デカルト，フェルマー，パスカルの

数学（思想）を比較する

2015年3月20日

足立恒雄

デカルト (René Descartes, 1596 − 1650)
要約

1. デカルトの哲学は数学をモデルにしている．しかし，自らを数学者と呼ばれることは，パスカル同様，拒否した．何であれ，専門家というものはあまり高く評価されない時代だったのである．

2. デカルトは「全学問の数学化」を目指したと言える．物理的法則もすべて数学から導けるというデカルトの主張がフェルマーによって批判され，二人の間で論争が持ち上がったこともある．この事件がきっかけでフェルマーは西欧の知識世界で知られるようになった．

3. 厳密とされた幾何学に依るアラビア渡りの「怪しげな」代数学の厳密化の試みと,（面積，体積などの）量の体系の１元化はデカルトの重要な業績である．しかし，デカルトの場合でも，数を線分としてだけ捉えているため，数体系が幾何学から完全に独立しているとは言えない．

4. デカルトが解析幾何を創始したというのは物事を簡単に捉えすぎていて，事実とは言えない．デカルトは，解析幾何の基本である，座標軸の設定も，座標変換も，与えられた2変数の方程式がどういう曲線を表すかも，一切扱っていない．x, y の任意に与えられた2次方程式が円錐曲線を表わすことは，一部はフェルマーによって示され，最終的にはヤン・デ・ヴィット（1623—1672）によって証明された．（カッツ『数学の歴史』，第11章第1節参照）．われわれは先に固定された座標系を考えるけれども，固定された縦軸が登場するのはオイラーを待たねばならない．

5. 記号法の刷新は革命的と言えよう．記号史上，デカルトに比肩できるのはライプニッツ位である．

フェルマー（Pierre de Fermat，1607－1665）要約

1. フェルマーは，問題を解くという数学的能力においては，三人の中で一番上であり，当時「ヨーロッパ第一の幾何学者」（パスカルの言）と呼ばれていた．デカルト，パスカルと違って，生涯数学に打込んだという意味では,「アマチュアの王者」という呼称は誤っている．

2. フェルマーはアポロニウスなどのギリシア古典の創造的復元から数学に入り，解析幾何を導入した．与えられた2変数の方程式に曲線が対応することはフェルマーが指摘したことである．

3. 整数論は数のパズル，あるいは数秘術の形では存在したが，系統立って研究されたことはほとんどなかった．17世紀は微積分学が出現する直前の時代で，自然数を扱う数学は幼稚と見られていた．整数論の面白さをイギリスの数学者たちに向かって力説したフェルマーは近代整数論の祖と言えるだろう．だがその死後オイラーが登場するまでの70年間整数論は再び眠りに就いた．

4. フェルマーはディオファントスの『算術』を読み，そこで扱われている2次不定方程式の有理数解（幾何学的に観れば，2次曲線の有理点）の問題を3次，4次の不定方程式の有理数解（楕円曲線上の有理点）の問題に発展させた．そういう意味で，フェルマーは楕円曲線論の祖でもある．ただし，後年のオイラーもそうだが，問題を幾何学的に扱ったわけではない．

5. 「微分学の祖」と呼ばれたり，確率論の魁としての業績もあるが，これらについては本講演では割愛する．

パスカル（Blaise Pascal，1623－1662）
要約

1. 「時間」や「存在」などのように，それ以上は簡単な言葉で説明しようのない始原的概念を「無定義用語」として捉えようという思想はパスカルに始まる．
2. 数学的帰納法を定式化したのはパスカルの功績である．(ただしフェルマーの言う「私の方法」，すなわち「無限降下法」も数学的帰納法と同値である.）こうした業績から観られるように，論証の明晰さはパスカルの特徴である．ただ記号法にはまったく関心がなかったようで，この精神構造はニュートンに似ている．
3. パスカルは「神秘六角形の定理」を，円の場合に証明し，射影によって任意の円錐曲線の場合に拡張するという方法で証明した．
4. フェルマー同様，求積や確率論の魁の業績もあるが，これらについては本講演では割愛する．

デカルト『方法序説』

デカルトが『方法序説』において学問の方法としていることは以下のように要約される．数学から受けた影響の大きさが看取される：

1. 一番単純で，一番認識しやすい命題を「第一原理」（一種の公理）とする．
2. どんなに難しい，遠い命題でも，単純な易しい推論を重ねて行けば，必ず到達できる．
3. 証明できない命題は一切信用しない．

