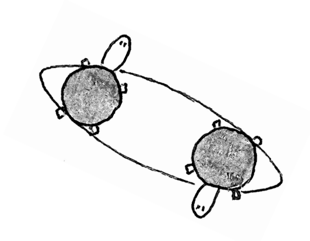
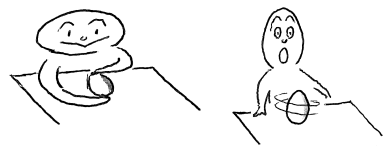
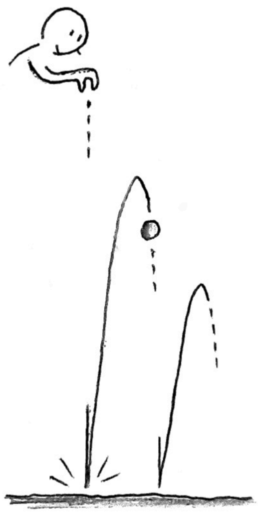
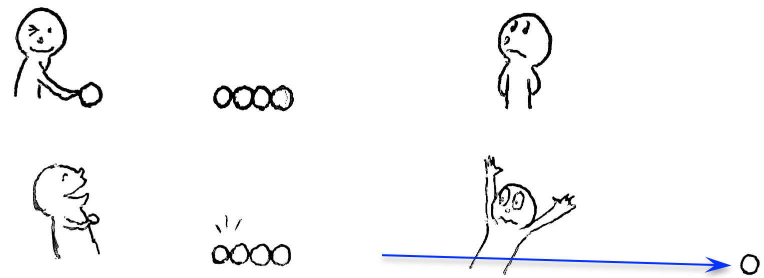
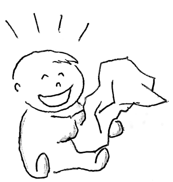
おもちゃからの数理モデル

