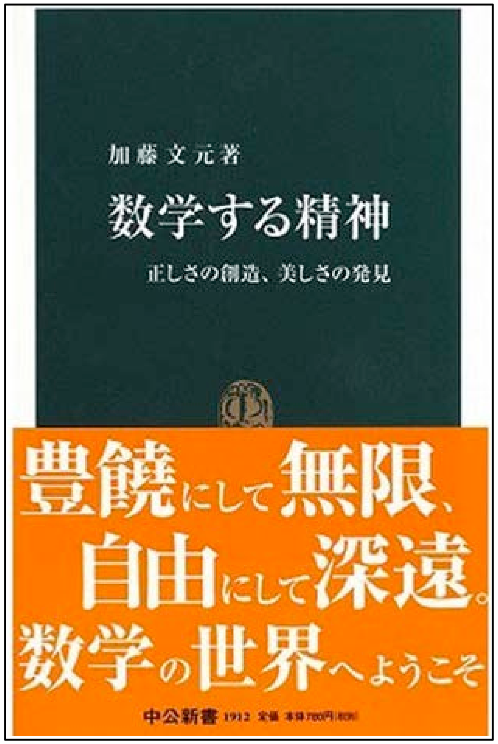
パスカルの半平面

熊本大学大学院自然科学研究科　加藤文元

自己紹介

- 1968年7月　宮城県仙台市生まれ
- 1997年1月　博士（理学）（京都大学）
- 専門：数学（代数学）
  - 代数幾何学・数論幾何学・非アルキメデス的幾何学
- 著書・訳書
  - 『ファン・デル・ヴェルデン　古代文明の数学』（共訳）日本評論社（2006年）
  - 『数学する精神』　中公新書（2007年）
  - 『物語　数学の歴史』　中公新書（2009年）
  - 『ガロア　天才数学者の生涯』　中公新書（2010年）
  - 『リジッド幾何学入門』　岩波数学叢書（2013年）
  - 『数学の想像力』　筑摩選書（2013年）

『数学する精神』中公新書（2007年）



- 金森修『昭和前期の科学思想史』40～41頁

…『数学する精神』は、興味深い逸話を介在させつつ、連続や無限のような数学的思考の根幹に関わることをイメージ豊に書く本当に良質の啓蒙書だ。数学的世界への人間の能動的関わりと「数式が人間に語りかけてくる言葉」の傾聴という両方向のダイナミズムを、素人にもわかりやすく理解させようとしている。

日々気になること…

■数学は極めて成熟した学問に見える。しかし…

- 数学はなぜ進歩できるのだろうか？
  - 新しい理論・定理・証明が〈発見〉できる
    - 数の理論（代数学）・図形の理論（幾何学）・関数の理論（解析学）などの複合体
- 数学の一見複雑な議論を人間はどのようにして〈理解〉しているのだろうか？
  - ほとんど数学者は〈論理〉で理解しているとは思えない
- 数学における〈正しさ〉とは何だろうか？
  - 数学には仮説性・暫定性はないのか？
  - そもそも〈証明〉とは何だろうか？
  - 数学はいずれ自己矛盾する心配は本当にないのか？

筑摩選書『数学の想像力』

『数学の想像力—正しさの深層に何があるのか』

- 内容・テーマ：
  - 数学の〈正しさ〉とは何か？数学が〈正しい〉根拠は本当にあるのか？
  - 「証明」とは何か？特に「背理法」とは何か？その起源と歴史的・文化的背景は？
  - 西洋数学が現代数学を席巻した理由は何か？

