d-1} の三角形分割 Δ の f 列を

$$f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$$

とする。

以下、**頂点の個数** $v = f_0$ を固定する。

(Motzkin ; 上限予想 ; 1957年)

$f(\Delta)$ は**巡回凸多面体の境界複体**の f 列を越えない。

球面の三角形分割

次元 $d - 1$ の球面 S^{d-1} の三角形分割 Δ の f 列を

$$f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$$

とする。

以下、**頂点の個数 $v = f_0$ を固定する。**

(Motzkin ; 上限予想 ; 1957年)

$f(\Delta)$ は**巡回凸多面体の境界複体**の f 列を越えない。

(McMullen ; h 列 ; 1970年) いま、 Δ の h 列

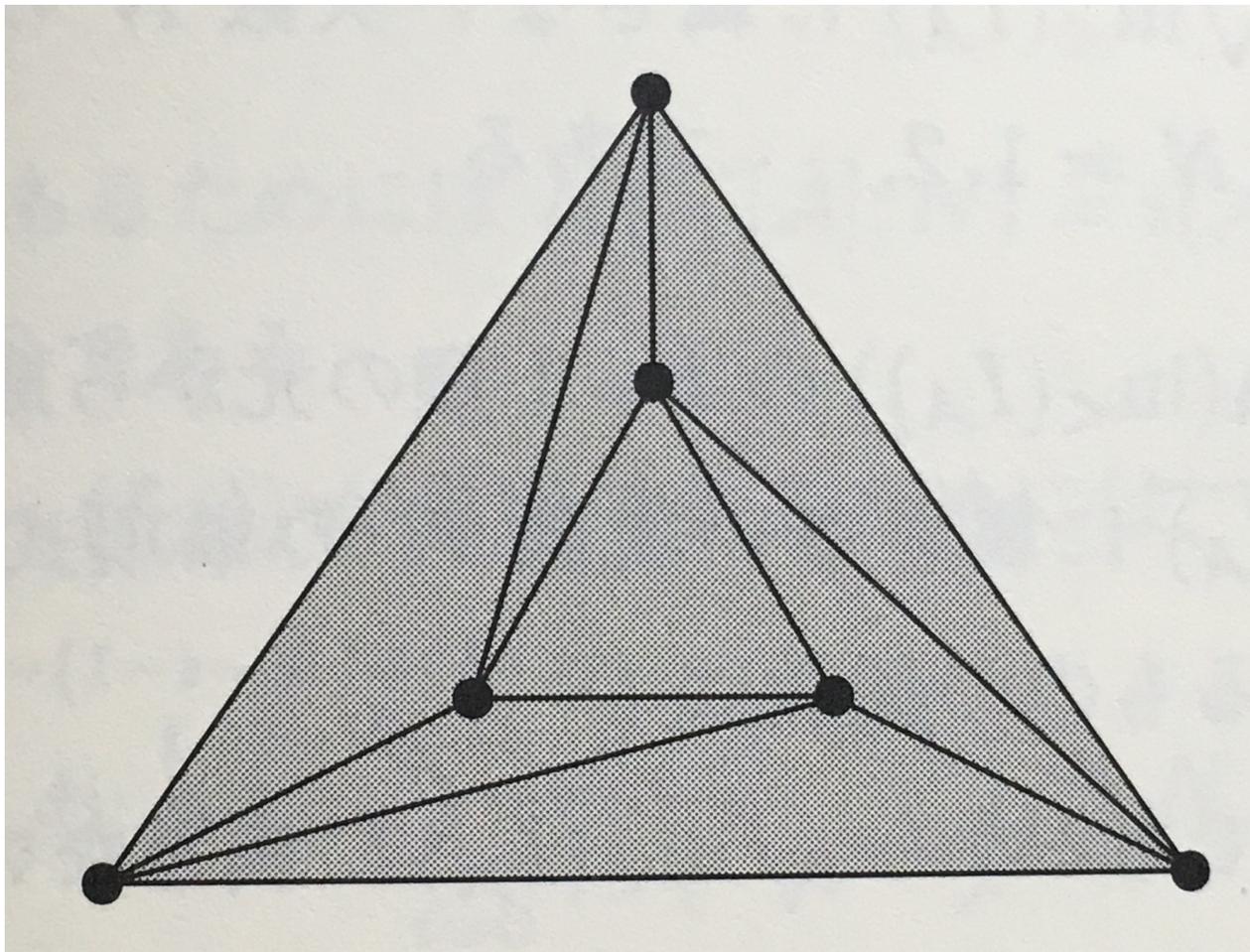
$$h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$$

を

$$\sum_{i=0}^d f_{i-1} (x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^d h_i x^{d-i}$$

と定義する。(但し、 $f_{-1} = 1$ である。)すると、

上限予想は、不等式 (☆) と一致する。



S^2 の三角形分割

$$f(\Delta) = (6, 12, 8) \quad h(\Delta) = (1, 3, 3, 1)$$

Cohen–Macaulay 環

定理 非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots が Krull 次元 d の Cohen–Macaulay 標準的次數環のヒルベルト函数であるならば、その数列の母函数は、有理函数 (**) となり、更に、不等式 (☆) が成立する。