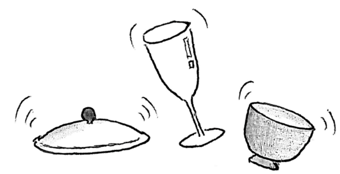


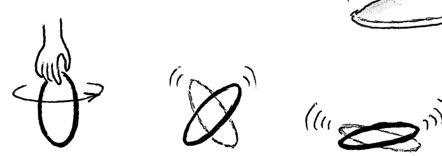


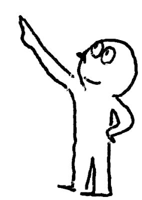


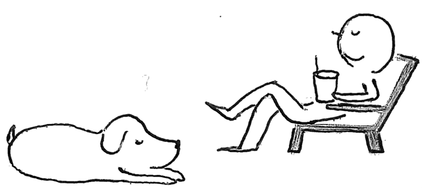






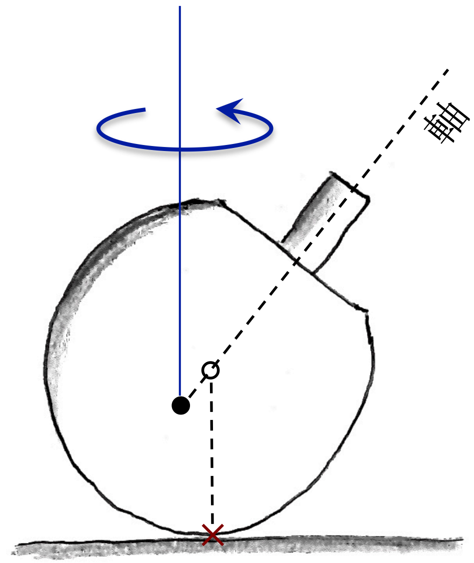


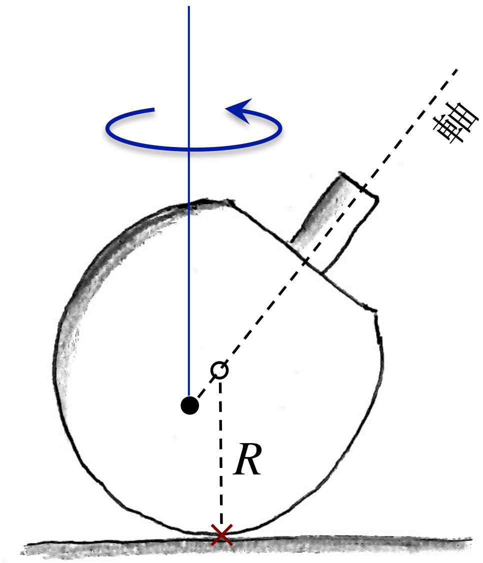




時枝正

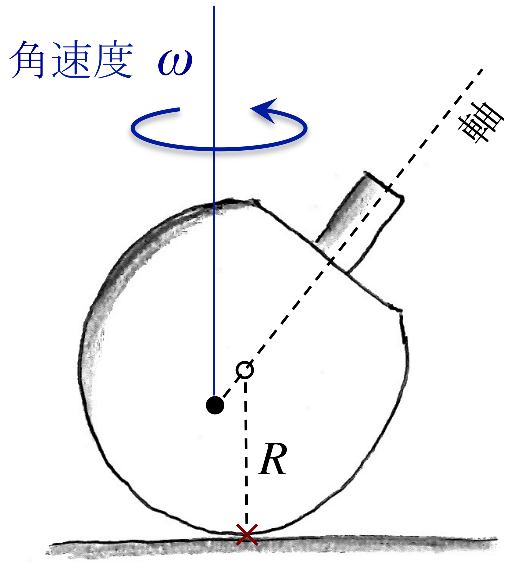
数学会市民講演　２０１４年３月


軸



「次元解析」

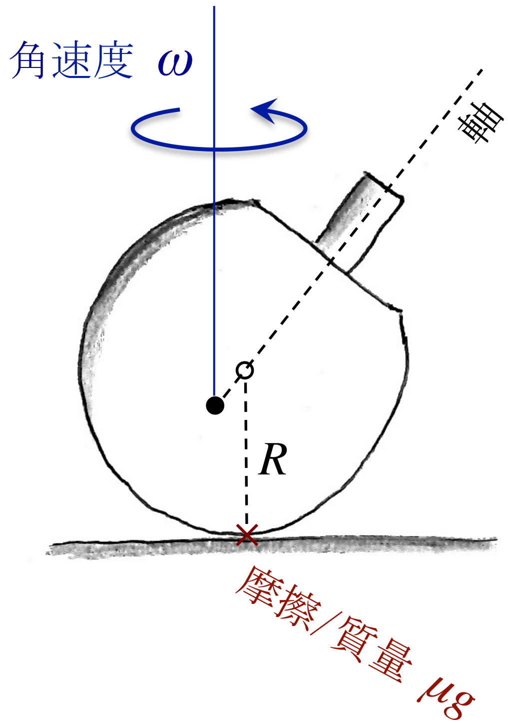
$[R] =$ 長さ



「次元解析」

$$[\,R\,] = \text{長さ}$$

$$[\,\omega\,] = \frac{1}{\text{時間}}$$

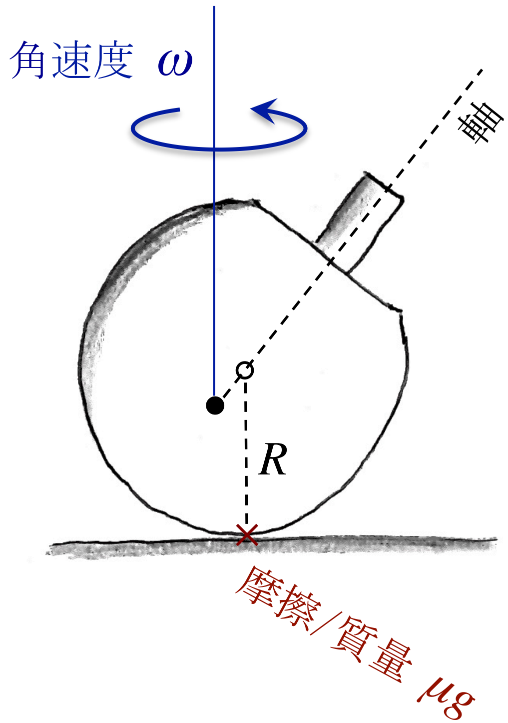


「次元解析」

$$[\,R\,] = \text{長さ}$$

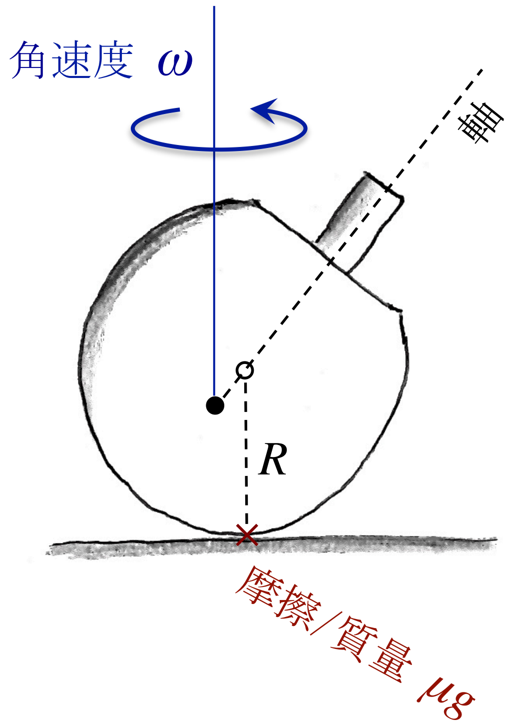
$$[\,\omega\,] = \frac{1}{\text{時間}}$$

$$[\,\mu g\,] = \frac{\text{長さ}}{\text{時間}^{2}}$$



「次元解析」

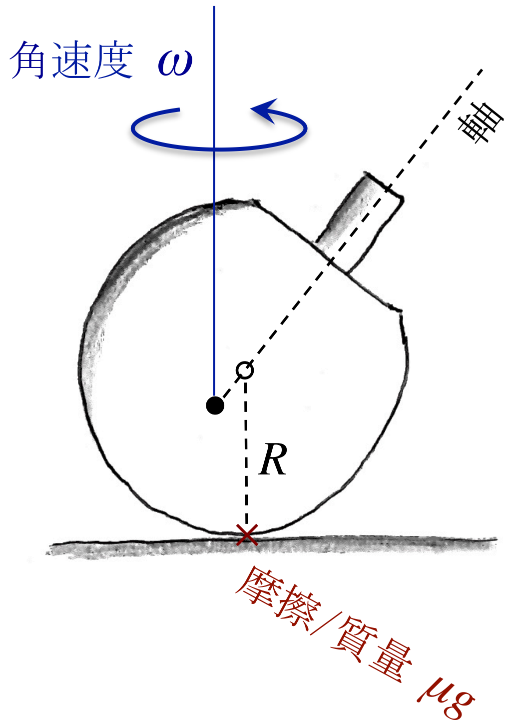
$$
\left.
\begin{aligned}
[\,R\,] &= \text{長さ} \\
[\,\omega\,] &= \frac{1}{\text{時間}} \\
[\,\mu g\,] &= \frac{\text{長さ}}{\text{時間}^2}
\end{aligned}
\right\}
\Longrightarrow \quad \text{逆立ちにかかる時間} \sim \frac{R\,\omega}{\mu g}
$$



「次元解析」

$$\left.\begin{aligned} [\,R\,] &= \text{長さ} \\ [\,\omega\,] &= \frac{1}{\text{時間}} \\ [\,\mu g\,] &= \frac{\text{長さ}}{\text{時間}^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{逆立ちにかかる時間} \sim \frac{R\,\omega}{\mu g}$$

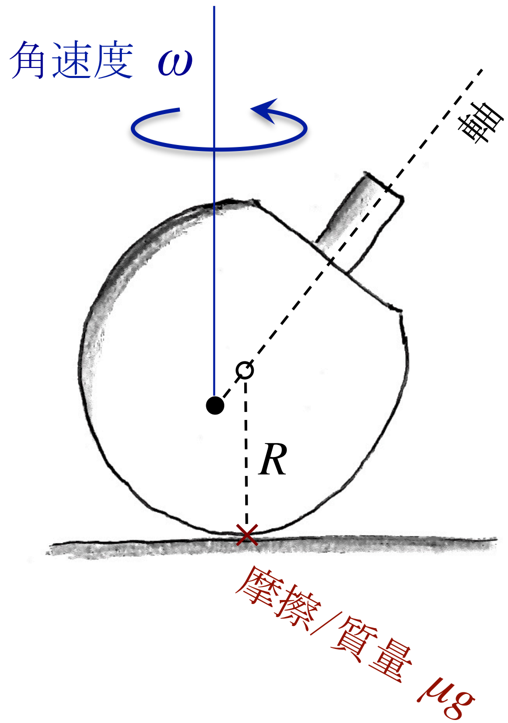
$$\approx \frac{\times}{\times}$$



「次元解析」

$$\left.\begin{aligned} [\,R\,] &= \text{長さ} \\ [\,\omega\,] &= \frac{1}{\text{時間}} \\ [\,\mu g\,] &= \frac{\text{長さ}}{\text{時間}^{2}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{逆立ちにかかる時間} \sim \frac{R\,\omega}{\mu g}$$

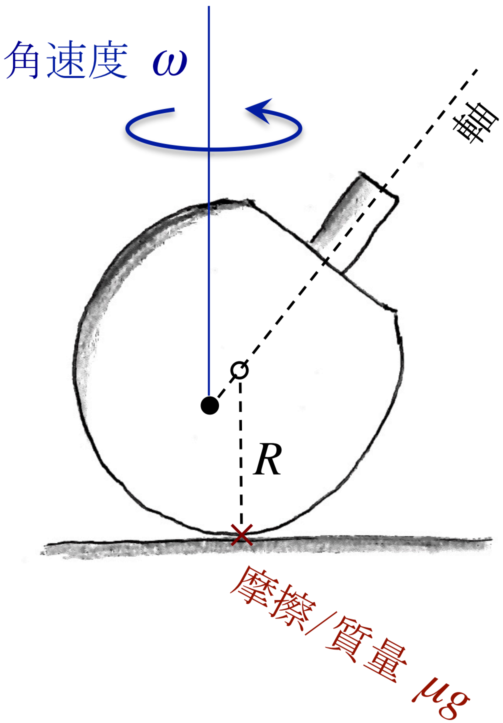
$$\approx \frac{2\ \times\qquad\qquad}{\times}$$



「次元解析」

$$\left.\begin{aligned}[R] &= \text{長さ} \\ [\omega] &= \frac{1}{\text{時間}} \\ [\mu g] &= \frac{\text{長さ}}{\text{時間}^2}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{逆立ちにかかる時間} \sim \frac{R\,\omega}{\mu g}$$

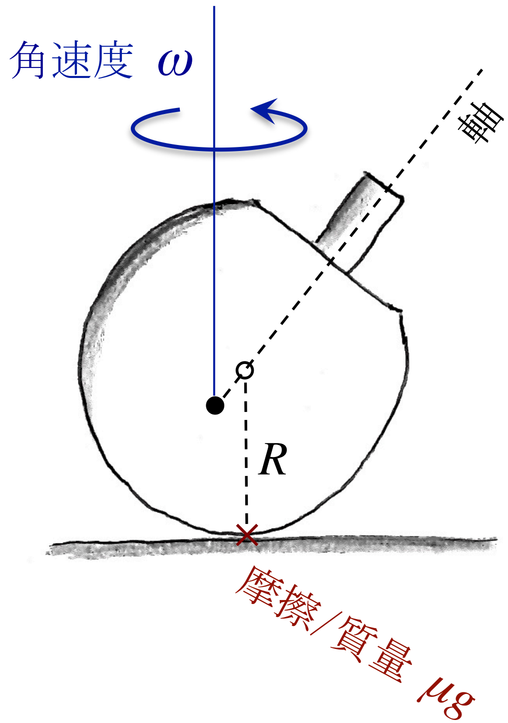
$$\approx \frac{2\ \times}{{}^1\!/_4 \times 1000}$$