パスカルの三角形

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

3 8 8 3

パスカルの三角形

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
3 8 8 3

パスカルの三角形

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

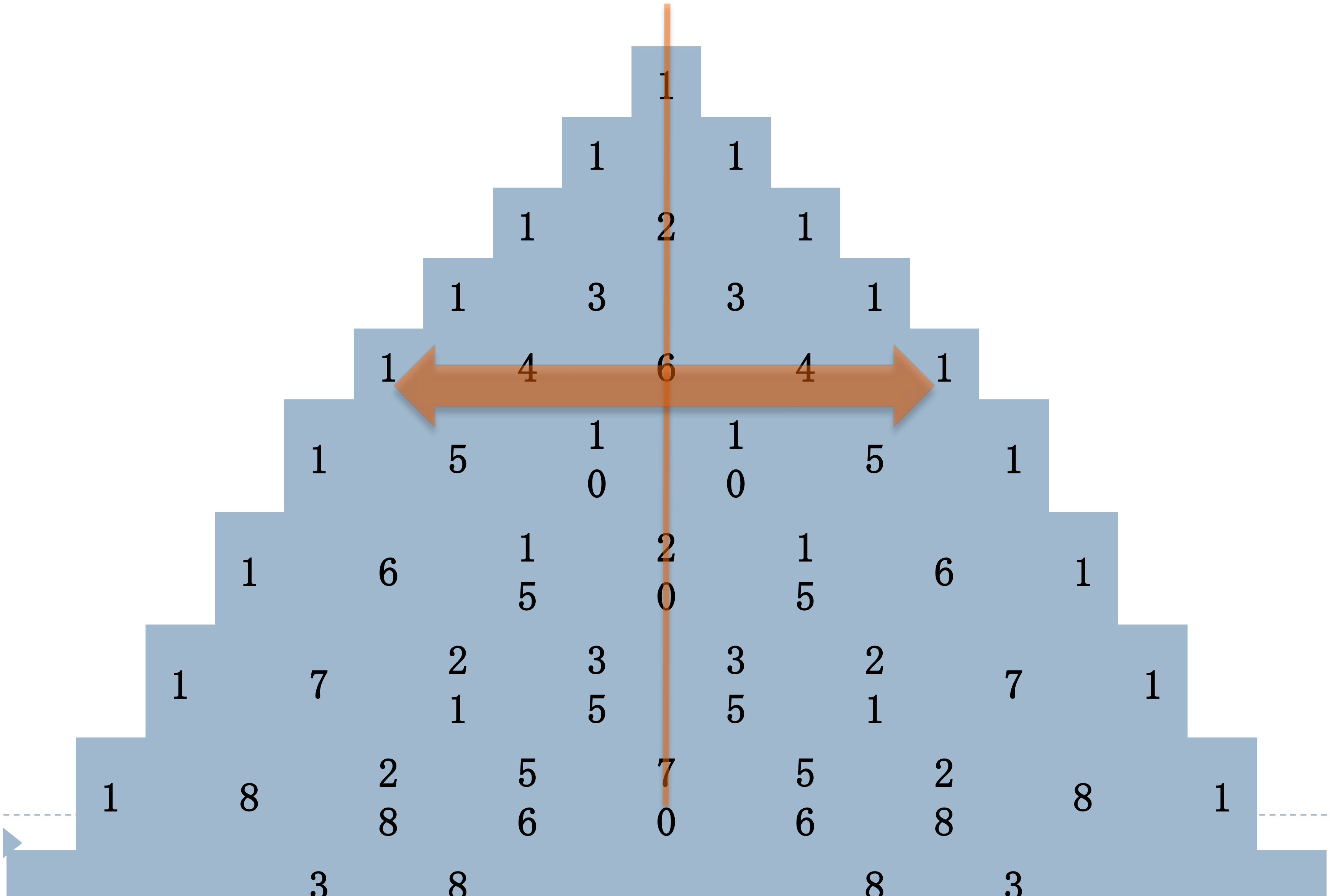
1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

