愛媛の和算と算額

平田浩一（愛媛大学教育学部）

2013/9/23 市民講演会（日本数学会）

自己紹介

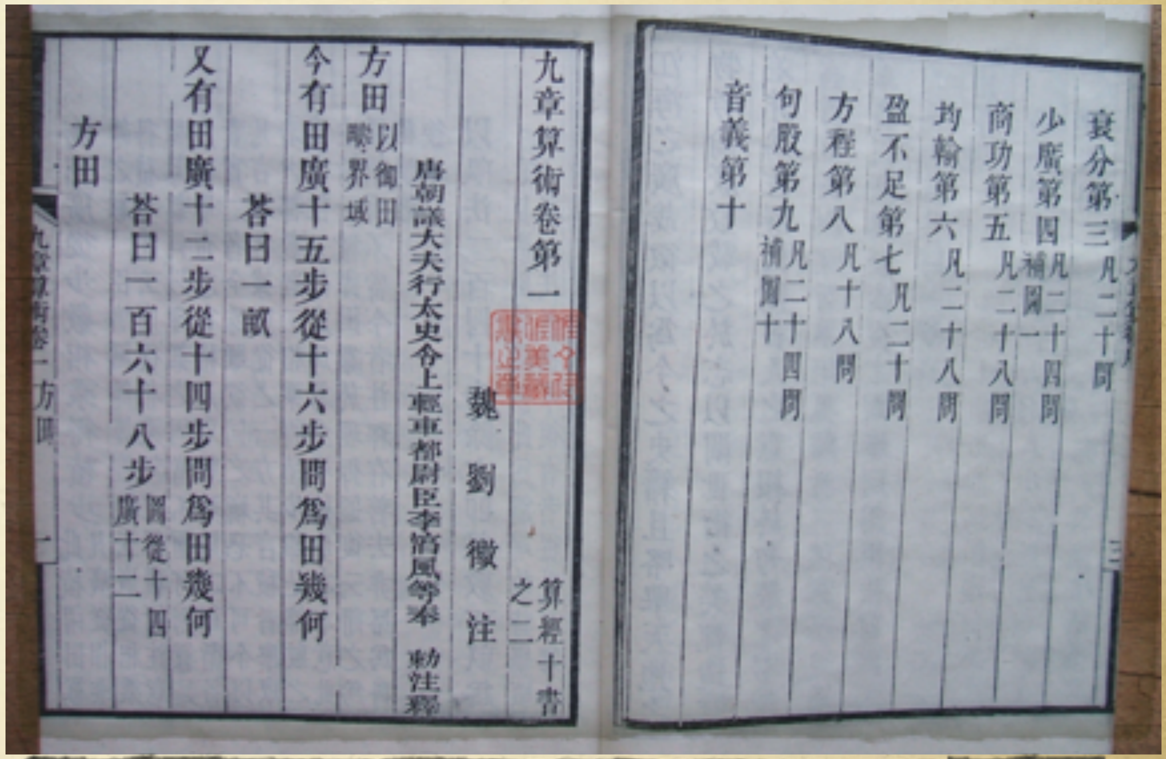
- 愛媛大学　教育学部　数学教育講座（幾何担当）
- 研究
  - 幾何学（位相幾何学）
  - 和算（愛媛和算研究会）、折り紙
  - 算額の図形問題