「次元解析」

$$
\left.
\begin{aligned}
[\,R\,] &= \text{長さ} \\
[\,\omega\,] &= \frac{1}{\text{時間}} \\
[\,\mu g\,] &= \frac{\text{長さ}}{\text{時間}^{2}}
\end{aligned}
\right\}
\Longrightarrow \quad \text{逆立ちにかかる時間} \sim \frac{R\,\omega}{\mu g}
$$

$$
\approx \frac{2 \times 2\pi \cdot 30}{{}^{1}\!/_{4} \times 1000}
$$



「次元解析」

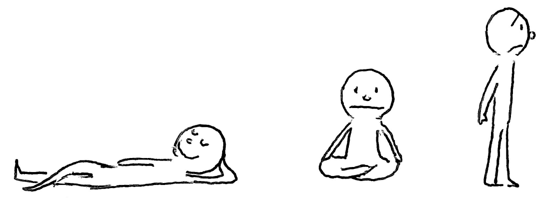
$$
\left.\begin{aligned}
[\,R\,] &= \text{長さ} \\
[\,\omega\,] &= \frac{1}{\text{時間}} \\
[\,\mu g\,] &= \frac{\text{長さ}}{\text{時間}^2}
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{逆立ちにかかる時間} \sim \frac{R\,\omega}{\mu g}
$$

$$
\approx \frac{2 \times 2\pi \cdot 30}{{}^{1}\!/_{4} \times 1000} \approx \text{約 } \mathbf{1.5} \text{ 秒}
$$

実は次元解析から得られるのは

$$\text{逆立ちにかかる時間} \times \omega \sim f\left(\frac{R\,\omega^2}{\mu g}\right)$$

までだが、一番単純な　$f(x) = x$　を採ってうまくいった



逆立ちがおきる条件詳しくは．．．

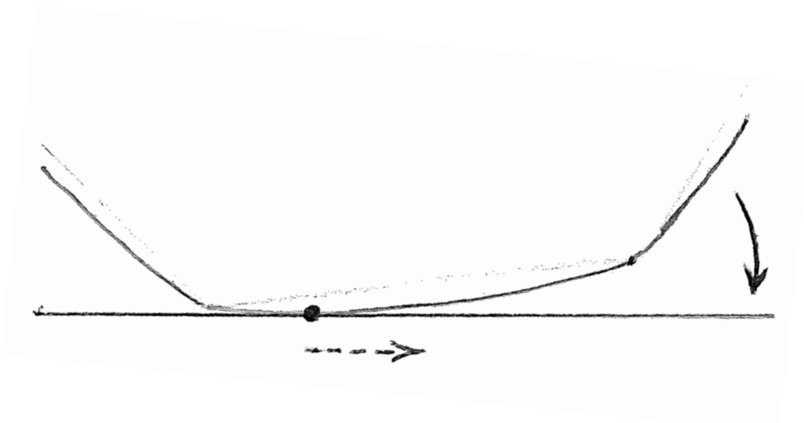
δ = 重心と曲率中心の距離 / R
ε = 1 − (軸のまわりの慣性モーメント / それに垂直方向の慣性モーメント)

とおいて

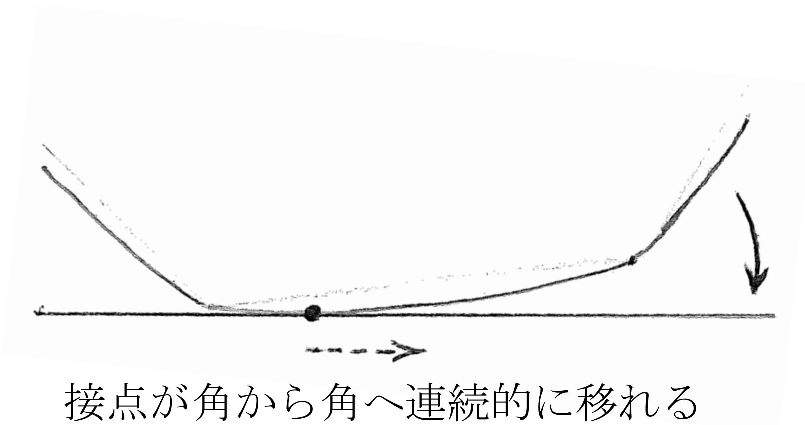
十分まるく、二つの中心が離れていること：$\dfrac{\varepsilon}{\delta} \lesssim 1$