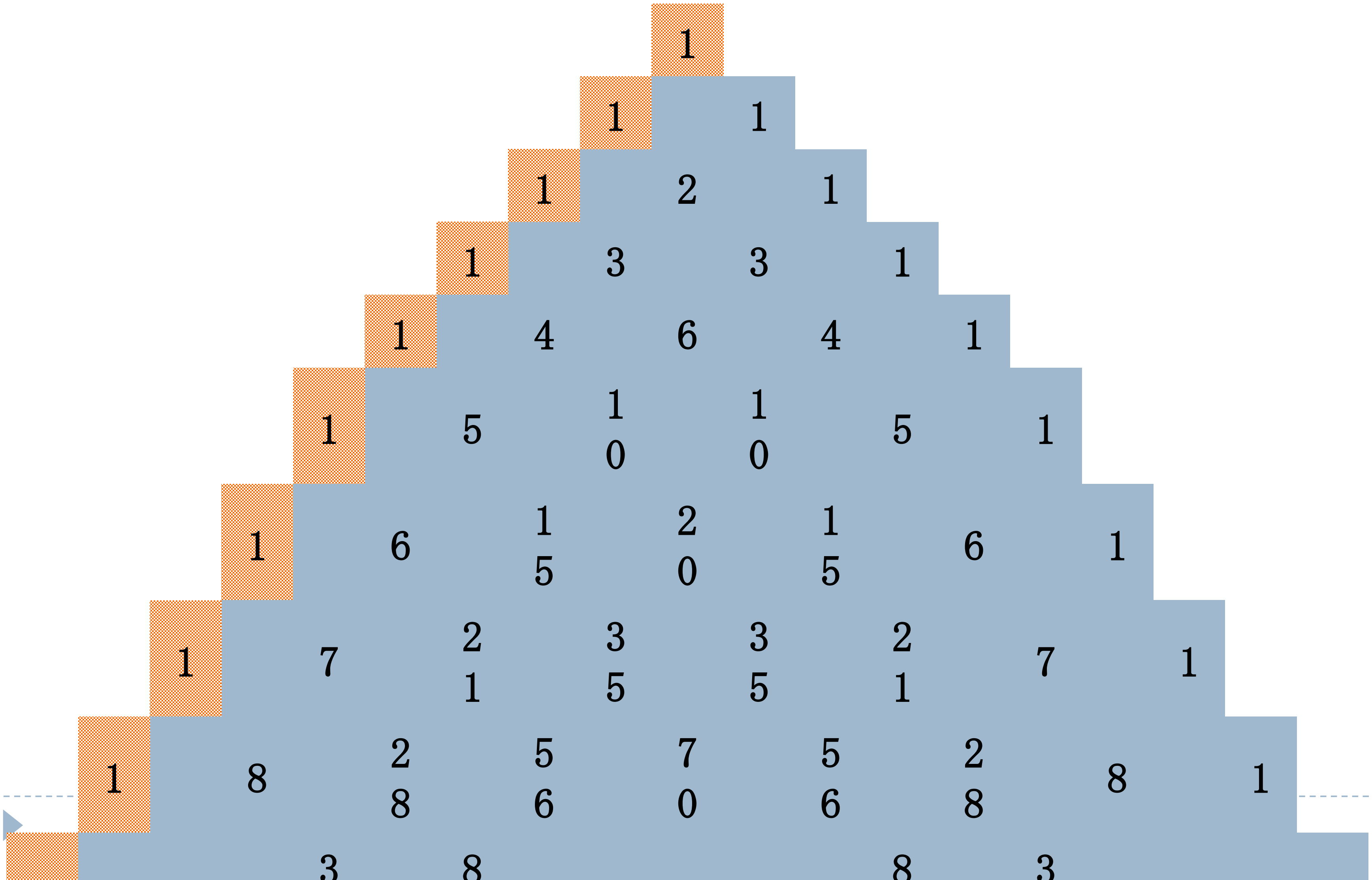
1 8 28 56 70 56 28 8 1

3 8 8 3

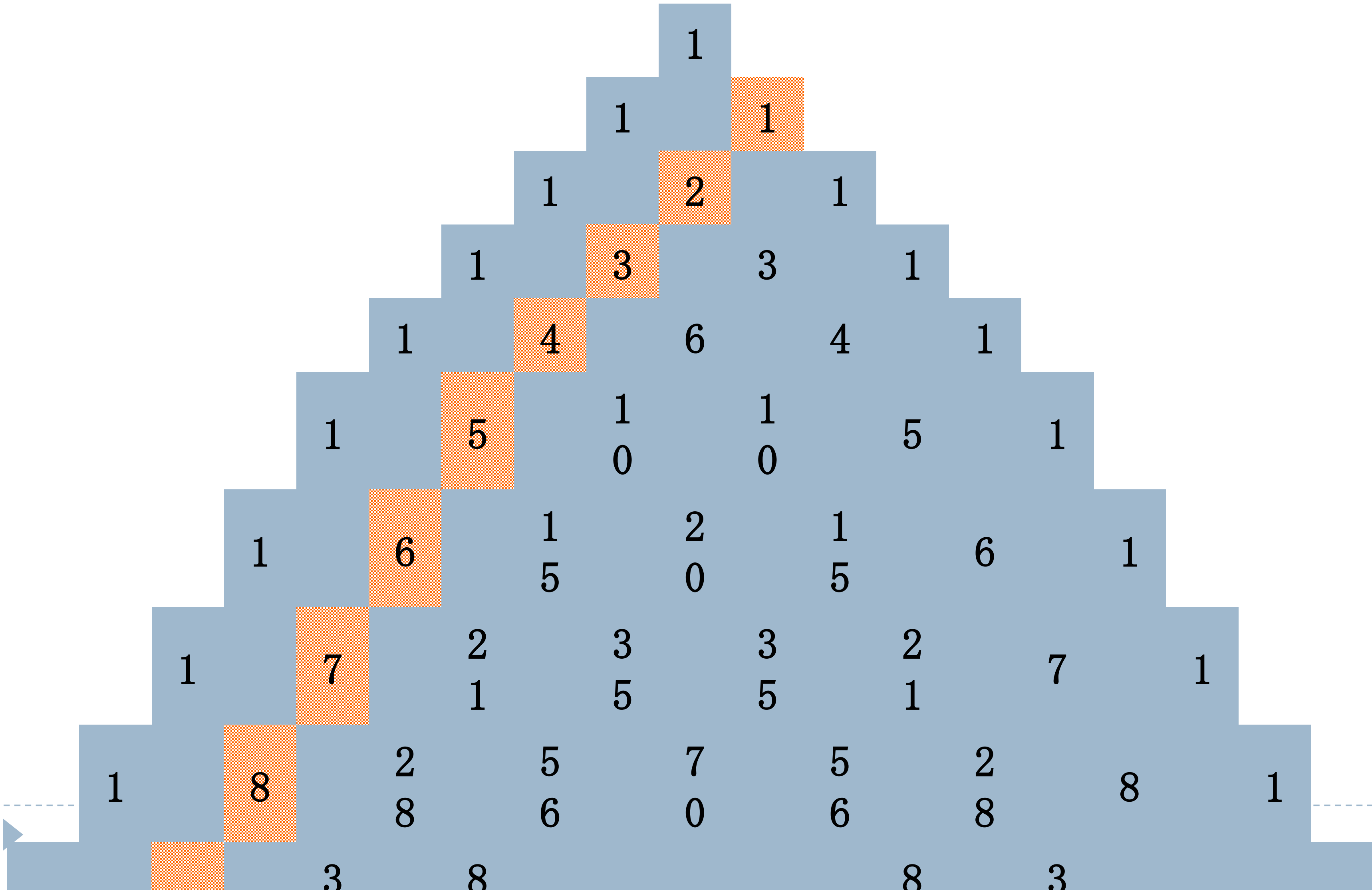
パスカルの三角形


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

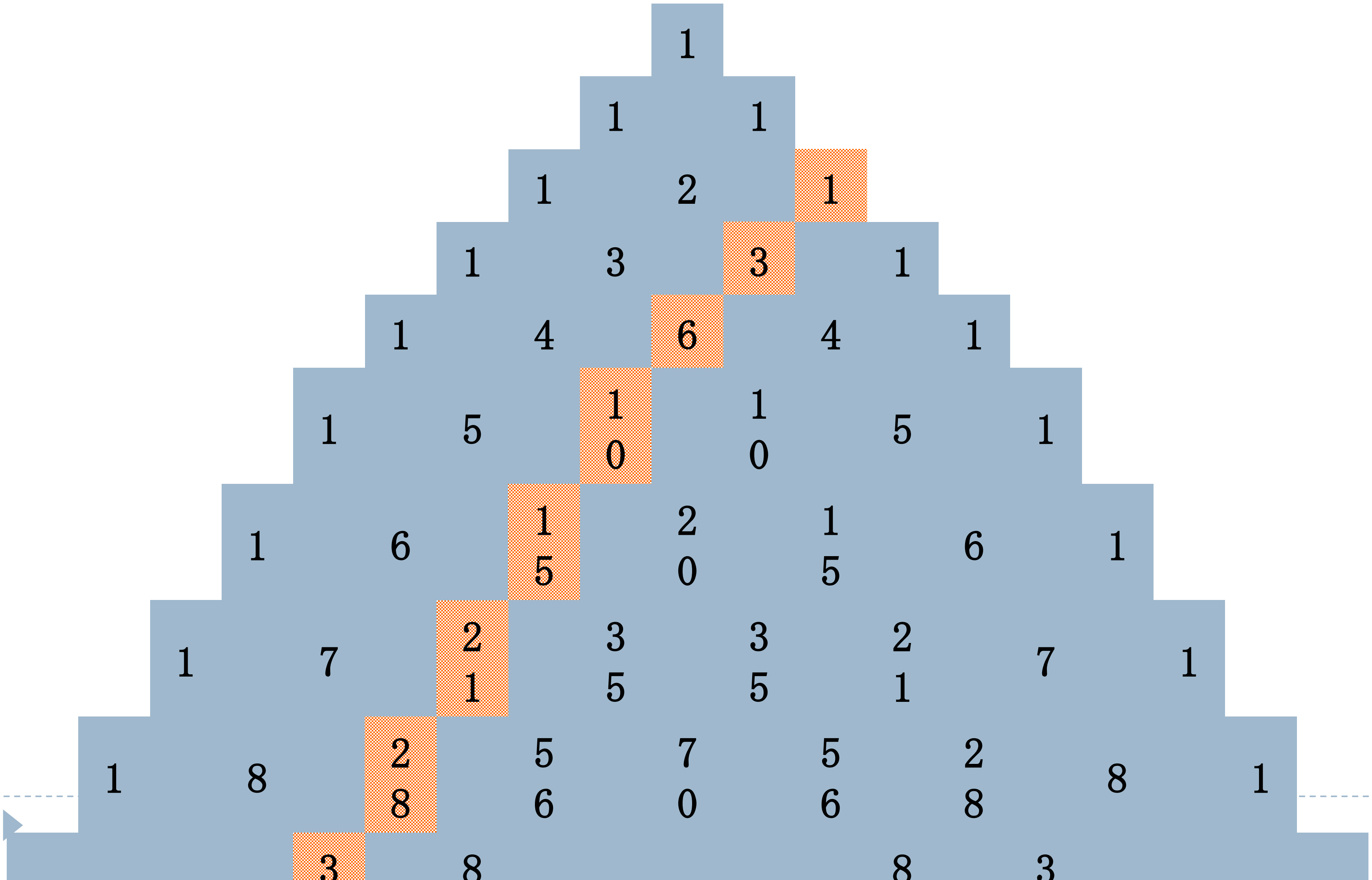
パスカルの三角形


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

パスカルの三角形


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

パスカルの三角形

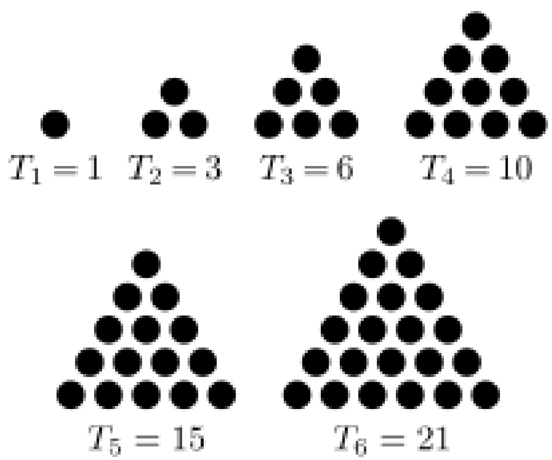

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

三角数

- 自然数nに対して、1からnまでの自然数の総和：

$$T_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- 点を正三角形の形にならべたときの点の個数：



パスカルの三角形

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

二項係数

- r 行目 k 列目の数を

$$ {}_{r}\mathrm{C}_{k} = \binom{r}{k} $$

で書く（二項係数）。

- 明示公式

$$ \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} $$

パスカルの三角形