講演の内容

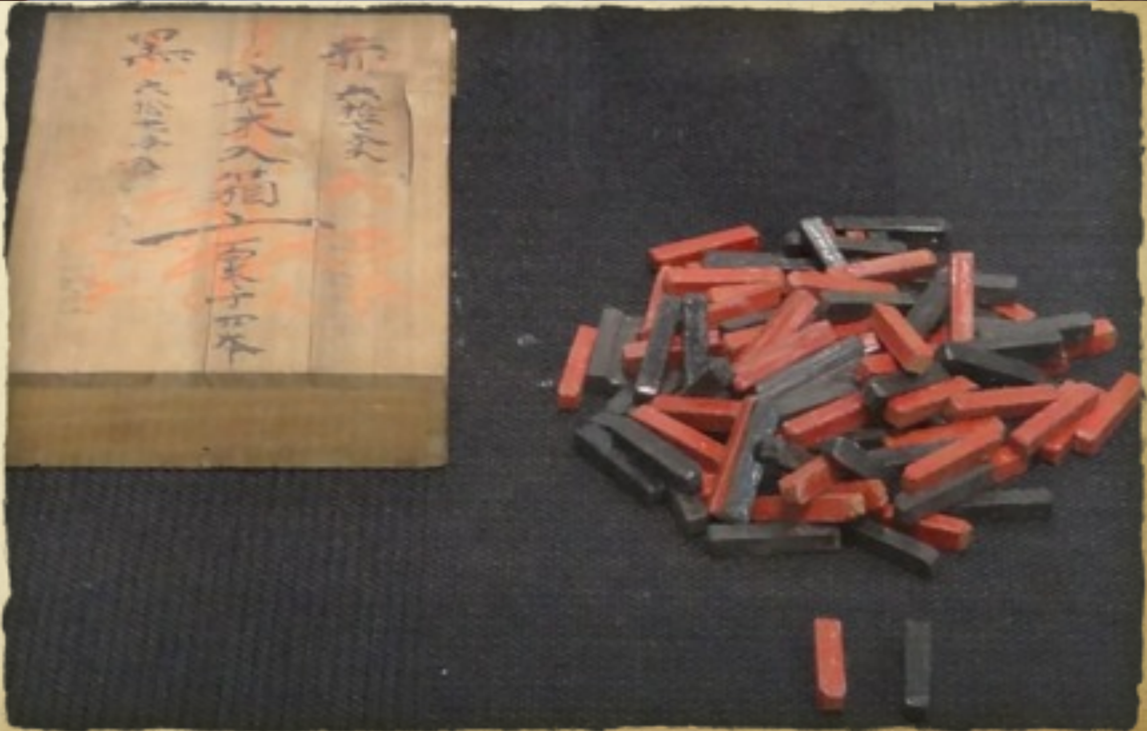
- 日本の数学の歴史
- 江戸時代の和算
- 愛媛の和算と算額
  - 算額、和算家、算額の問題、和算書

日本の数学

- 古代の日本の数学
  - 飛鳥時代、律令国家
  - 算博士(先生)、算生(学生)
  - 『九章算術』など
  - 算木、九九
- ソロバン伝来（室町時代）