しかしながら,「自分が存在する」という事実だけを第一原理にして一切合財を説明できるというのは大ざっぱ過ぎるのではないだろうか？　またデカルトは合理主義の祖とされ，それはその通りだが，第一原理からすべて演繹するという思想は科学的合理主義とは相容れないものがある．この点ではガリレオに遠く及ばない．

> 真空中の物体の落下の速さにしても，ガリレオが述べていることはすべて何の根拠もない．というのは，まずガリレオが決定すべきであったのは，重さとは何かであって，もし彼が真実を知っているなら，真空中の重さは無であることがわかったであろう．

デカルト『幾何学』

1. 数の四則演算を作図で説明し，当時怪しげな学問とみなされた代数学を基礎付けた．

2. ヴィエトの「同一次元の要請」を進めて，すべての量は線分（1次元）で表せるとした．これは量の体系の1元化と評価できる．

   > （線分）a にもう一度 a を掛ける場合は aa または a^2 と，これにもう一度 a を掛ける場合は a^3 と書き，以下どこまでも進む．（中略）ここで注意してほしいが，a^2，b^3 そのほか類似の書き方をするとき，私も代数学で用いられている用語を使って，これを平方（正方形：carré），立方（立方体：cube）などど呼びはするが，普通は単なる線（分）しか考えていないのである．

   ただし，a^n という記号を発明したわけではないことは注意を要する．この自然数を変域とする文字の使用は，ラグランジュ（の時代）に始まる．

3. 記号法の革新（「多項式 $= 0$」の記号法にも注意）

   $$y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = 0$$

   ヴィエトの記号例（複数の変数の使用にも注意）：

   $$A \text{ cubus} + B \text{ plano } 3 \text{ in } A, \text{ aequari } Z \text{ solido } 2$$

   コス代数の記号例（1変数であることに注意）：

   $$2C + 2Q + U = N$$

Fermat #1

ディオファントス『算術』

1. フェルマーはアレクサンドリアのディオファントス（3世紀）の『算術』を読み，それを一般化した48項の考察を余白に書き残した（その翻訳と解説は[2]).

2. 『算術』は，現在の言葉で言えば，2次不定方程式の有理数解，同じことだが，2次曲線の有理点を求める問題を集めた問題集である．ギリシアでは，自然数のみを数としたが，ディオファントスが有理数を数の仲間に加えた．近代に至るまでその習慣が続いた．

3. 以前は，自然数解は難しいので有理数解で済ませた（ゴマカシた）とか，一つの解を求めることで満足しているといった評価だったが，最近では代数曲線の有理点の理論の「遠祖」として評価が一変した.（あるいは，そう評価されるべきである.）

4. 『算術』の問題の例．ただし現代的表現による．

   (a) a, b を与えられた「数」（すなわち正の有理数）とするとき、

   $$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

   の解（正の有理数解）(x, y) を求めよ．

   (b) a, b, c, d を与えられた「数」とするとき，

   $$ax + b = \square, \quad cx + d = \square$$

   の解（正の有理数解）x を（種々の制約条件の下に）求めよ．ただし a, c が平方数であるか，b, d が平方数であるとする．

Fermat #2

楕円曲線とは

1. フェルマーは『算術』の問題を 3 次式，4 次式，また二つの 2 次式に拡張して考察する．これは現代数学で言うと，楕円曲線の有理点を求める問題である．

2. 楕円曲線とは標準形

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (\text{ただし右辺} = 0 \text{ は重解を持たない})$$

   に <u>双有理同値</u> な曲線のことである．

3. フェルマーは有理点が一つ与えられたとき接線を使って他の有理点を求める方法を「バシェの方法」と呼んでいる．一般的な接弦法を考えたのはニュートンが最初であろう．