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

パスカルの三角形

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

二項係数の和

- 【r 行目k 列目】に【r 行目k+1 列目】を加えると、【r+1 行目k+1 列目】になる：

$$\binom{r}{k} + \binom{r}{k+1} = \binom{r+1}{k+1}$$

- 組み合わせの数としての解釈：r+1人からk+1人選ぶ
  - 「自分」が入っている場合：r人からk人選ぶ
  - 「自分」が入っていない場合：r人からk+1人選ぶ

ずらし算

6	1	6	15	20	15	6	1

ずらし算

6	1	6	15	20	15	6	1	
		1	6	15	20	15	6	1

ずらし算

6	1	6	15	20	15	6	1	
		1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7	1

多項式による解釈

- 各行を昇べきの順に書いた多項式の係数と思う：

6	1	6	15	20	15	6	1

多項式による解釈

- 各行を昇べきの順に書いた多項式の係数と思う：

$$6 \quad \Big| \quad 1 \quad +6x \quad +15x^2 \quad +20x^3 \quad +15x^4 \quad +6x^5 \quad +1x^6$$

多項式による解釈

- 各行を昇べきの順に書いた多項式の係数と思う。
- ずらす＝x をかける。

6	1	$+6x$	$+15x^2$	$+20x^3$	$+15x^4$	$+6x^5$	$+x^6$	
		x	$+6x^2$	$+15x^3$	$+20x^4$	$+15x^5$	$+6x^6$	$+x^7$