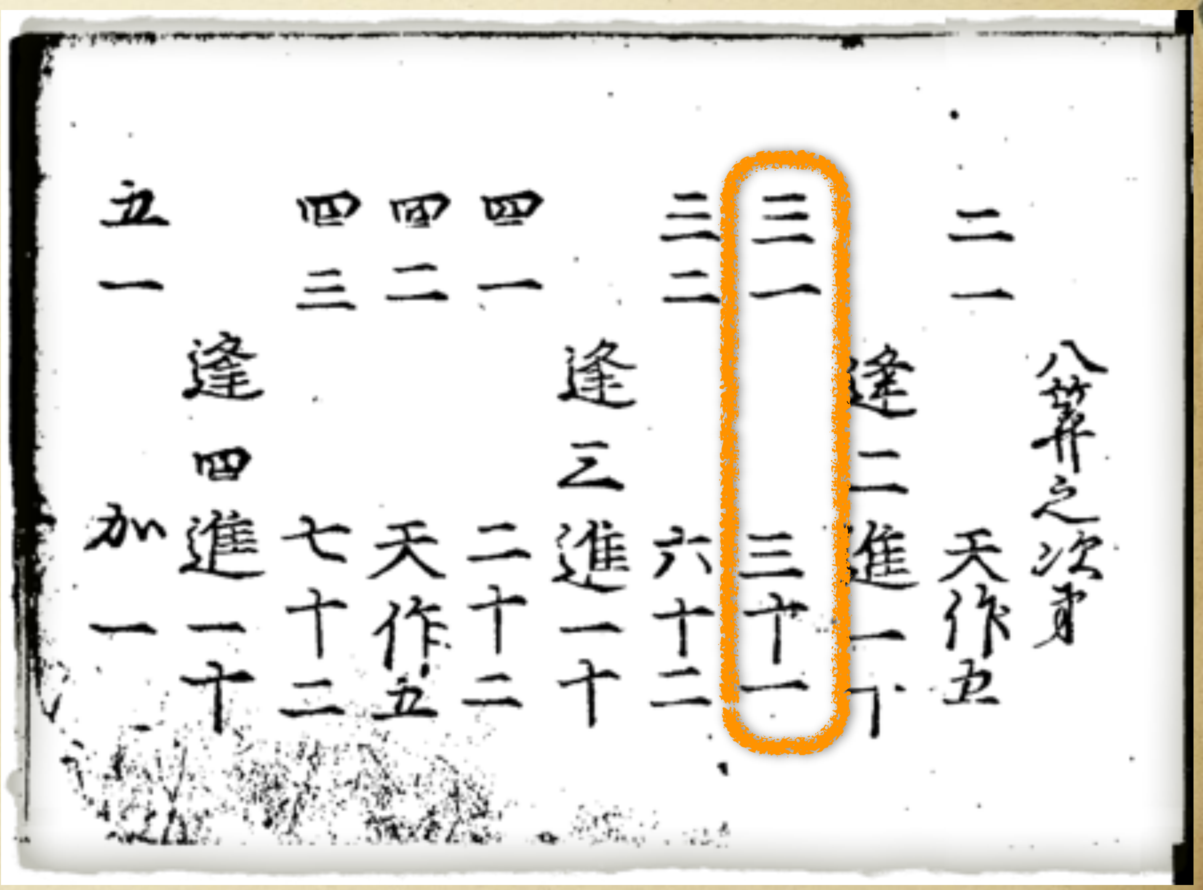

衰分第三 凡二十問
少廣第四 凡二十四問
商功第五 凡二十八問
均輸第六 凡二十八問
盈不足第七 凡二十問
方程第八 凡十八問
句股第九 凡二十四問 補圖十
音義第十

九章算術卷第一 算經十書之二
魏 劉徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勅注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問為田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問為田幾何
荅曰一百六十八步 圖從十四廣十二
方田



江戸時代に入ると

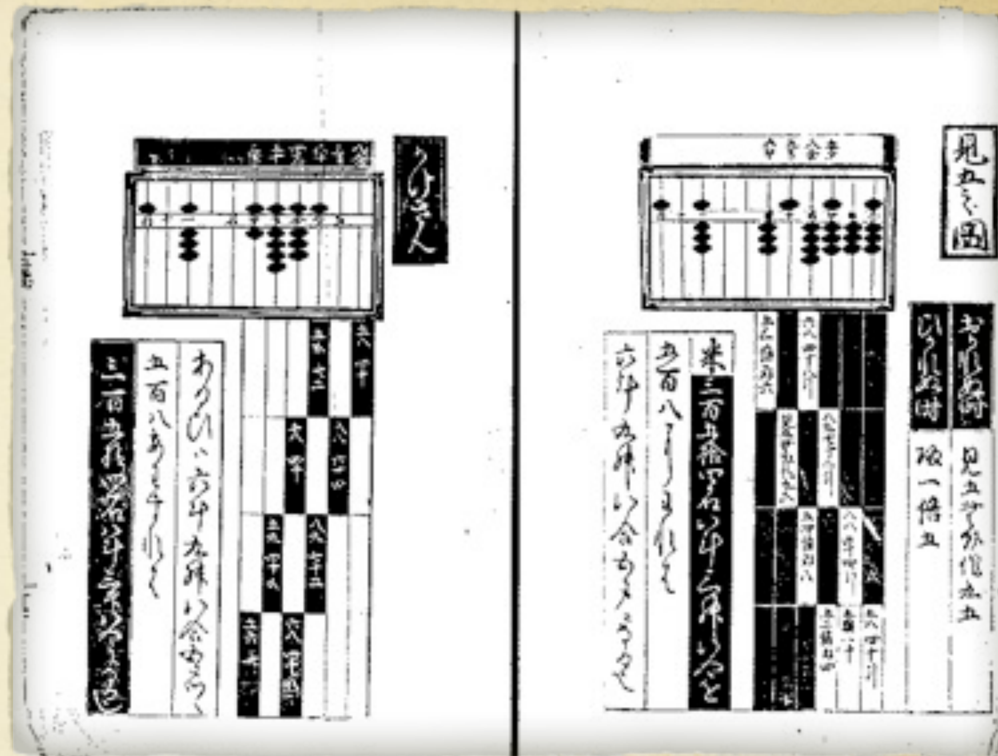
- 一般庶民も計算ができないと生活や仕事に支障
  - ソロバン塾、数学塾
  - 『算用記』『割算書』
  - 割算九九