初角速度が十分速いこと：$R\,\omega^2 \gtrsim \dfrac{g}{1 - \frac{\varepsilon}{\delta}}$

各辺を微小 ε だけふくらませると

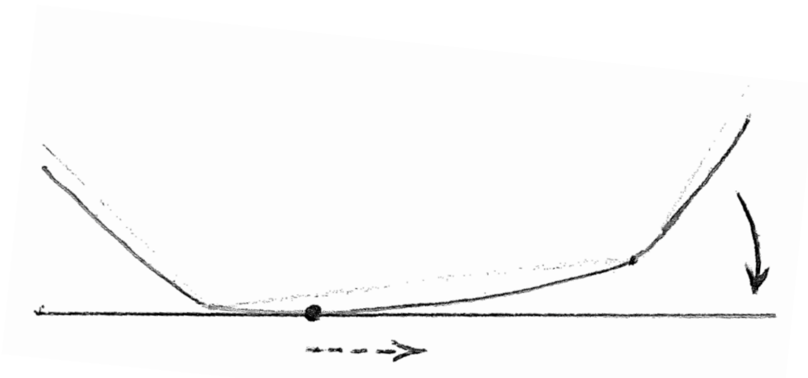


各辺を微小 ε だけふくらませると



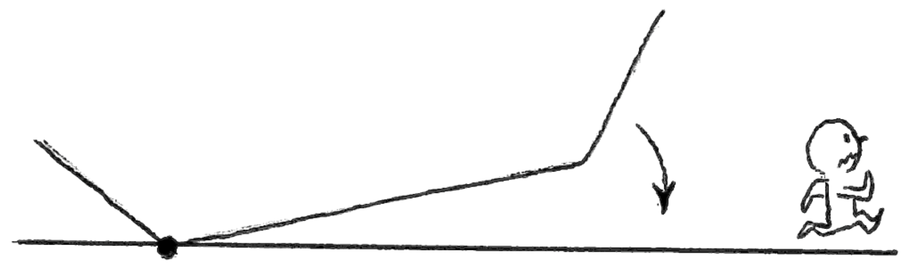
接点が角から角へ連続的に移れる

各辺を微小 ε だけふくらませると

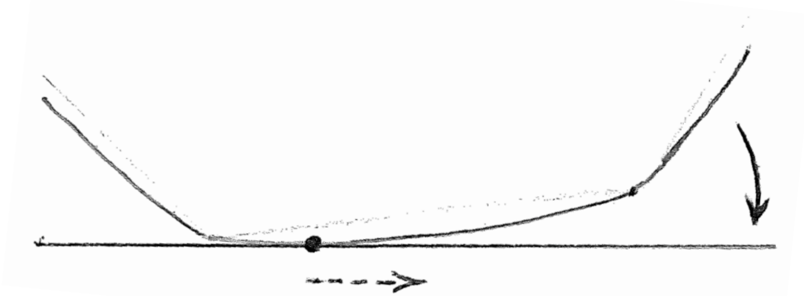


接点が角から角へ連続的に移れる

しかし ε が0になるやいなや

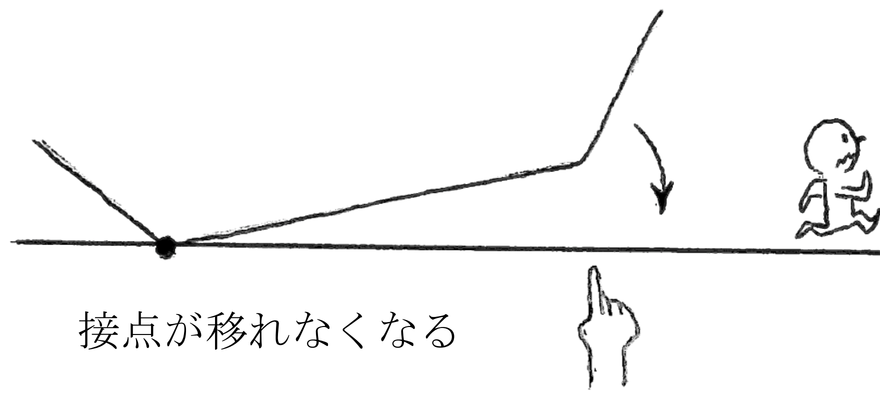


各辺を微小 ε だけふくらませると



接点が角から角へ連続的に移れる

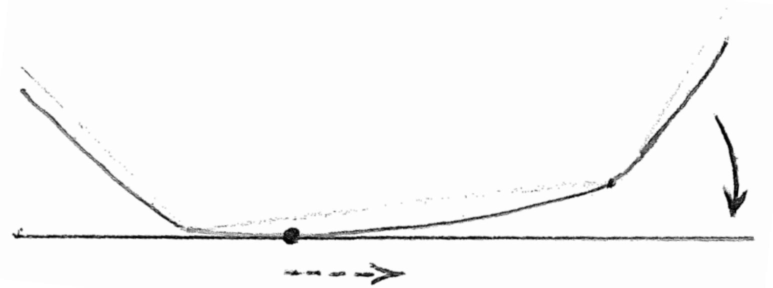
しかし ε が0になるやいなや



接点が移れなくなる

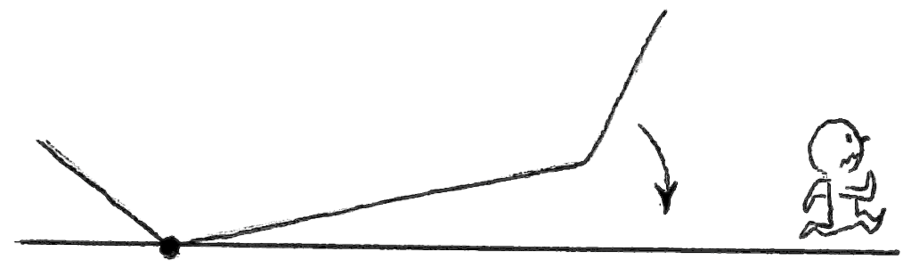
ここで衝突！

各辺を微小 ε だけふくらませると



接点が角から角へ連続的に移れる

しかし ε が0になるやいなや



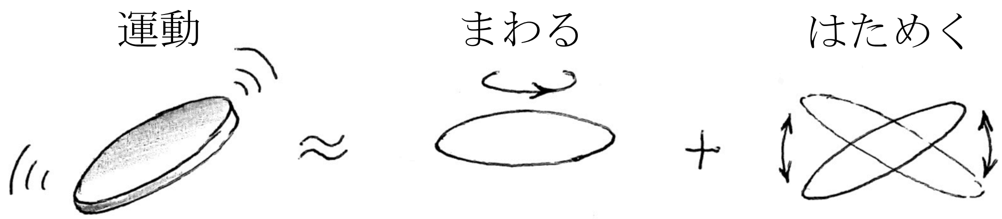
接点が移れなくなる

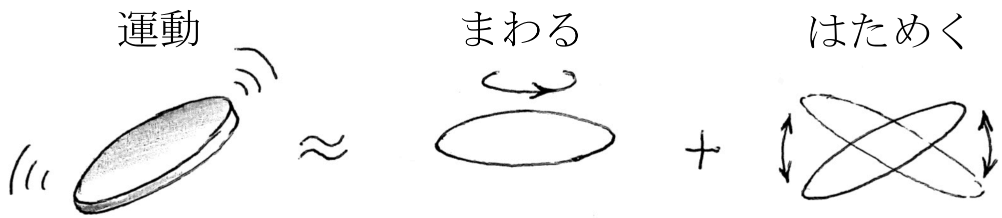
ここで衝突！

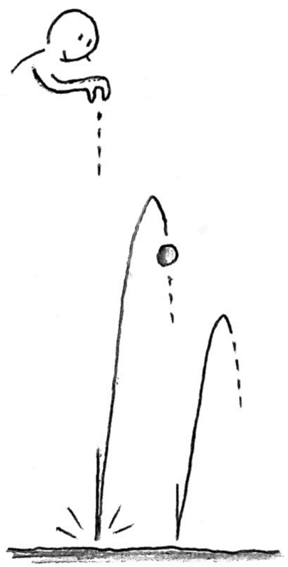
「特異摂動」

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ \mathrm{model}_{\varepsilon} \neq \mathrm{model}_{0}$$

（このおもちゃの $\varepsilon \lesssim 0.1\mathrm{mm}$）

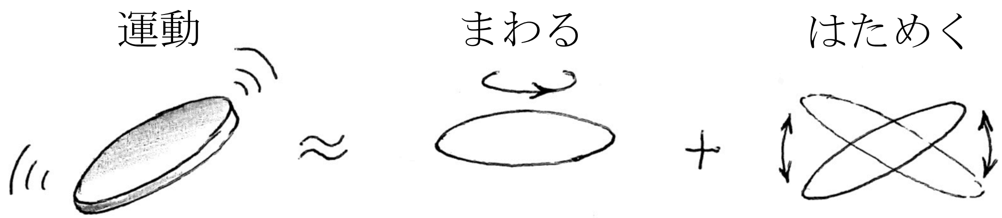

運動
≈
まわる
+
はためく

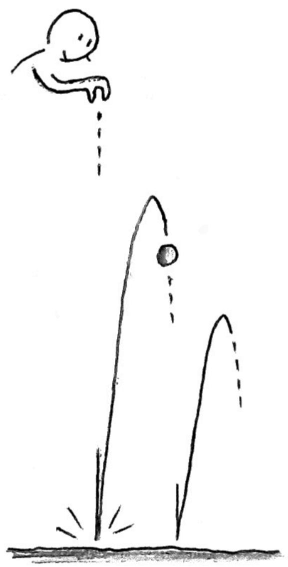




はねかえり = はためき類推：

エネルギー $E \sim$ 高さ $\sim$ 時間$^2 \sim$ はねかえり振動数$^{-2}$



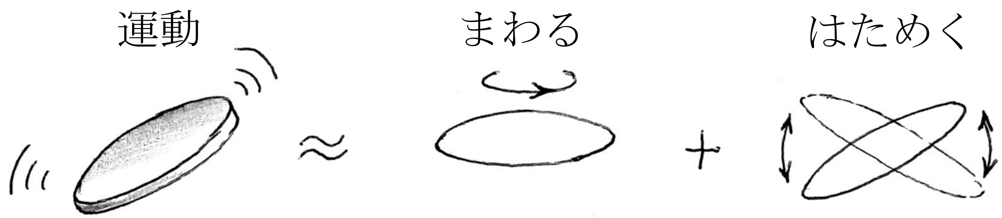


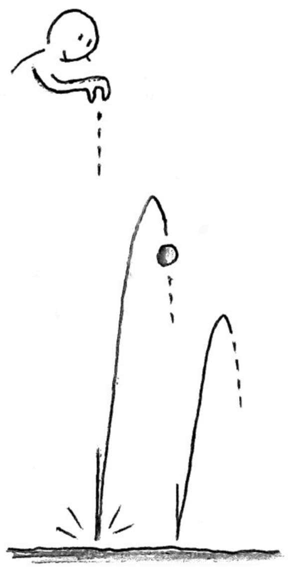
はねかえり = はためき類推：

エネルギー $E \sim$ 高さ$\sim$ 時間$^2 \sim$ はねかえり振動数$^{-2}$

エネルギー減衰（地震、摩擦）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(t_{\mathrm{sing}} - t)} E = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E \sim \text{はためき振動数}$$





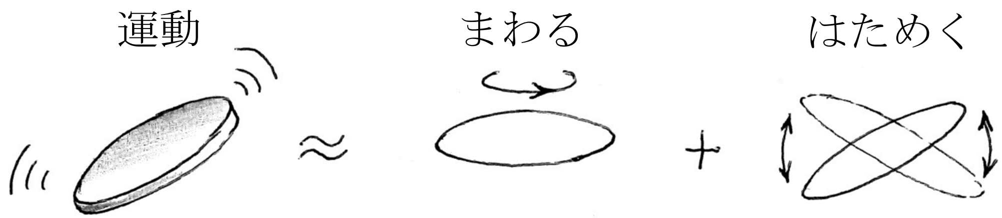
はねかえり = はためき類推：

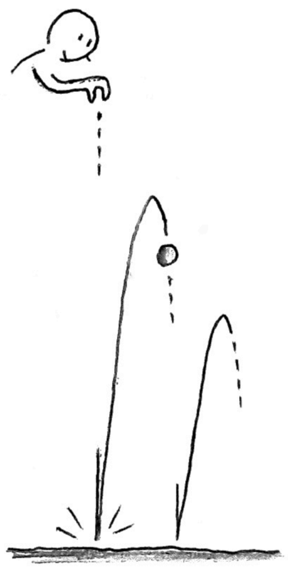
エネルギー $E \sim$ 高さ $\sim$ 時間$^2 \sim$ はねかえり振動数$^{-2}$

