

# 知恵の輪のトポロジー

谷山 公規

(早稲田大学教育学部数学科)

2013年度秋季総合分科会・市民講演会

愛媛大学 南加記念ホール

2013年9月23日

§1. トポロジー・結び目理論の紹介

§2. 知恵の輪のトポロジー

§3. おまけ

## §1. トポロジー・結び目理論の紹介

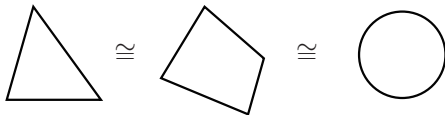
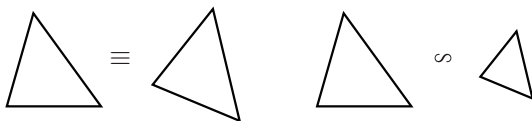
トポロジー（位相幾何学）とは？ 「**図形**の**つながり方**の研究」

2つの図形  $A$  と  $B$  が

**合同**（形も大きさも同じ）  $A \equiv B$

**相似**（形は同じ 大きさは違っててもよい）  $A \sim B$

**同相**（**つながり方**は同じ 形と大きさは違っててもよい）  $A \cong B$



例 アルファベット (大文字) の同相分類

$$A \cong R$$

B

$$C \cong I \cong J \cong L \cong M \cong N \cong S \cong U \cong V \cong W \cong Z$$

$$D \cong O$$

$$E \cong F \cong T \cong Y$$

$$G \cong X$$

$$H \cong K$$

P

Q

$$A \cong A \cong R \cong R \cong R$$

$$\text{---} \circ \cong \text{---} \circ \cong \text{---} \circ$$

$$E \cong \text{---} \text{---} \text{---} \cong \text{---} \text{---} \text{---} \cong \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$G \cong \text{---} \text{---} \text{---} \cong \text{---} \text{---} \text{---} \cong \text{---} \text{---} \text{---}$$

図形とは

2次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^2$  の部分集合を平面図形

3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  の部分集合を空間図形

一般に、 $n$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の部分集合を図形

図形をさらに一般化したものが位相空間

つながり方・同相とは

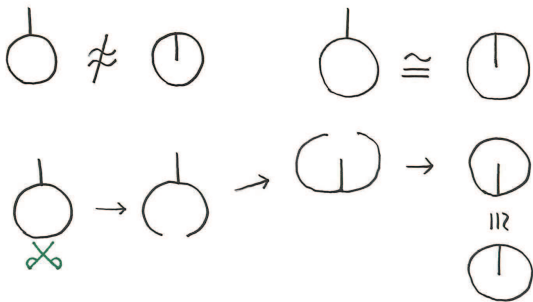
2つの図形（位相空間） $X$ と $Y$ に対して、全単射連続写像  
 $f: X \rightarrow Y$ で、その逆写像  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  も連続となるものが存在  
するとき、 $X$ と $Y$ は同相であるといい、 $X \cong Y$ と記す。 $X$ と $Y$   
が同相であるとき $X$ と $Y$ のつながり方は同じであるという。

## 同相と同位 (全同位)

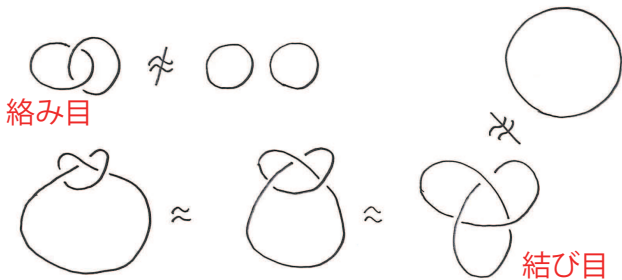
2つの平面図形  $X \subset \mathbb{R}^2$  と  $Y \subset \mathbb{R}^2$  に対して、 $\mathbb{R}^2$  の向きを保つ同相写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  で  $f(X) = Y$  となるものが存在するとき、 $X$  と  $Y$  は同位であるといい、 $X \approx Y$  と記す。