多項式による解釈

- 各行を昇べきの順に書いた多項式の係数と思う。
- ずらす＝x をかける。
- 項ごとにたし合わせる。

6	1	$+6x$	$+15x^2$	$+20x^3$	$+15x^4$	$+6x^5$	$+x^6$	
		x	$+6x^2$	$+15x^3$	$+20x^4$	$+15x^5$	$+6x^6$	$+x^7$
7	1	$+7x$	$+21x^2$	$+35x^3$	$+35x^4$	$+21x^5$	$+7x^6$	$+x^7$

多項式による解釈

- 各行を昇べきの順に書いた多項式の係数と思う。
- ずらす＝x をかける。
- 項ごとにたし合わせる。

6	1	$+6x$	$+15x^2$	$+20x^3$	$+15x^4$	$+6x^5$	$+x^6$	
		x	$+6x^2$	$+15x^3$	$+20x^4$	$+15x^5$	$+6x^6$	$+x^7$
7	1	$+7x$	$+21x^2$	$+35x^3$	$+35x^4$	$+21x^5$	$+7x^6$	$+x^7$

- つまり、

$$6\text{行目の多項式} = (1 + x) \times 7\text{行目の多項式}$$

二項係数の和

- 【r 行目k 列目】に【r 行目k+1 列目】を加えると、【r+1 行目k+1 列目】になる：

$$\binom{r}{k} + \binom{r}{k+1} = \binom{r+1}{k+1}$$

- 【r 行目多項式】を、x^kの係数を【r 行目k 列目】とする多項式とするとき、

$$【\boldsymbol{r+1}\,行目多項式】= (\boldsymbol{1+x})\,【\boldsymbol{r}\,行目多項式】$$

ということを表している。

二項定理

- 【0行目多項式】=1なので、

二項定理

- 【0行目多項式】=1なので、
  - 【1行目多項式】= 1+x

二項定理

- 【0行目多項式】=1なので、

  - 【1行目多項式】= $1+x$
  - 【2行目多項式】= $(1+x)^2$

二項定理

- 【0行目多項式】=1なので、
  - 【1行目多項式】= $1+x$
  - 【2行目多項式】= $(1+x)^2$
  - 【3行目多項式】= $(1+x)^3$

二項定理

- 【0行目多項式】=1なので、
  - 【1行目多項式】= $1+x$
  - 【2行目多項式】= $(1+x)^2$
  - 【3行目多項式】= $(1+x)^3$
  - 【4行目多項式】= $(1+x)^4$
  - ・・・

二項定理

- 【0行目多項式】=1なので、
  - 【1行目多項式】= 1+x
  - 【2行目多項式】= $(1+x)^2$
  - 【3行目多項式】= $(1+x)^3$
  - 【4行目多項式】= $(1+x)^4$
  - ・・・
- 二項定理 自然数 r について

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k$$

パスカルの三角形

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

パスカルの三角形

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

パスカルの三角形

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

パスカルの三角形

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

パスカルの三角形

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

形式的べき級数

- 【r 行目】を形式べき級数として解釈：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k$$

- $k > r$ なら

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} = 0$$

なので、実際には**多項式**になっている。

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0						
r=1						
r=2						
r=3						
r=4						
r=5						

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1					
r=1	1					
r=2	1					
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1					
r=2	1					
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1				
r=2	1					
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0			
r=2	1					
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0		
r=2	1					
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	
r=2	1					
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1					
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1	2				
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1	2	1			
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1	2	1	0		
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1	2	1	0	0	
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1	2	1	0	0	0
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1	2	1	0	0	0
r=3	1	3				
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1	2	1	0	0	0
r=3	1	3	3			
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1	2	1	0	0	0
r=3	1	3	3	1		
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1	2	1	0	0	0
r=3	1	3	3	1	0	
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1	2	1	0	0	0
r=3	1	3	3	1	0	0
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	0	0	0	0	0
r=1	1	1	0	0	0	0
r=2	1	2	1	0	0	0
r=3	1	3	3	1	0	0
r=4	1	4	6	4	1	0
r=5	1	5	10	10	5	1

パスカルの三角形の復元

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$r=0$	1	0	0	0	0	0
$r=1$	1	1	0	0	0	0
$r=2$	1	2	1	0	0	0
$r=3$	1	3	3	1	0	0
$r=4$	1	4	6	4	1	0
$r=5$	1	5	10	10	5	1

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0						
r=1						
r=2						
r=3						
r=4						
r=5						

パスカルの三角形の復元

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$r=0$	1					
$r=1$	1					
$r=2$	1					
$r=3$	1					
$r=4$	1					
$r=5$	1					

パスカルの三角形の復元

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$r=0$	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$r=1$	1					
$r=2$	1					
$r=3$	1					
$r=4$	1					
$r=5$	1					