4. 楕円曲線の点の間に演算 $+$ を定義して，加法群にすることができる．

Fermat # 3

『欄外書込み』に現れる楕円曲線の例

1. a, b を与えられた「数」とするとき

$$x^3 + y^3 = a^3 + b^3$$

には（正の有理数）解 $(x, y) \neq (a, b)$ を（無数に）求めよ．

2. a, b, c, d を与えられた数とするとき，

$$ax^2 + b = \square, \quad cx^2 + d = \square$$

の解を求めよ．ただし a, c は平方数であるか，b, d は平方数であるとする．

3. a, b, c, A, B, C を与えられた「数」とするとき，

$$ax + A = \square, \quad bx + B = \square, \quad cx + C = \square$$

の解 x を求めよ．ただし a, b, c は平方数であるか，A, B, C は平方数であるとする．

4. (a) 第２項の２次曲面の交線は楕円曲線

$$y^2 = x(ax + b)(cx + d)$$

に双有理同値である．

(b) 第３項の定める曲線は楕円曲線

$$y^2 = (ax + A)(bx + B)(cx + C)$$

に双有理同値である．

Fermat # 4

『算術』の『欄外書込み』第２

> これに反し，立方を二つの立方に，平方平方を二つの平方平方に分かつこと，一般に，平方より大きい任意の冪を二つの同名のものに分かつことはできない．そのことの真に驚くべき証明を見つけたが，この余白はそれを記すには狭すぎる．

この書込みから，当時の数学についてわれわれはたくさんのことを知ることができるが，それはさておき，書込みを現代的に述べると次のようになる：

$n(\geq 3)$ を自然数とし，a を与えられた正の有理数とするとき

$$a^n = x^n + y^n$$

を満たす正の有理数 $x,\ y$ は存在しない．

これは次のように自然数の問題として言い換えられる：

フェルマーの大定理　n を 3 以上の自然数とすると

$$x^n + y^n = z^n$$

は自然数解 $(x,\ y,\ z)$ を持たない．

フェルマーは本当に「驚くべき証明」を持っていたのだろうか？

Fermat # 5

整数論の始祖フェルマー

フェルマーは整数論に深遠さ，美しさを見つけていた．

> 算術の問題を出す人はほとんどいない．またそれらを理解する人もほとんどいない．これは，現在まで算術が算術的によりはむしろ幾何学的に扱われてきたという事実によるのだろうか．それは実際，一般的に言って古代においても現代においてもその通りである．ディオファントスでさえその例にもれない．彼は自分の解析法を有理数の範囲に制限することによって，他の者たちよりはいくぶん幾何学から解放されていたが，それですら幾何学が完全に姿を消しているわけではない．…
>
> それだから算術をして，それ自身の固有の領域である整数の理論を回復せしめよ．算術の学徒をして，エウクレイデスによって『原論』においてかすかに触れられているが，彼に従う者たちによって十分に展開されたとは言い難いこの領域を発展させる努力をさせしめよ．
>
> したがって，算術の学徒に，辿るべき道を照らさんがために，次のような証明さるべき定理，または解かるべき問題を提示する．もしもこれを証明すること，または解くことに成功したならば，この種の問題が幾何学における名高い問題に比して，美しさにおいても，難しさにおいても，また証明の方法においても劣るものではないことを認めるであろう．
>
> （『イギリスの数学者たちへの挑戦状前文』：[3] 参照）

Fermat # 6

フェルマーの解いた整数論の問題の例

1. $4n+1$型の素数pは$p=x^2+y^2$というように，二つの平方数の和に，ただ一通りに表せる．たとえば，$5=1^2+2^2$，$13=2^2+3^2$．（証明は「私の方法」による.）

2. 「Dを自然数とし，平方数ではないとする．このときDに平方数を掛けて1を加えると平方数になるような自然数の組を求めよ.」（現代記号で書けば,
$$Dx^2+1=y^2$$
を満たす自然数x, yを求めよ．たとえば$D=2$なら$x=2, y=3$が一つの答.）フェルマー曰く,「一般的に解くのが難しいなら，$D=61$，あるいは$D=109$という，ごく易しい場合に求めるだけでも良い.」（イギリスの数学者に対する第2挑戦状）

   $D=61$のとき　$x=226153980$が最小の解.

   $D=109$のとき　$x=15140424455100$が最小の解.