エネルギー減衰（地震、摩擦）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(t_{\mathrm{sing}} - t)} E = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E \sim \text{はためき振動数}$$

$$\Longrightarrow \quad E^{\frac{3}{2}} \sim t_{\mathrm{sing}} - t$$





はねかえり = はためき類推：

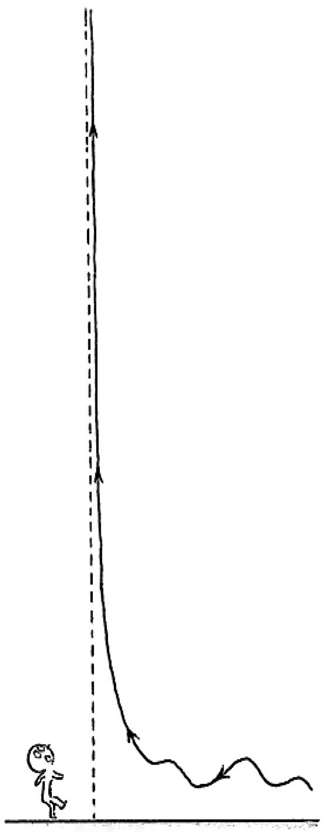
エネルギー $E \sim$ 高さ $\sim$ 時間$^{2} \sim$ はねかえり振動数$^{-2}$

エネルギー減衰（地震、摩擦）：

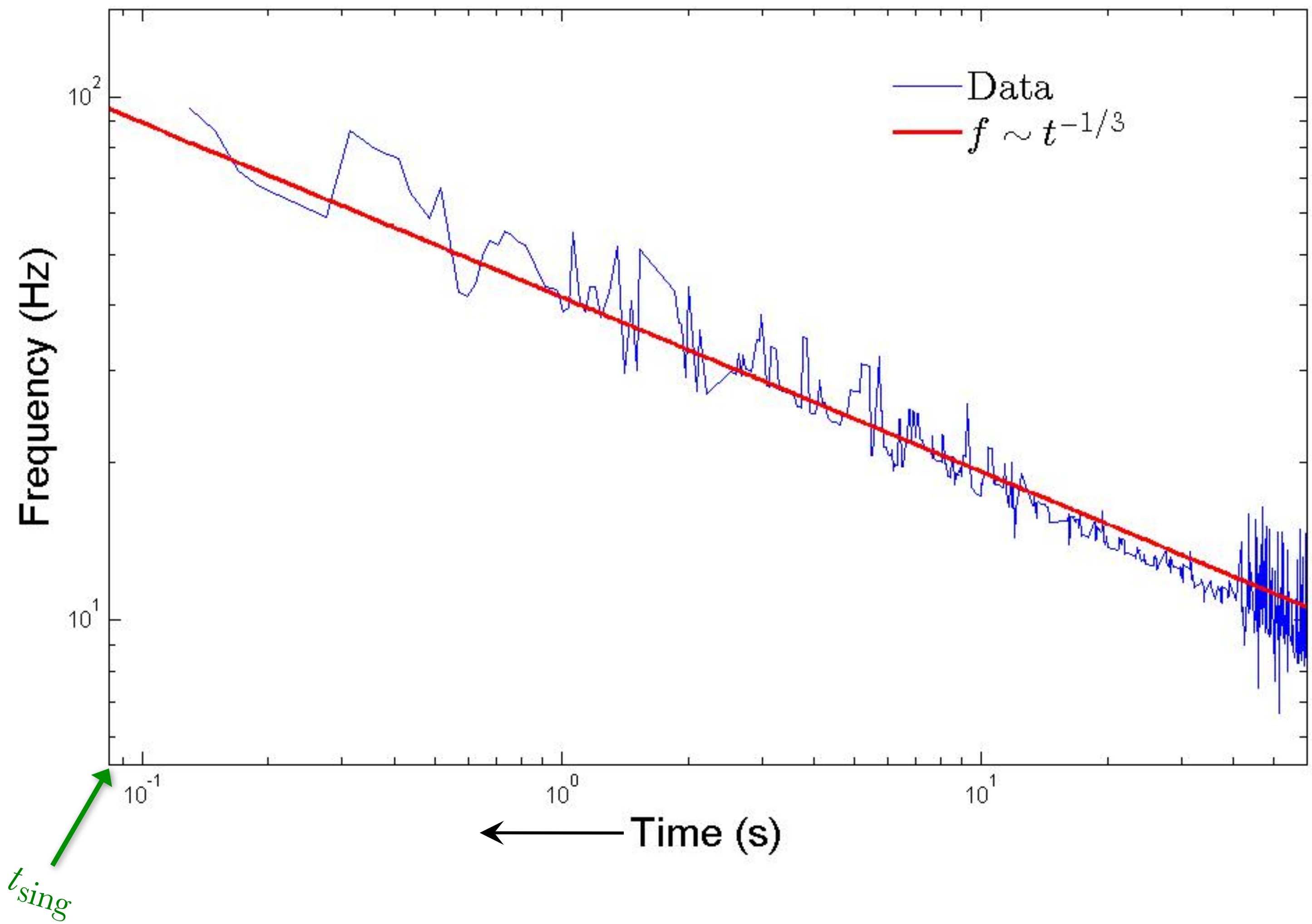
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(t_{\mathrm{sing}}-t)}E = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E \sim \text{はためき振動数}$$

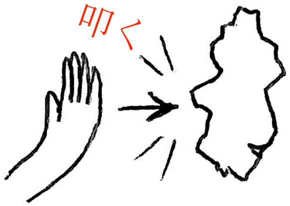
$$\Longrightarrow \quad E^{\frac{3}{2}} \sim t_{\mathrm{sing}} - t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{音の振動数} \sim (t_{\mathrm{sing}} - t)^{-\frac{1}{3}}}$$

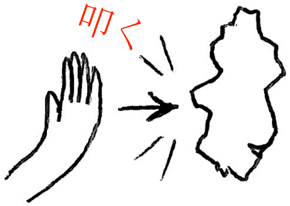
音の振動数 $\sim (t_{\text{sing}} - t)^{-\frac{1}{3}}$