パスカルの三角形の復元

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$r=0$	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$r=1$	1	$1+a_1$				
$r=2$	1					
$r=3$	1					
$r=4$	1					
$r=5$	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
r=1	1	$1+a_1$	a_1+a_2			
r=2	1					
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
r=1	1	$1+a_1$	a_1+a_2	a_2+a_3		
r=2	1					
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$r=0$	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$r=1$	1	$1+a_1$	a_1+a_2	a_2+a_3	a_3+a_4	
$r=2$	1					
$r=3$	1					
$r=4$	1					
$r=5$	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
r=1	1	$1+a_1$	a_1+a_2	a_2+a_3	a_3+a_4	a_4+a_5
r=2	1					
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$r=0$	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$r=1$	1	$1+a_1$	a_1+a_2	a_2+a_3	a_3+a_4	a_4+a_5
$r=2$	1	$2+a_1$				
$r=3$	1					
$r=4$	1					
$r=5$	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
r=1	1	$1+a_1$	a_1+a_2	a_2+a_3	a_3+a_4	a_4+a_5
r=2	1	$2+a_1$	$1+2a_1+a_2$			
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$r=0$	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$r=1$	1	$1+a_1$	a_1+a_2	a_2+a_3	a_3+a_4	a_4+a_5
$r=2$	1	$2+a_1$	$1+2a_1+a_2$	$a_1+2a_2+a_3$		
$r=3$	1					
$r=4$	1					
$r=5$	1					

パスカルの三角形の復元

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
r=0	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
r=1	1	$1+a_1$	a_1+a_2	a_2+a_3	a_3+a_4	a_4+a_5
r=2	1	$2+a_1$	$1+2a_1$ $+a_2$	a_1+2a_2 $+a_3$	a_2+2a_3 $+a_4$	
r=3	1					
r=4	1					
r=5	1					

パスカルの三角形の復元

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$r=0$	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$r=1$	1	$1+a_1$	a_1+a_2	a_2+a_3	a_3+a_4	a_4+a_5
$r=2$	1	$2+a_1$	$1+2a_1$ $+a_2$	a_1+2a_2 $+a_3$	a_2+2a_3 $+a_4$	a_3+2a_4 $+a_5$
$r=3$	1					
$r=4$	1					
$r=5$	1					

パスカルの三角形の復元

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$r=0$	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$r=1$	1	$1+a_1$	a_1+a_2	a_2+a_3	a_3+a_4	a_4+a_5
$r=2$	1	$2+a_1$	$1+2a_1$ $+a_2$	a_1+2a_2 $+a_3$	a_2+2a_3 $+a_4$	a_3+2a_4 $+a_5$
$r=3$	1	$3+a_1$	$3+3a_1$ $+a_2$	$1+3a_1+$ $3a_2+a_3$	a_1+3a_2+ $3a_3+a_4$	a_2+3a_3+ $3a_4+a_5$
$r=4$	1	$4+a_1$	$6+4a_1$ $+a_2$	$4+6a_1+$ $4a_2+a_3$	$1+4a_1+6a_2$ $+4a_3+a_4$	$a_1+4a_2+6a_3$ $+4a_4+a_5$
$r=5$	1	$5+a_1$	$10+5a_1$ $+a_2$	$10+10a_1$ $+5a_2+a_3$	$5+10a_1+10a_2$ $+5a_3+a_4$	$1+5a_1+10a_2+$ $10a_3+5a_4+a_5$

形式べき級数による解釈

- この場合も、やはり

【r+1 行目べき級数】＝ $(1+x)$【r 行目べき級数】

になっている。

形式べき級数による解釈

- この場合も、やはり

【r+1 行目べき級数】= (1+x)【r 行目べき級数】

になっている。

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
F(x) & = & 1 & + & a_1 x & + & a_2 x^2 & + & a_3 x^3 & + & \cdots \\
xF(x) & = & & & x & + & a_1 x^2 & + & a_2 x^3 & + & \cdots \\
\hline
(1+x)F(x) & = & 1 & + & (1+a_1)x & + & (a_1+a_2)x^2 & + & (a_2+a_3)x^3 & + & \cdots
\end{array}
$$

パスカルの半平面

0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

-1						
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−1	1					
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

-1	1					
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−1	1	−1				
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−1	1	−1				
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−1	1	−1	1			
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−1	1	−1	1			
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−1	1	−1	1	−1		
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−1	1	−1	1	−1		
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−1	1	−1	1	−1	1	
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

-1	1	-1	1	-1	1	
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

-1	1	-1	1	-1	1	-1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−2						
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−2	1					
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

-2	1					
-1	1	-1	1	-1	1	-1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−2	1	−2				
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−2	1	−2				
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−2	1	−2	3			
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−2	1	−2	3			
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

-2	1	-2	3	-4		
-1	1	-1	1	-1	1	-1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−2	1	−2	3	−4		
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−2	1	−2	3	−4	5	
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−2	1	−2	3	−4	5	
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−2	1	−2	3	−4	5	−6
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

-3						
-2	1	-2	3	-4	5	-6
-1	1	-1	1	-1	1	-1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

-3	1					
-2	1	-2	3	-4	5	-6
-1	1	-1	1	-1	1	-1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−3	1					
−2	1	−2	3	−4	5	−6
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−3	1	−3				
−2	1	−2	3	−4	5	−6
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−3	1	−3				
−2	1	−2	3	−4	5	−6
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−3	1	−3	6			
−2	1	−2	3	−4	5	−6
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

-3	1	-3	6			
-2	1	-2	3	-4	5	-6
-1	1	-1	1	-1	1	-1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−3	1	−3	6	−10		
−2	1	−2	3	−4	5	−6
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−3	1	−3	6	−10		
−2	1	−2	3	−4	5	−6
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−3	1	−3	6	−10	15	
−2	1	−2	3	−4	5	−6
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−3	1	−3	6	−10	15	
−2	1	−2	3	−4	5	−6
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−3	1	−3	6	−10	15	−21
−2	1	−2	3	−4	5	−6
−1	1	−1	1	−1	1	−1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0