2つの空間図形  $X \subset \mathbb{R}^3$  と  $Y \subset \mathbb{R}^3$  に対して、 $\mathbb{R}^3$  の向きを保つ同相写像  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  で  $f(X) = Y$  となるものが存在するとき、 $X$  と  $Y$  は同位であるといい、 $X \approx Y$  と記す。





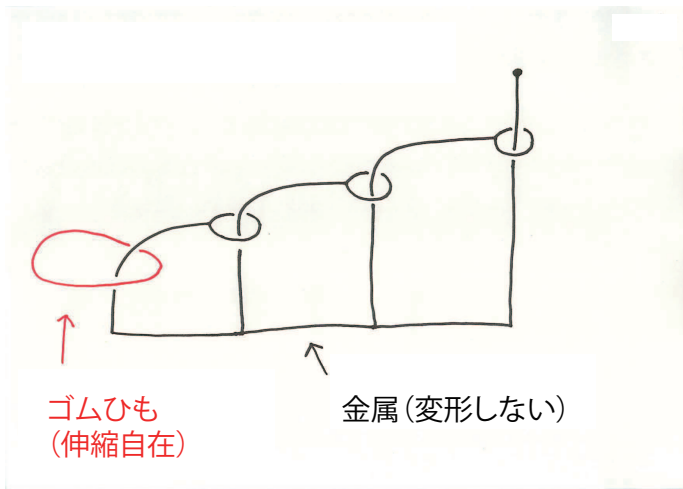
平面図形として



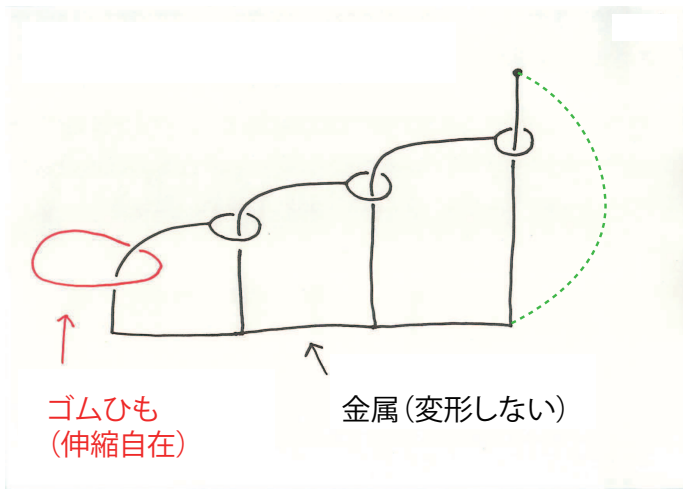
空間図形として

## §2. 知恵の輪のトポロジー (空間図形の同位問題)

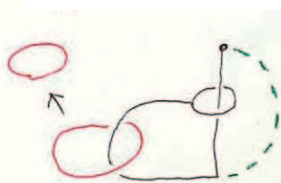
問題1 図のゴムひもを金属部分からはずさない。



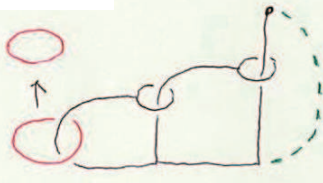
問題2 図のゴムひもを金属部分からはずすためにはゴムひもは点線部分を何回通過する必要があるか？