3. 立方数であって，そのすべての約数の和が平方数になるものを探せ．たとえば$343=7^3$であって，その約数は$1, 7, 7^2, 7^3$でその和は$400=20^2$である．同じ性質を持つ立方数をもう一つ与えよ．（第2挑戦状）

   最小の解は$(2\cdot3\cdot5\cdot13\cdot41\cdot47)^3$

Fermat # 7

イギリスの数学者たちの反応

1. イギリスの（ウォリスを筆頭とする）数学者たちは最初は「数」というのを「有理数」だと受け取って，

$$x = \frac{2mn}{Dn^2 - m^2}, \quad y = \frac{Dn^2 + m^2}{Dn^2 - m^2}$$

（ここに m, n は任意自然数）を答として送った．

2. これでは答になっていないというフェルマーの返事に対してブランカー子爵は $1/n^6$ が答であると述べている．またウォリスは次のように書いている．数学者としてのセンスの違いとともに解析学の興隆する時期に来ているのだという時代性を感じさせる逸話である．

> この問題は完全だの，不足だの，過剰だのというお定まりの問題と全く軌を一にするものです．これらの問題は，すべての問題を包括する一般の方程式には決して還元できません．問題の焦点が何であろうと，私にはせねばならぬ仕事がたくさんあって，すぐにこの方面に関心を向けるというわけにはまいりません．しかしながら，今のところ次の答えを与えることができます．1 自身がその答です.（ブランカー子爵への手紙より）

.

Pascal # 1

無定義概念の認識

それ以上は簡単な言葉で説明しようのない始原的概念を無定義用語として捉えようという思想はパスカルに始まる．

> 私がすべての人に知られているというのは，これらの事柄の本性のことではない．それは単に名称と事物との間の関係のことに過ぎない．そこで,「時間」という表現に出会うと，すべての人は同じ対象に思いを向けるのである．それだけで，この用語は定義する必要がない．しかし，後で時間とは何かということを吟味する段になると，いったんそこに思いを向けた人が異なる意見を持つようになるのである．なぜなら，定義が作られるのは，命名される事柄を指示するためであって，その本性を示すためではないからである．　(『幾何学的精神について』)

Pascal # 2

推論の確実性に関する議論

すべての用語を定義し，すべての命題を証明するという…方法は（遡及が有限では終わらないために）絶対に不可能である．それゆえに，もはや定義することの出来ない始原的な用語と，それ以上明白なものは見出し得ない原理（公準）とに必然的に到達する．したがって，人間は，どんな学問でも，それを絶対的に完結した秩序によって処理することは，自然的にも恒久的にも不可能であるように思われる．

しかし，そこからあらゆる種類の秩序を放棄すべきであるという結論は出て来ない．

なぜなら，ここに一つの，それは幾何学の秩序であるが，説得力の足りない点では劣っているが，確実性の足りない点では劣っていない秩序がある．それは一切の用語を定義することも，一切の命題を証明することもしない．その点において，それは完結した秩序には劣っている．だが，それは自然の光に照らして明白で不変な事柄しか仮設しない．であるから，それは完全に真実であり，自然が論述に代わってそれを支えるのである．　（『幾何学的精神について』）

Pascal # 3

無限についての考察

われわれは無限が存在するということを知っているが，その本質を知らない．例えば，数は有限であるというのが誤りであるということをわれわれは知っている．それゆえ数の無限が存在するということは真である．しかし，われわれはそれが何であるかを知らない．それは偶数であるというのも誤りであるし，それは奇数であるというのも誤りである．なぜなら，それに 1 を加えても，その本質に変わりはないからである．にもかかわらず，それは数であり，あらゆる数は偶数か奇数かである．

それゆえ，われわれは神が何であるかを知らないまでも，神が存在するということは知ることができる．（『パンセ』より）

1. 英語で言うと「数」も「個数」もともに number である．つまり印欧語では元来，数とは個数に他ならないということである.「数は無限である」とは「自然数の個数は無限である」という意味であろう．しかしだからといって,「自然数の全体」が「数」であるということにはならない．

2. 無限に対する考察に関してはガリレオ（1564—1642）の方が数学的観点から観れば優れている（[4],[5] 参照）．

Pascal # 4

負数についての考察

> 私は，ゼロから４を引けばゼロであることを理解し得ない人がいるのを知っている．(『パンセ』より)

負数はヨーロッパ世界では東洋世界からはるかに遅れて発達した．負数を個数を使って説明することができないからである．したがって，上のような幼稚な考察はパスカルに固有のものではない．そもそもヨーロッパでは，ギリシア以来の「数＝個数」という固定観念に縛られていて，数とは何かという認識がそれ以上発展しなかったのである．

Pascal # 5

数学的帰納法の定式化

数学的帰納法の implicit な使用はすでに『ストイケイア（原論）』にも見られることであるが，パスカルによって，初めて現在の形式に定式化された．このことはフロイデンタール（1953 年）によって考証された．

最初の例は『数三角形論』「命題第 12」であるが，これを現代記号法で書くと

$$ {}_nC_k \ : \ {}_nC_{k-1} = (n-k+1) \ : \ k $$

の証明である．

原亨吉によると，パスカルが数学的帰納法を定式化したのは，1654 年 7 月 29 日から 8 月 29 日の間だということである．

Pascal # 6

この命題には無限に多くの場合があるが，私は二つの補題を仮定することによって極めて短い証明を与えよう.（『数三角形論』「命題第 12」）

補題 1　この命題は自明なことだが，第 2 段において成り立つ.