Cohen–Macaulay 環

定理 非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots が **Krull 次元 d の Cohen–Macaulay 標準的次數環のヒルベルト函数** であるならば、その数列の母函数は、有理函数 (**) となり、更に、不等式 (☆) が成立する。

(Stanley–Reisner 環 $K[\Delta]$; 1974年)

Stanley : 次元 $d - 1$ の球面 S^{d-1} の三角形分割 Δ の h 列を $h(\Delta) = (h_0, h_1, h_2, \dots, h_d)$ とするとき、ヒルベルト函数の母函数が、有理函数 (**) となる標準的次數環 $K[\Delta]$ の構成に成功！

Cohen–Macaulay 環

定理 非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots が Krull 次元 d の Cohen–Macaulay 標準的次數環のヒルベルト函数であるならば、その数列の母函数は、有理函数 (**) となり、更に、不等式 (☆) が成立する。

(Stanley–Reisner 環 $K[\Delta]$; 1974年)

Reisner : 上限予想は知らず、Stanley と独立に $K[\Delta]$ を考察し、それが Cohen–Macaulay 環となるための条件を探し、特に、 Δ が球面の三角形分割ならば、 $K[\Delta]$ は Cohen–Macaulay 環となることを証明した。

Cohen–Macaulay 環

定理 非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots が Krull 次元 d の Cohen–Macaulay 標準的次數環のヒルベルト函数であるならば、その数列の母函数は、有理函数 (**) となり、更に、不等式 (☆) が成立する。

(Stanley–Reisner 環 $K[\Delta]$; 1974年)

(Stanley ; 1975年) 上限予想を肯定的に解決！

歴史的秘話 How the upper bound conjecture was proved

<http://www-math.mit.edu/~rstan/papers/ubc.pdf>

凸多面体の不易流行

「不易」編

1752年 オイラーの公式（オイラーの多面体定理）

1899年 ピックの公式

1962年 凸多面体のエルハート多項式

「流行」編

抽象論から具象論への時代の流れ

1975年 可換代数と凸多面体論

計算機の急激な発展、ソフトウェアの進化

1991年 グレブナー基底と凸多面体論

代数、計算、統計 . . .



基盤研究（S）2014年5月30日～2019年3月31日

統計と計算を戦略とする可換代数と凸多面体論の現代的潮流の誕生

参 考 文 献



証明の探究



日比 孝之 著

大阪大学出版会

数学嫌いも必携!!

『この本を高校時代に読んでおきたかった』
という声続出!!

証明の探究 高校

コミック



原作 日比孝之
漫画 門田英子

編
!

「数学する」ことは
証明することだ!



● 大阪大学の文系向け教養数学のテキストとして出版された『証明の探究』。数学教授の悲哀ある自伝とともに、過去の大学入試問題や中学入試問題などを著者の視点から紹介した、その名著がコミックで登場!

シュプリングー現代数学シリーズ

伊藤 雄二 編集

可換代数 と 組合せ論

日比 孝之 著

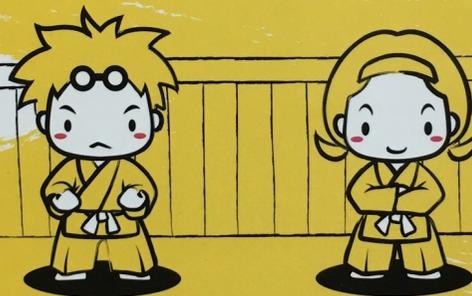
離散的な数学現象の研究において、
抽象代数の現代的理論が威力を発揮する

組合せ論の 斬新な特質を学ぶ

シュプリングー・フェアラーク東京

グレブナー道場

JST CREST 日比チーム(編)



グレブナー基底の奥義を **伝授**

共立出版

JST CREST 日比チームのメンバーが
総力を結集して執筆!



Herzog · Hibi

GTM
260

Graduate Texts in Mathematics



Monomial Ideals

Jürgen Herzog · Takayuki Hibi

Monomial Ideals

This book demonstrates current trends in research on combinatorial and computational commutative algebra with a primary emphasis on topics related to monomial ideals.

Providing a useful and quick introduction to areas of research spanning these fields, *Monomial Ideals* is split into three parts. Part I offers a quick introduction to the modern theory of Gröbner bases as well as the detailed study of generic initial ideals. Part II supplies Hilbert functions and resolutions and some of the combinatorics related to monomial ideals including the Kruskal-Katona theorem and algebraic aspects of Alexander duality. Part III discusses combinatorial applications of monomial ideals, providing a valuable overview of some of the central trends in algebraic combinatorics.

Main subjects include edge ideals of finite graphs, powers of ideals, algebraic shifting theory and an introduction to discrete polymatroids. Theory is complemented by a number of examples and exercises throughout, bringing the reader to a deeper understanding of concepts explored within the text.

Self-contained and concise, this book will appeal to a wide range of readers, including PhD students on advanced courses, experienced researchers, and combinatorialists and non-specialists with a basic knowledge of commutative algebra.

Since their first meeting in 1985, Jürgen Herzog (Universität Duisburg-Essen, Germany) and Takayuki Hibi (Osaka University, Japan), have worked together on a number of research projects, of which recent results are presented in this monograph.

ISBN 978-0-85729-105-9



> springer.com

 Springer