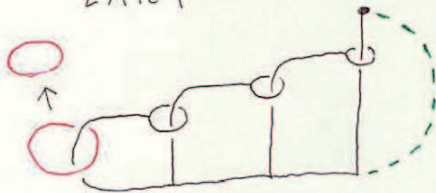
# 問題のレベル化



レベル 1

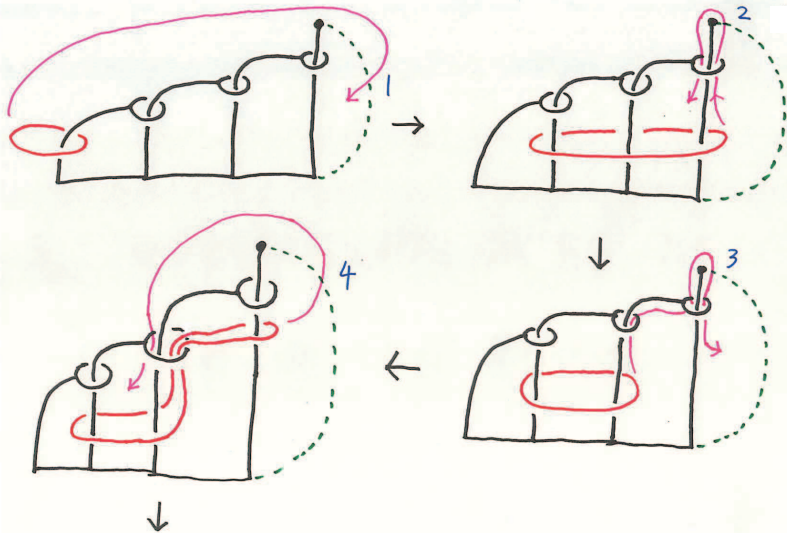


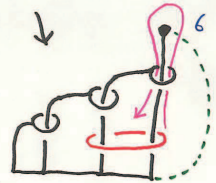
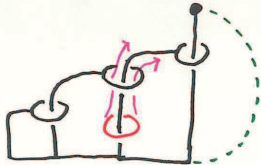
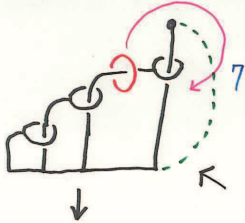
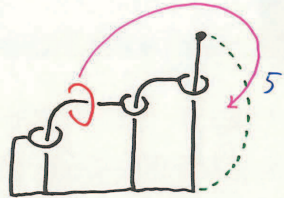
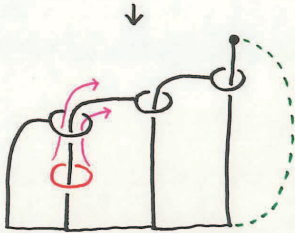
レベル 2

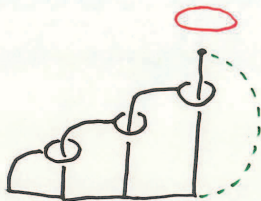
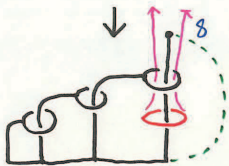


レベル 3

# 解答

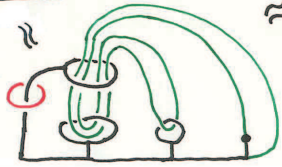
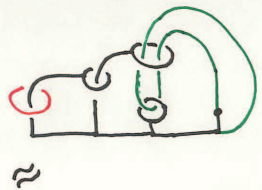
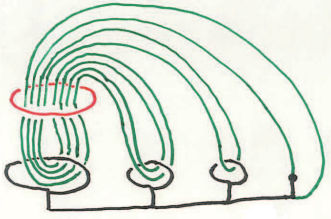
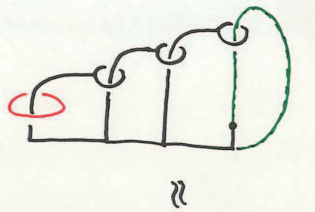
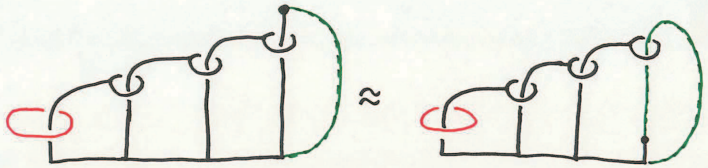