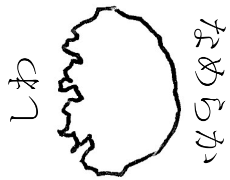


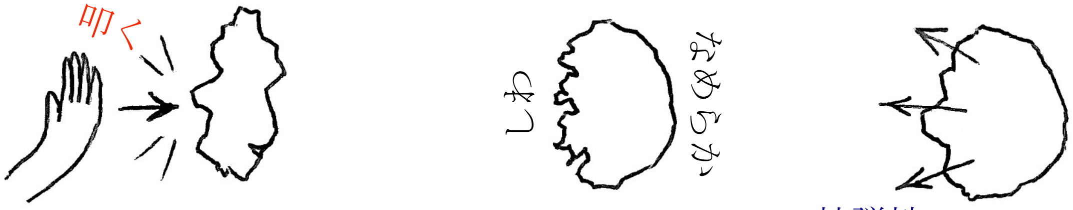
log-log plot



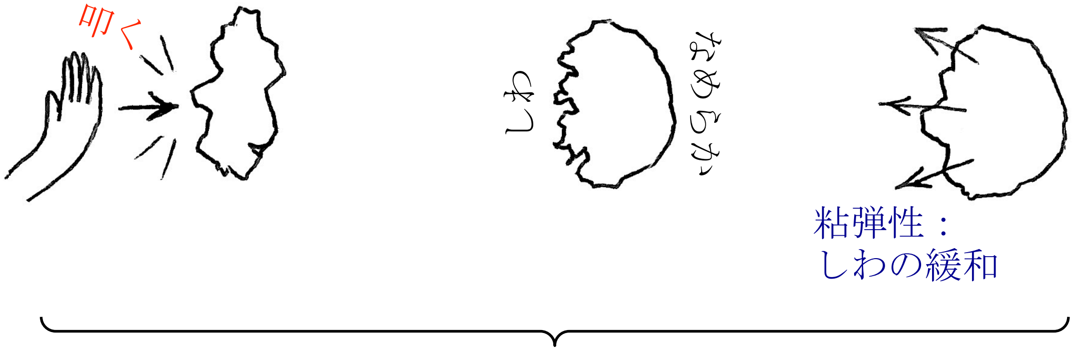

叩く


叩く

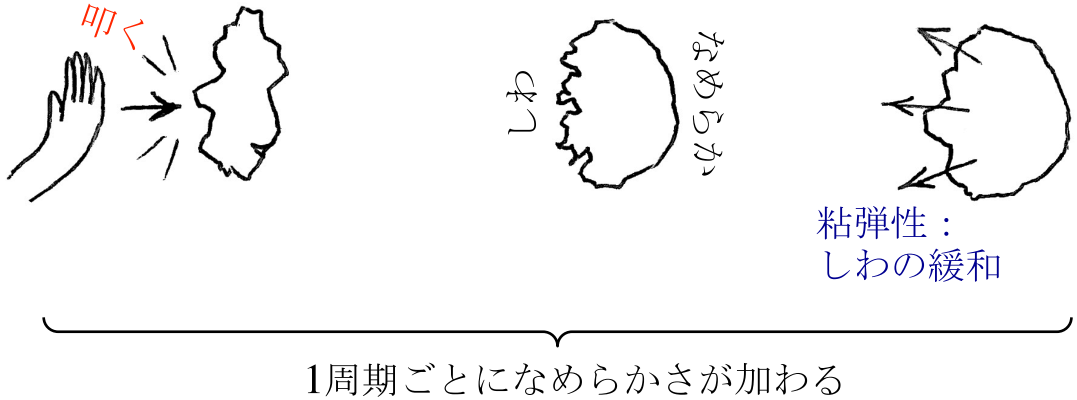

しわ
なめらか

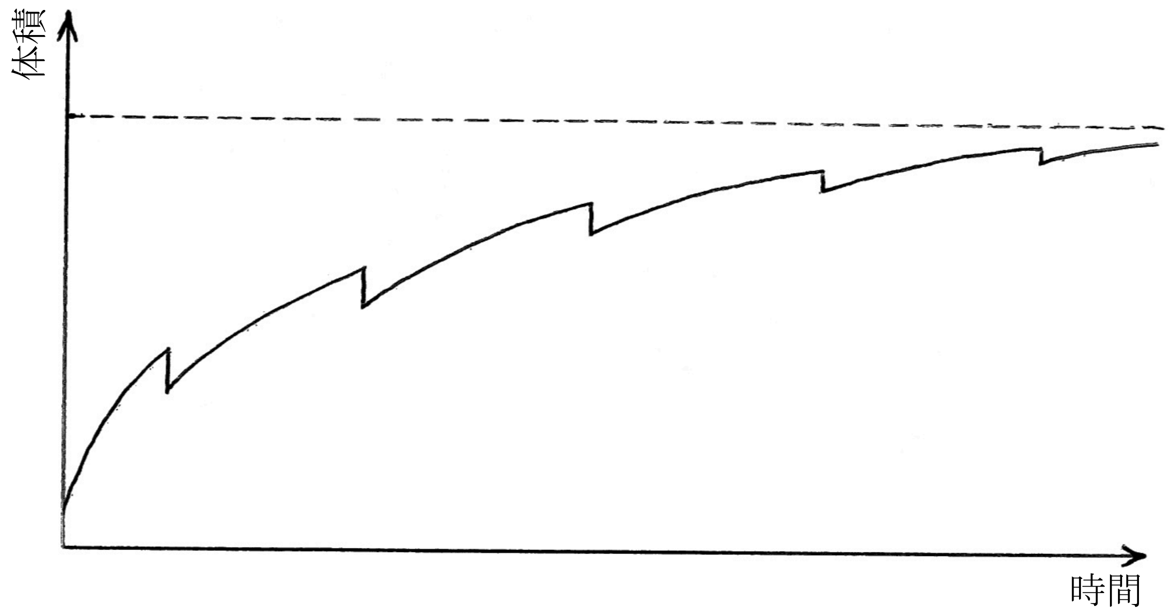


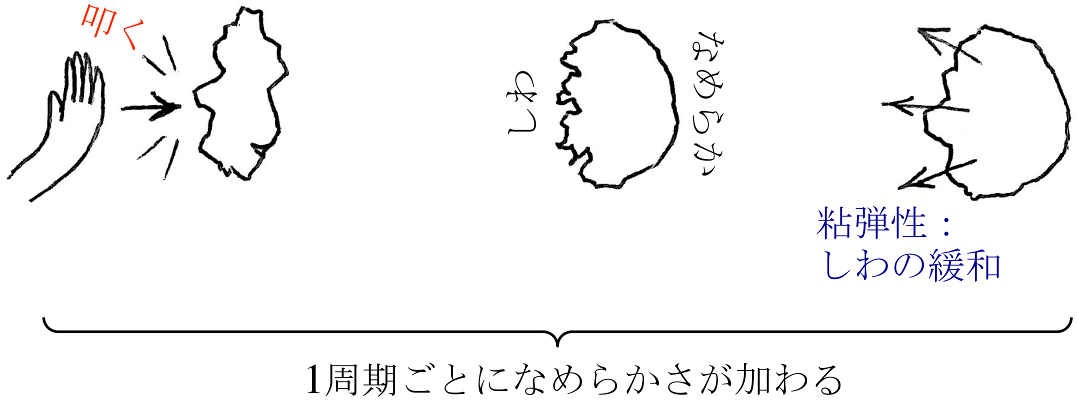
粘弾性：
しわの緩和

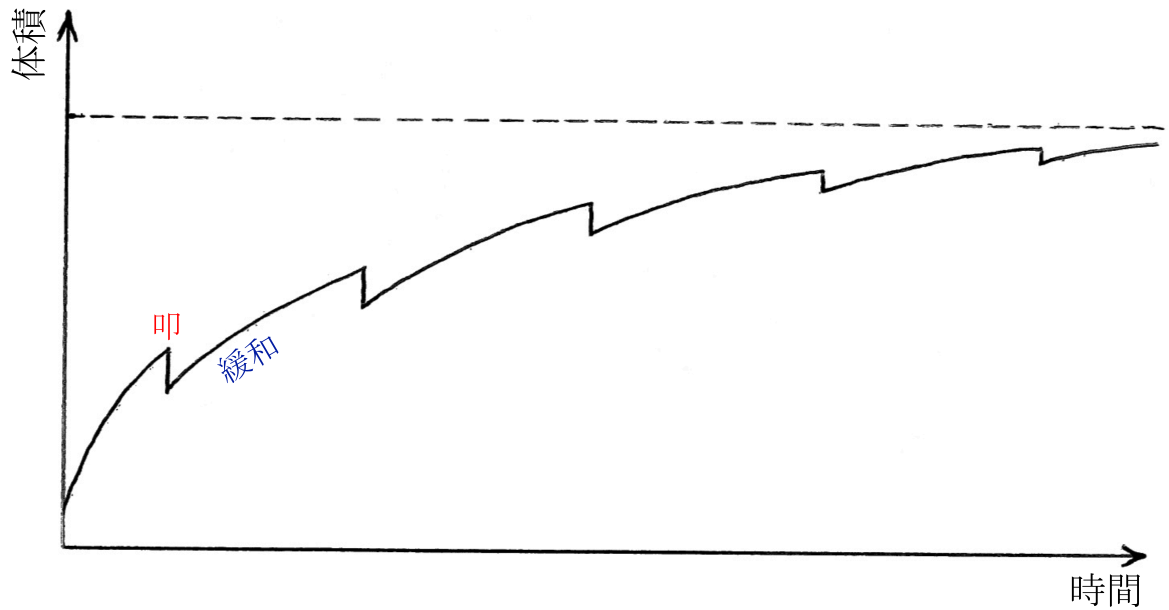


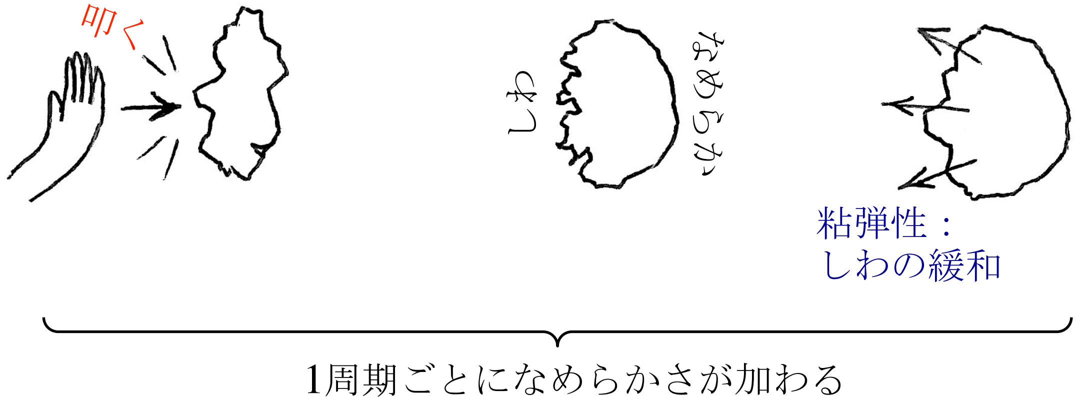
1周期ごとになめらかさが加わる

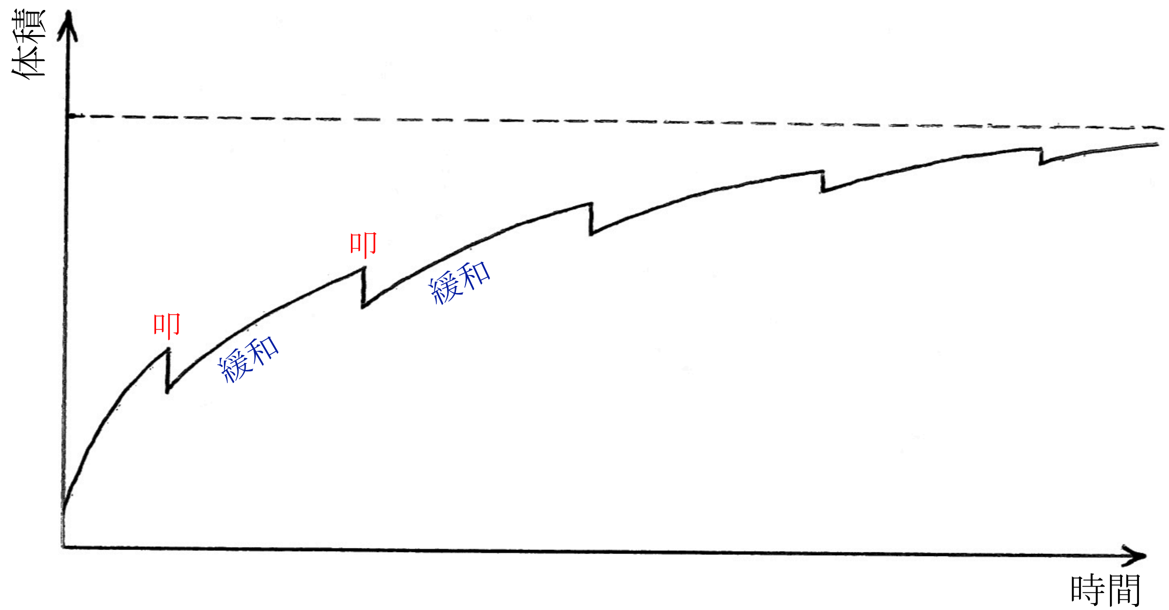

叩く
しわ
なめらか
粘弾性：
しわの緩和
1周期ごとになめらかさが加わる

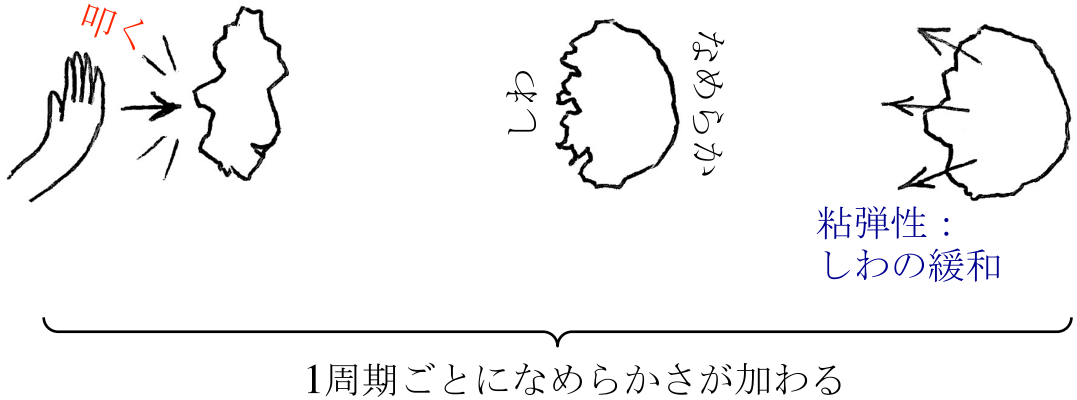

体積
時間

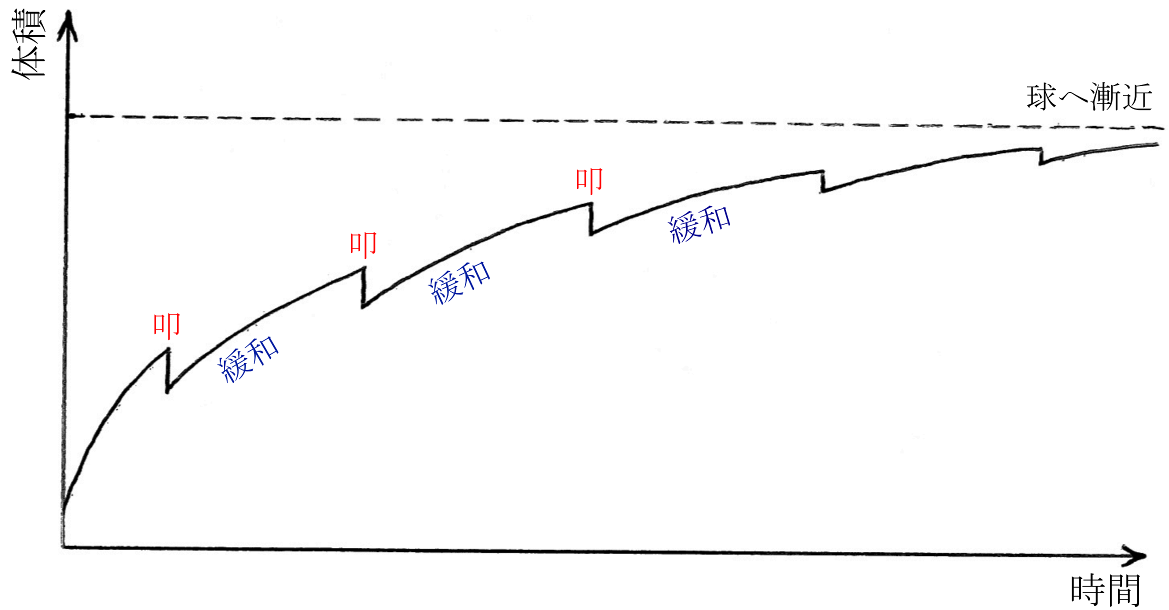

叩く
しわ
なめらか
粘弾性：
しわの緩和
1周期ごとになめらかさが加わる

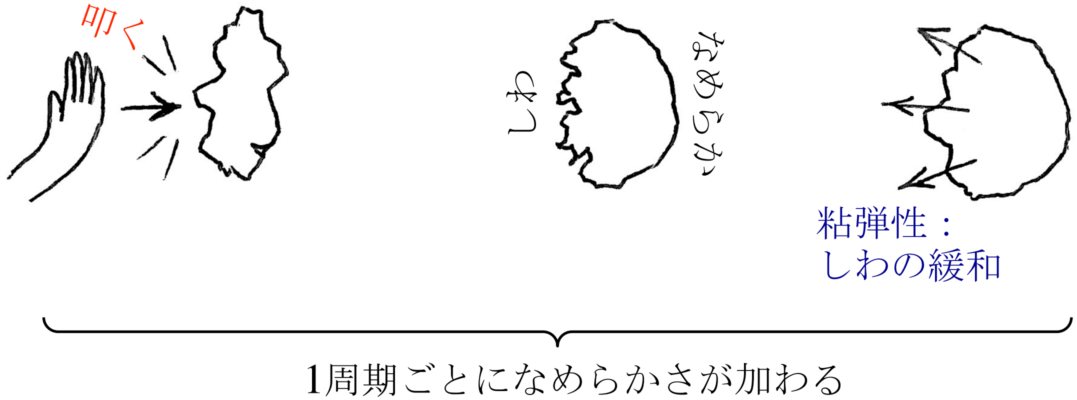

体積
叩
緩和
時間

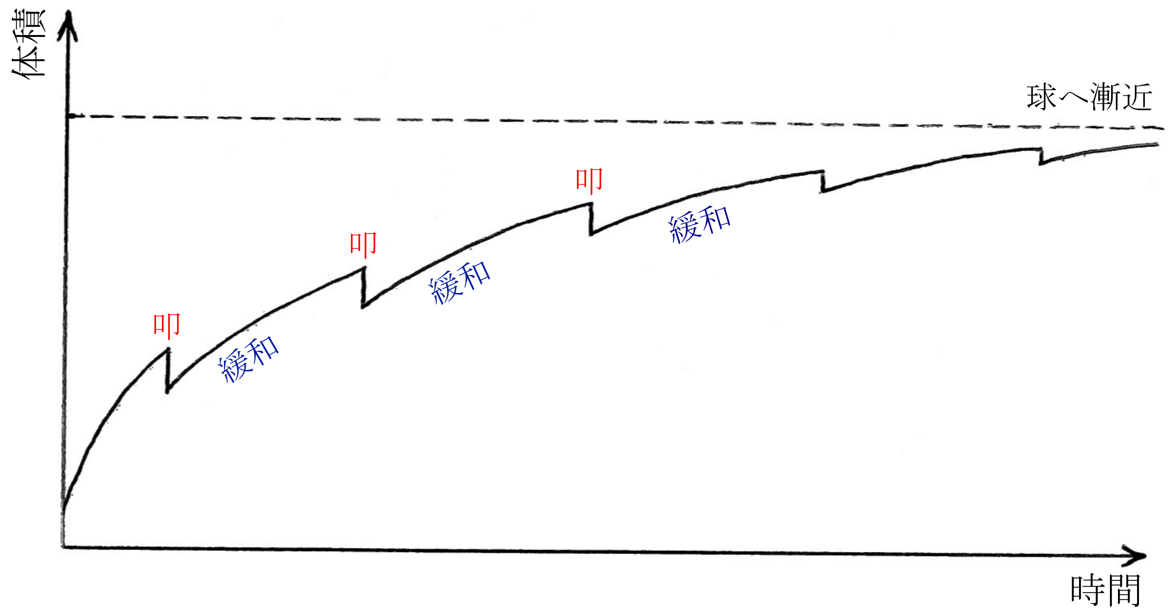

叩く
しわ
なめらか
粘弾性：
しわの緩和
1周期ごとになめらかさが加わる


体積
叩
緩和
叩