パスカルの半平面

−6	1	−6	21	−56	126	−252	462	−792	1287
−5	1	−5	15	−35	70	−126	210	−330	495
−4	1	−4	10	−20	35	−56	84	−120	165
−3	1	−3	6	−10	15	−21	28	−36	45
−2	1	−2	3	−4	5	−6	7	−8	9
−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0

パスカルの半平面

−6	1	−6	21	−56	126	−252	462	−792	1287
−5	1	−5	15	−35	70	−126	210	−330	495
−4	1	−4	10	−20	35	−56	84	−120	165
−3	1	−3	6	−10	15	−21	28	−36	45
−2	1	−2	3	−4	5	−6	7	−8	9
−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0

二項係数

- 二項係数の明示公式

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

の右辺のrには負の数でも代入できる。

- 例えば、

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k$$

$$\binom{-2}{k} = \frac{(-2)\cdot(-3)\cdots(-k-1)}{k!} = (-1)^k(k+1)$$

形式べき級数による解釈

- 「行が進む ⇔ (1+x) をかける」の原則より：

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{-1} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \cdots \\
(1+x)^{-2} &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - \cdots \\
(1+x)^{-3} &= 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - 21x^5 + 28x^6 - \cdots \\
(1+x)^{-4} &= 1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + 35x^4 - 56x^5 + 84x^6 - \cdots \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

- これらは左辺の有理函数のx=0 におけるTaylor展開を与えている。
- 参考：等比級数の和の公式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

ひとつの変種

1/2

ひとつの変種

1/2

1

1

1

1

1

1

1

ひとつの変種

	1					
	1					
	1					
1/2	1	1/2	−1/8	1/16	−5/128	7/256
	1					
	1					
	1					

ひとつの変種

	1					
	1					
	1					
1/2	1	1/2	−1/8	1/16	−5/128	7/256
3/2	1	3/2	3/8	−1/16	3/128	−3/256
5/2	1	5/2	15/8	5/16	−5/128	3/256
7/2	1	7/2	35/8	35/16	35/128	−7/256

ひとつの変種

−5/2	1	−5/2	35/8	−105/16	1155/128	−3003/256
−3/2	1	−3/2	15/8	−35/16	315/128	−693/256
−1/2	1	−1/2	3/8	−5/16	35/128	−63/256
1/2	1	1/2	−1/8	1/16	−5/128	7/256
3/2	1	3/2	3/8	−1/16	3/128	−3/256
5/2	1	5/2	15/8	5/16	−5/128	3/256
7/2	1	7/2	35/8	35/16	35/128	−7/256

二項係数

- 二項係数の明示公式：

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

- r=1/2 などを代入する：

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$$

- たとえば、

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}$$

半整数パスカルの半平面

−5/2	1	−5/2	35/8	−105/16	1155/128	−3003/256
−3/2	1	−3/2	15/8	−35/16	315/128	−693/256
−1/2	1	−1/2	3/8	−5/16	35/128	−63/256
1/2	1	1/2	−1/8	1/16	−5/128	7/256
3/2	1	3/2	3/8	−1/16	3/128	−3/256
5/2	1	5/2	15/8	5/16	−5/128	3/256
7/2	1	7/2	35/8	35/16	35/128	−7/256

半整数パスカルの半平面

−5/2	1	−5/2	35/8	−105/16	1155/128	−3003/256
−3/2	1	−3/2	15/8	−35/16	315/128	−693/256
−1/2	1	−1/2	3/8	−5/16	35/128	−63/256
1/2	1	1/2	−1/8	1/16	−5/128	7/256
3/2	1	3/2	3/8	−1/16	3/128	−3/256
5/2	1	5/2	15/8	5/16	−5/128	3/256
7/2	1	7/2	35/8	35/16	35/128	−7/256

半整数パスカルの半平面

−5/2	1	−5/2	35/8	−105/16	1155/128	−3003/256
−3/2	1	−3/2	15/8	−35/16	315/128	−693/256
−1/2	1	−1/2	3/8	−5/16	35/128	−63/256
1/2	1	1/2	−1/8	1/16	−5/128	7/256
3/2	1	3/2	3/8	−1/16	3/128	−3/256
5/2	1	5/2	15/8	5/16	−5/128	3/256
7/2	1	7/2	35/8	35/16	35/128	−7/256

二項定理

- 二項定理 任意の〈数〉（有理数、実数、複素数など）r について

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

- 等式の解釈法（さまざま）：
  - 左辺という解析函数の、$x=0$ において値 1 をとる分枝を $x=0$ のまわりでTaylor展開が右辺で与えられる。
  - （少なくともrが有理数=$1/d$なら）形式べき級数代数での$1+x$のd乗根のうち、定数項が1であるものが右辺に等しい。
- $r=1/2$のときの証明

応用：π の計算

- 円の方程式
$$x^2 + y^2 = 1$$
から，$x > 0$ かつ $y > 0$ で切り取られる円弧は
$$y = \sqrt{1 - x^2}$$
で与えられる．
- 弧長を求める積分
$$\int ds = \int \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$
を $x = 0$ から $x = \frac{1}{2}$ まで積分すると，これは中心角 $\frac{\pi}{6}$ の円弧の長さとなるから，この積分の値を 6 倍すれば円周率 π の値が出る．

応用：π の計算

- $n=-\frac{1}{2}$ の場合の二項定理を使って，実際に計算すると，

$$\begin{aligned}
\pi &= 6\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-x^2)^k\right)dx \\
&= 6\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{2k}dx \\
&= 6\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!(2k+1)}.
\end{aligned}$$