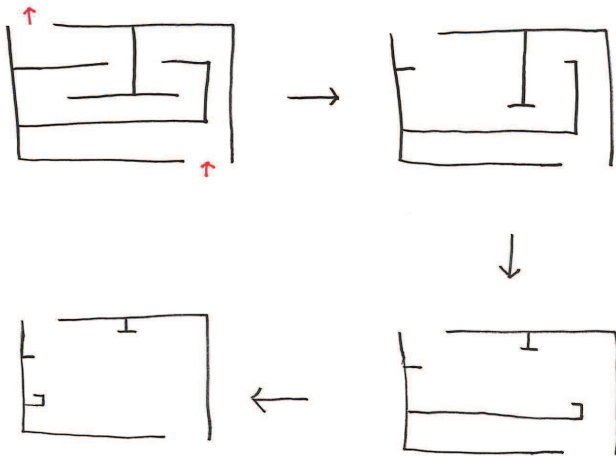


Answer  $\leq 8 (= 2^3)$

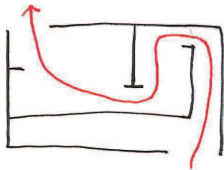
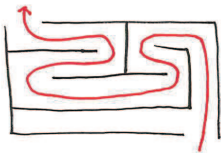
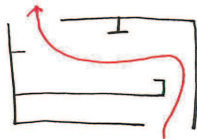
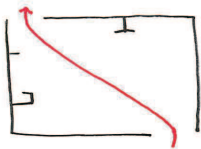




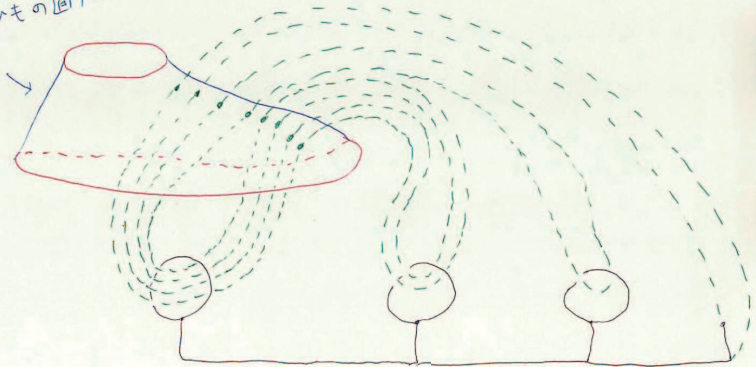
# 迷路の解法 1



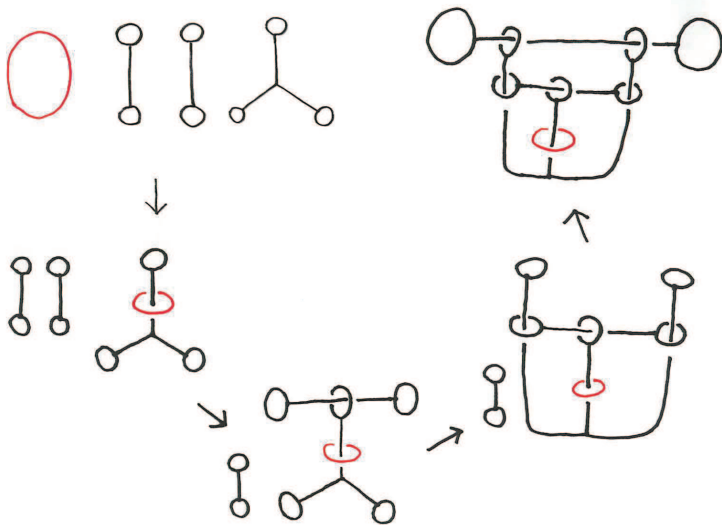
## 迷路の解法 2



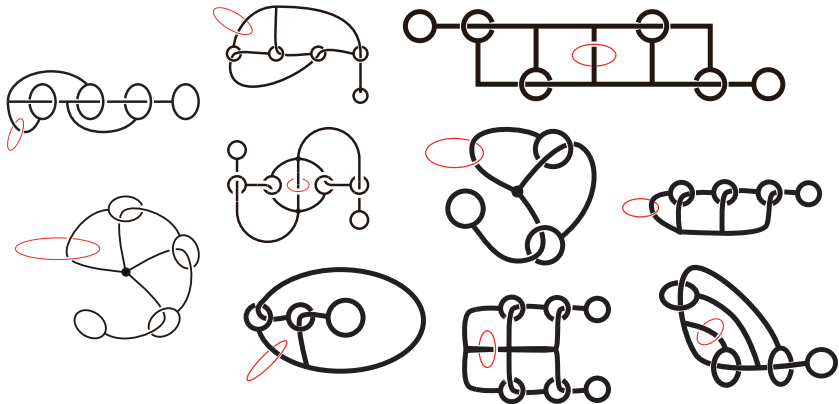
ゴムひもの通りみち (軌跡)