緩和
時間


叩く
しわ
なめらか
粘弾性：
しわの緩和
1周期ごとになめらかさが加わる


体積
球へ漸近
叩
緩和
叩
緩和
叩
緩和
時間





よくある現象
—例えば乱流

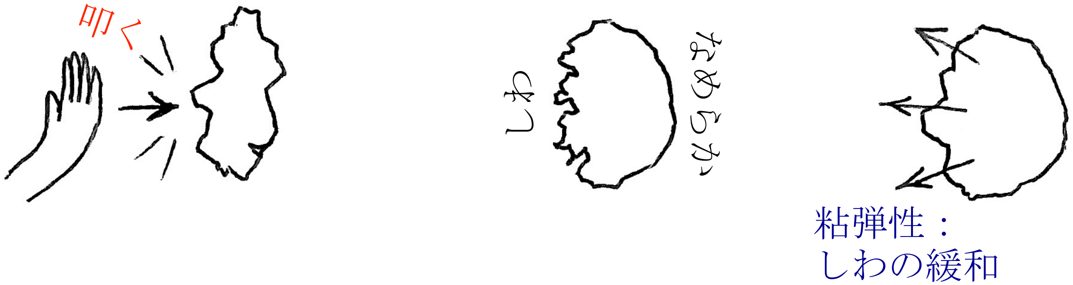
大スケール渦の

エネルギー

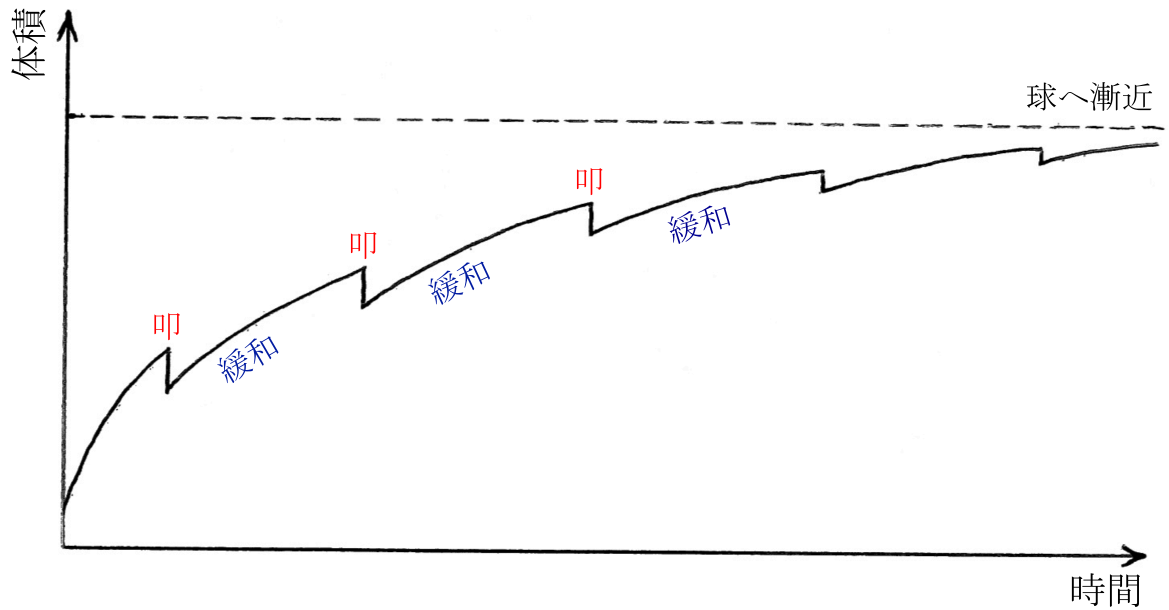
小スケール渦の

cascade
（滝）

このおもちゃ



1周期ごとになめらかさが加わる



大スケールのしわ

エネルギー

小スケールのしわ

inverse cascade
（滝の逆登り？）

coda

私たちは数理の多様な主題にふれてきました：

chirality（対掌性）
次元解析
摩擦
相転移
特異摂動
有限時間発散
粘弾性
inverse cascade
・
・
・

私たちは数理の多様な主題にふれてきました：

chirality（対掌性）
次元解析
摩擦
相転移
特異摂動
有限時間発散
粘弾性
inverse cascade
・
・
・

なぜ「おもちゃ」か？

[アリストテレス *De partibus animalium* I 5.645a = DK 22A9意訳]

[アリストテレス *De partibus animalium* I 5.645a = DK 22A9意訳]

どんな自然現象であれ何か不思議なことを秘しているものだ。

[アリストテレス *De partibus animalium* I 5.645a = DK 22A9意訳]

どんな自然現象であれ何か不思議なことを秘しているものだ。

あるとき学生たちが碩学ヘラクリトスに面会に来た。