補題 2　もしこの命題が任意の段において成り立つならば，必然的に次の段においても成り立つ.

ここから，この比例関係は必然的にすべての段において成り立つことがわかる．なぜならば，補題 1 によってこの命題は第 2 段において成り立つ．故に，補題 2 によって，命題は第 3 段において成り立つ．故に，第 4 段においても成り立つ．以下限りなく同様である.

故に補題 2 のみ証明すればよい．それは次のようにすればよい．今この比例が任意の 1 段，たとえば第 4 段において成り立つとする．… 故に，第 5 段においても成り立つ．証明終わり.

残るすべての場合についても，同様にして同じことが示される．というのもこの証明は，この命題が直前の段において成り立つということと，各細胞（${}_nC_k$ のこと）が直上の二つの細胞の和に等しいということのみに基づいているが，このことは至る所において真なのであるからである.

Pascal # 7

パスカルの神秘六角形

パスカルの定理　C を滑らかな円錐曲線とし，その上の 6 角形の頂点を $P_1, ..., P_6$ とする．この 6 角形の三つの対辺を延長してその交点を作る．たとえば,

$$\overline{P_1P_2}\bigcap\overline{P_4P_5}=\{Q_1\},\quad \overline{P_2P_3}\bigcap\overline{P_5P_6}=\{Q_2\},\quad \overline{P_3P_4}\bigcap\overline{P_6P_1}=\{Q_3\}$$

と定める．このとき 3 点 Q_1, Q_2, Q_3 は１直線上にある．

パスカルの定理は，デザルグの創始した射影幾何学の適用の見事な１例である．初等幾何を使って証明されているが，現在では線型代数（連立１次方程式の理論）を使って簡潔な証明を与えることができる．

Pascal # 8

証明

1. **補題（重要）**　二つの3次曲線C_1, C_2がちょうど9個の点$P_1, ..., P_9$で交わっているとする．Dをもう一つの3次曲線とし，$P_1, ..., P_8$を通っているとすれば，DはP_9も通っている．

2. **補題の証明**　3次曲線は10個の係数を持つ3次方程式で定義されるので，8個の点$P_1, ..., P_8$は8個の10元同次連立1次方程式を与える．C_1, C_2はその独立な解であるため，$P_1, ..., P_8$を通る3次曲線Dは
$$D \ : \quad F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$$
という形に表される．ここにF_iはC_iの方程式である．$F_1(P_9) = F_2(P_9) = 0$であるため$F(P_9) = 0$である．Q.E.D.

3. **パスカルの定理の証明**　二つの3次曲線
$$C_1 = \overline{P_1P_2} \bigcup \overline{P_3P_4} \bigcup \overline{P_5P_6}, \quad C_2 = \overline{P_2P_3} \bigcup \overline{P_4P_5} \bigcup \overline{P_6P_1}$$
を考える．9点$P_1, ..., P_6, Q_1, Q_2, Q_3$はすべて$C_1$と$C_2$上にある．

4. そこで第3の3次曲線
$$D = C \bigcup \overline{Q_1Q_2}$$
を考えると，8点$P_1, ..., P_6, Q_1, Q_2$はD上にある．補題によってQ_3もD上にある．Q.E.D.

5. なお，上の補題を使うと，楕円曲線Cは演算$+$によって加法群を成すことが簡単に証明される．

参考文献

[1] 足立恒雄『数学から社会へ＋社会から数学へ』（東京図書:2013年）

[2] 足立恒雄『フェルマーを読む』（日本評論社：1986年）

[3] 足立恒雄『フェルマーの大定理－整数論の源流』（日本評論社：1984年）：ちくま学芸文庫に収録

[4] 足立恒雄『無限のパラドクス』（講談社ブルーバックス：2000年）

[5] 足立恒雄『$\sqrt{2}$の不思議』（光文社カッパサイエンス：1994年）：ちくま学芸文庫に収録