# ハード・ソフト系知恵の輪の作り方 (例)



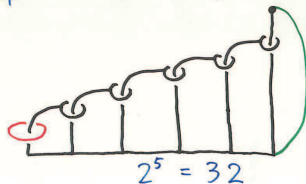
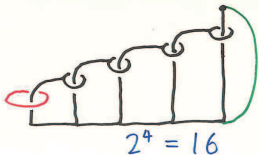
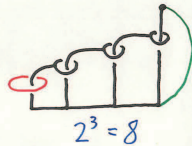
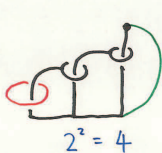
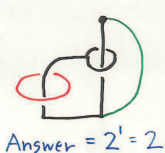
# ハード・ソフト系知恵の輪の例

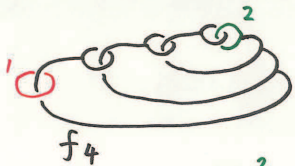
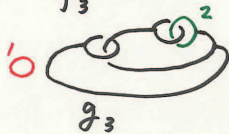
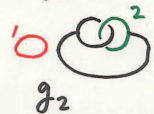
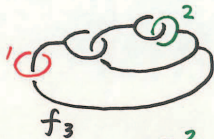
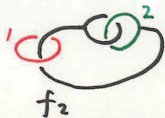
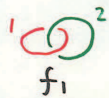


8回本当に必要であること (7回以下でははずれないこと)

[Przytycki - Sikora, Proc. AMS, 2001,  
Topological insights from the Chinese rings]

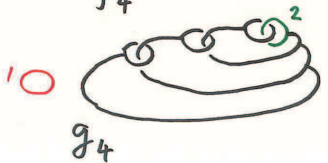
Answer =  $2^n$





...

Theorem [P-S]  
 $d_{12}(f_n, g_n) = 2^{n-1}$

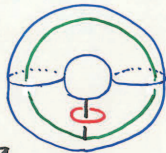
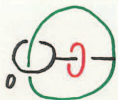
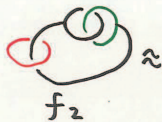


...



New proof

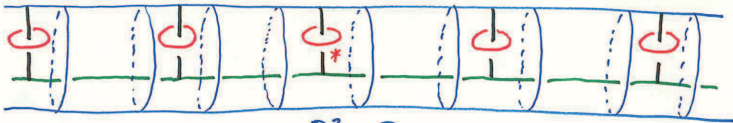
$$d_{12}(f_1, g_1) = 1 = 2^0$$



$N(0)$  (solid torus)

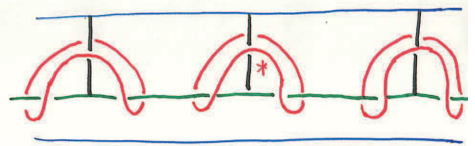
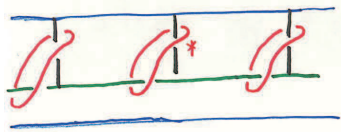
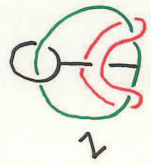
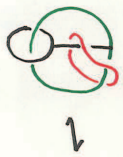
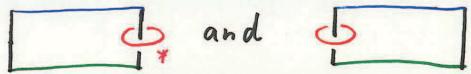
$S^3 - \overset{\circ}{N}(0)$   
(solid torus)