応用：π の計算

$$\boldsymbol{\pi = 6\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!(2k+1)}}$$

$$\mathbf{= 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \frac{15}{7168} + \frac{35}{98304} + \frac{189}{2883584} + \cdots}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{=3}\\
&\mathbf{+0.125}\\
&\mathbf{+0.0140625\ldots}\\
&\mathbf{+0.0020926\ldots}\\
&\mathbf{+0.0003560\ldots}\\
&\mathbf{+0.0000655\cdots}\\
&\mathbf{+\cdots}
\end{aligned}$$

二項定理と小数展開

- べき指数 -1 の二項展開

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

に $x = \frac{1}{10}$ を代入：

$$\frac{10}{9} = \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

$$= 1.11111\cdots$$

よって、特に

$$1 = 0.99999\cdots$$

二項定理と10進展開

- べき指数 -1 の二項展開

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

に $x = 10$ を代入：

$$-\frac{1}{9} = (1-10)^{-1} = 1 + 10 + 100 + 1000 + \cdots$$
$$= \cdots 11111.$$

よって、特に

$$-1 = \cdots 99999.$$

m進展開

- $\boldsymbol{2}$ 以上の整数 $\boldsymbol{m}$ について，任意の自然数 $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{m}$ 進展開できる：

$$n = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \cdots .$$

  - a_0 は n を m で割った余り。
  - 下 k 桁 $n_k = a_0 + a_1 m + \cdots + a_{k-1} m^{k-1}$ まで求まったら，$k+1$ 桁目 a_k は

$$\frac{n - n_k}{m^k}$$

    を m で割った余りとして求まる。

- 以上の手順を $m = 10$，$n = -1$ として実行すると

$$-1 = \cdots 99999$$

が得られる。

10進的〈収束〉概念

- べき指数 -6 の二項展開

$$(1-x)^{-6} = 1 + 6x + 21x^2 + 56x^3 + \cdots$$

に $x = 10$ を代入：

$$\frac{1}{9^6} = (1-10)^{-6} = 1 + 60 + 2100 + 56000 + \cdots$$

- これはこのまま 10 進展開と読むことはできない。
- しかし，適当なノルム（10 進ノルム）で収束する級数と見ることが可能。
- 「0 の数が多い」$\Leftrightarrow$「小さい」

p進数

- 素数 $\boldsymbol{p}$ による（形式的）$\boldsymbol{p}$ 進展開

$$\boldsymbol{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots \quad (0 \leq a_i \leq p-1,\ i \geq 0)}$$

の形の〈数〉を「$\boldsymbol{p}$ 進数（$\boldsymbol{p}$-adic number）」と呼ぶ。

- $\boldsymbol{p}$ 進展開の意味で「**0** の数が多い」$\Leftrightarrow$「小さい」というノルムを考える。
- $\boldsymbol{p}$ 進数全体 $\mathbb{Q}_{\boldsymbol{p}}$ は（実数体 $\mathbb{R}$ と同様に）完備体になっている。

-1の平方根

- $\boldsymbol{p}$ が $\mathbf{4}$ で割って $\mathbf{1}$ 余る形の奇素数なら

$$\boldsymbol{p = a^2 + b^2}$$

となる自然数 $\boldsymbol{a, b}$ が存在する．ここで $\boldsymbol{a}$ も $\boldsymbol{b}$ も $\boldsymbol{p}$ で割れない．両辺を $\boldsymbol{b^2}$ で割って

$$\boldsymbol{-1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{p}{b^2}.}$$

- 形式的には右辺の平方根

$$\boldsymbol{\pm\frac{a}{b}\left(1 - \frac{p}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

が求める解.

-1の平方根

- a も b も p で割れないので二項展開

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(-\frac{p}{a^2}\right)^k$$

は $\mathbb{Q}_p$ の中で収束する.

- よって,

$$\pm\frac{a}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(-\frac{p}{a^2}\right)^k$$

が $\mathbb{Q}_p$ における -1 の平方根.

- 例えば, $p=5$ のとき $5=1^2+2^2$ がとれるので

$$\pm\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-5)^k.$$

2次方程式のp進解

- p は奇素数として，2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0 \qquad (*)$$

（a, b は整数）の p 進解を求める：

- 解の公式は

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

- $a = 0$ のとき：問題の方程式は

$$x^2 + b = 0.$$

- $b \neq 0$ ならば，$-b$ が p を法とした平方剰余であることが $(*)$ が $\mathbb{Q}_p$ に解を持つ必要十分条件である．

2次方程式のp進解

- $\boldsymbol{a \neq 0}$ のとき：解の公式を次のように変形する：

$$\frac{a}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1-\frac{4b}{a^2}}\right).$$

$4b/a^2$ の p 進付値が 1 よりも小，つまり

$$|b|_p < |a|_p^2$$

ならば形式的な二項展開が収束し

$$\frac{a}{2}\left[-1 \pm \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(-\frac{4b}{a^2}\right)^k\right]$$

が $\mathbb{Q}_p$ における解を与える．

まとめ：二項定理から始まる数学

- 二項定理（binomial theorem）
  - べき関数（を始めとした様々な陰函数）のTaylor展開
  - 数論的・関数論的に興味深い〈数〉の値：
    - 実数・複素数値
    - p進数値

- ⇔（一般化された）「パスカルの半平面」
  - 「ずらし算」のような初等的で簡単な規則に基づいた数のならび。「組み合わせ」の数。
  - 数論・代数・解析などにまたがる領域横断的な普遍性を持っている。