最先端研究所、複雑な実験装置、難解な専門誌、厳粛な講義、など想像して来たのに、
実際のヘラクリトスは
ちゃんちゃんこを着て暖炉にあたり、小さな子と遊んでいたので
学生たちは戸口でためらった。

[アリストテレス *De partibus animalium* I 5.645a = DK 22A9意訳]

どんな自然現象であれ何か不思議なことを秘しているものだ。

あるとき学生たちが碩学ヘラクリトスに面会に来た。

最先端研究所、複雑な実験装置、難解な専門誌、厳粛な講義、など想像して来たのに、
実際のヘラクリトスは
ちゃんちゃんこを着て暖炉にあたり、小さな子と遊んでいたので
学生たちは戸口でためらった。

しかしヘラクリトスは言った：「お入り、お入り、怪しむことはない——

[アリストテレス *De partibus animalium* I 5.645a = DK 22A9意訳]

どんな自然現象であれ何か不思議なことを秘しているものだ。

あるとき学生たちが碩学ヘラクリトスに面会に来た。

最先端研究所、複雑な実験装置、難解な専門誌、厳粛な講義、など想像して来たのに、
実際のヘラクリトスは
ちゃんちゃんこを着て暖炉にあたり、小さな子と遊んでいたので
学生たちは戸口でためらった。

しかしヘラクリトスは言った：「お入り、お入り、怪しむことはない——
こんなところにも神々は宿るのさ」と。

εἶναι γὰρ καὶ ἐνταῦθα θεούς

聴衆の方々

＋

聴衆の方々

＋

日本数学会
舟木直久・松本幸夫・川崎徹郎・山田澄生 各位

に感謝いたします

聴衆の方々

＋

日本数学会
舟木直久・松本幸夫・川崎徹郎・山田澄生　各位

に感謝いたします

みなさん科学の芽を
楽しんでくださいね

正