Universal covering

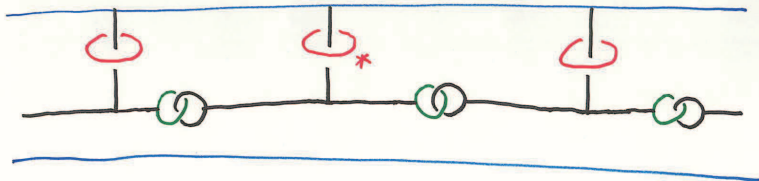
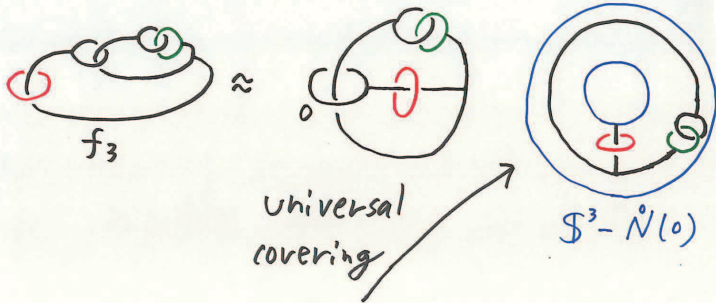


$D^2 \times \mathbb{R}$

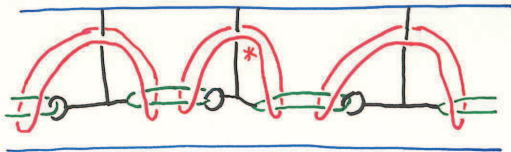
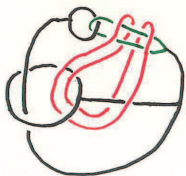
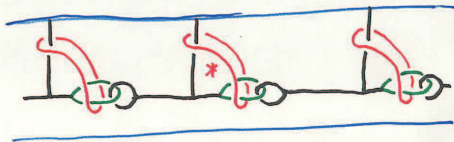
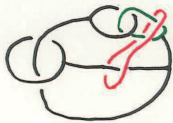
Need to unlink both of



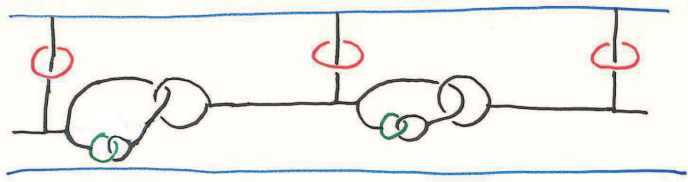
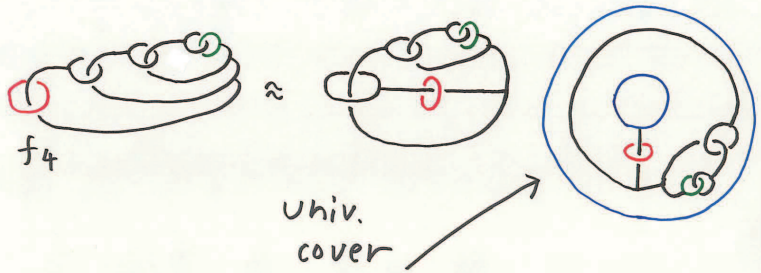
$$\therefore d_{12}(f_2, g_2) = 2 = 2'$$



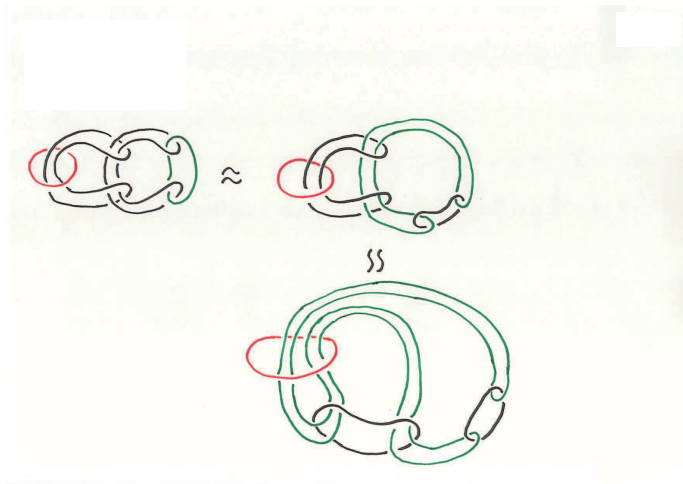
Need to unlink both of



$$\therefore d_{12}(f_3, g_3) = 2 d_{12}(f_2, g_2) = 2^2$$



# 定理の拡張 (例)



### §3. おまけ (微分幾何体操)

ご清聴有難うございました。