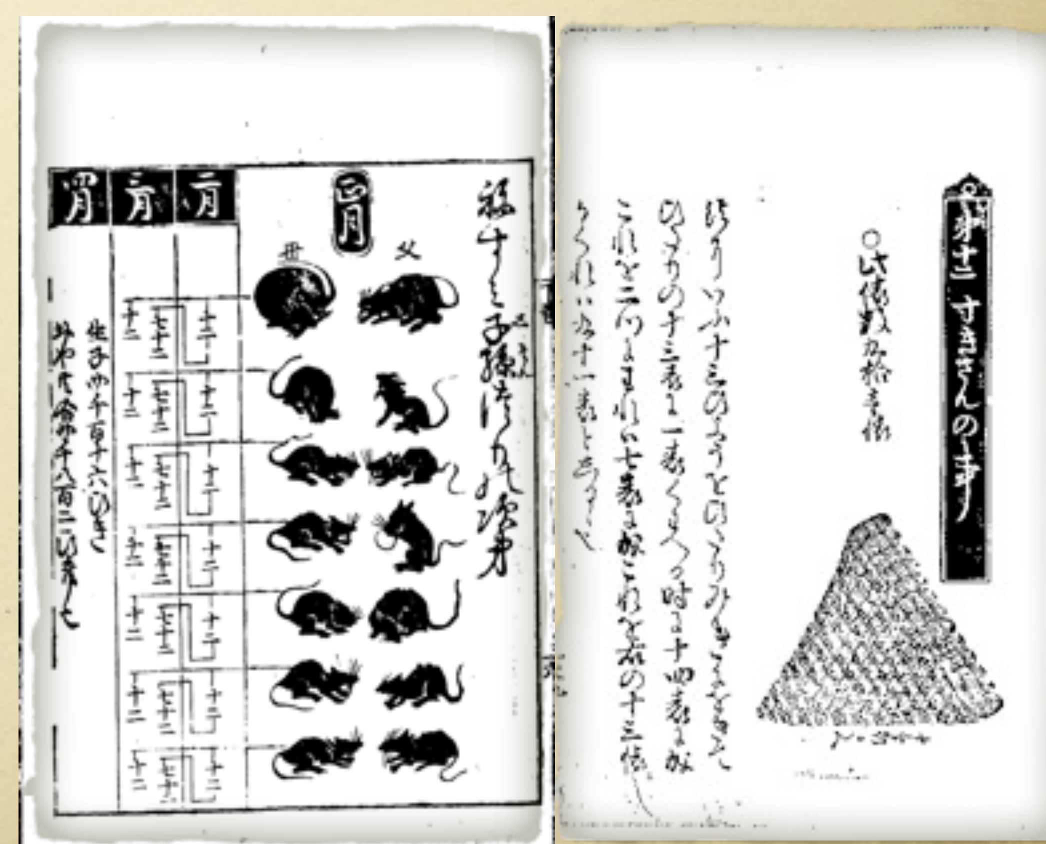

八算之次第
二一 天作五
逢二進一十
三一 三十一
三二 六十二
逢三進一十
四一 二十二
四二 天作五
四三 七十二
逢四進一十
五一 加一

割算書

『塵劫記』

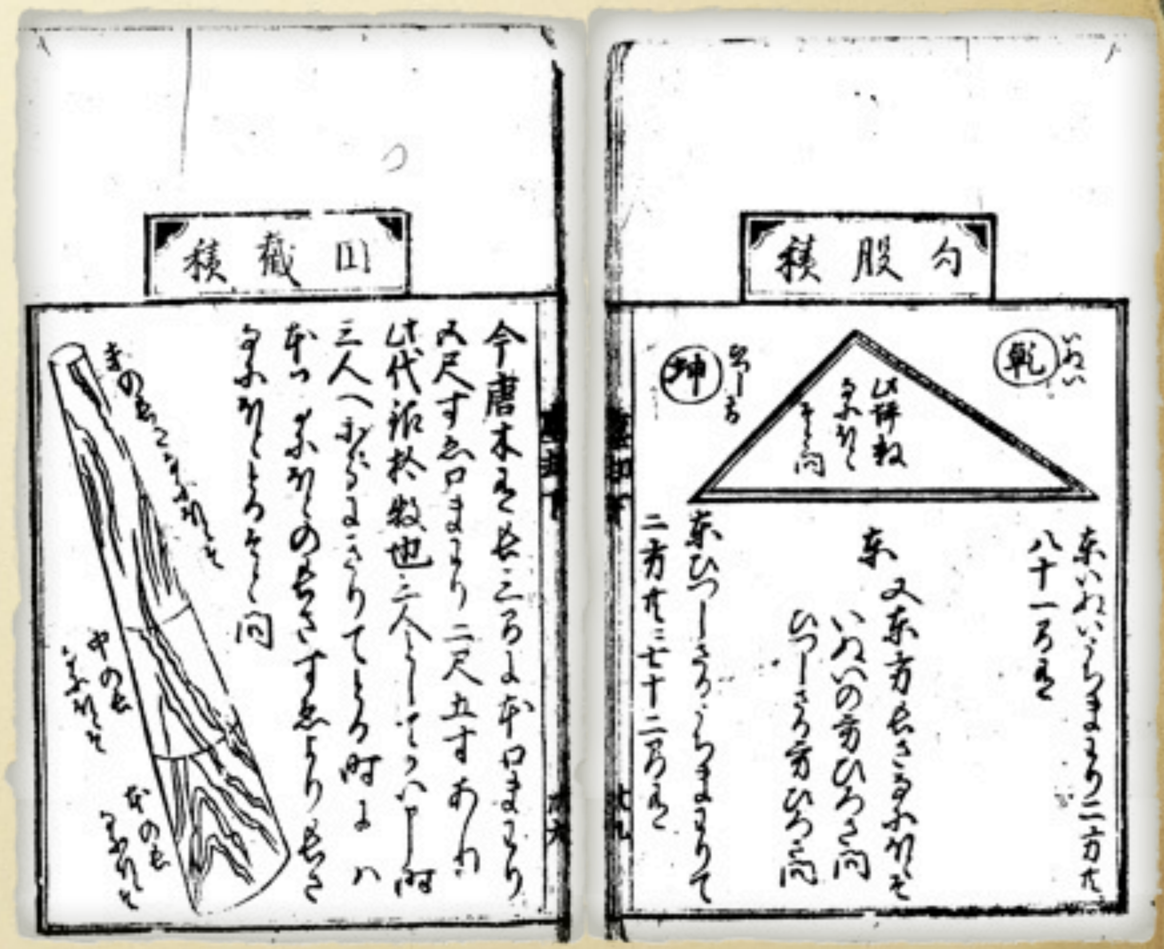
- 吉田光由（よしだみつよし）
  - （1598〜1672）
  - 『塵劫記』（1627）
  - 数学の教科書
  - 公式集 → 読み物
- ベストセラー
  - 日本独自に数学が発展「和算」





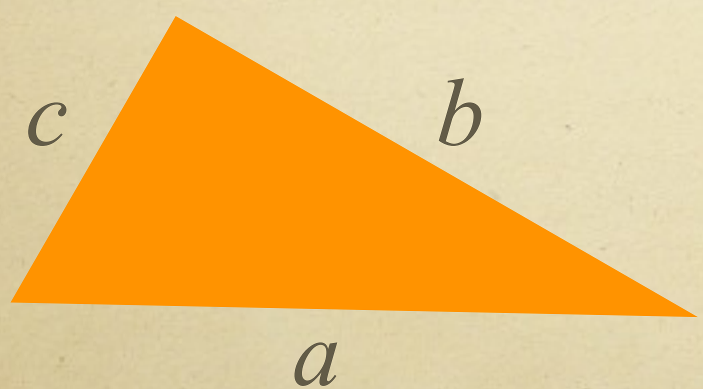
遺題

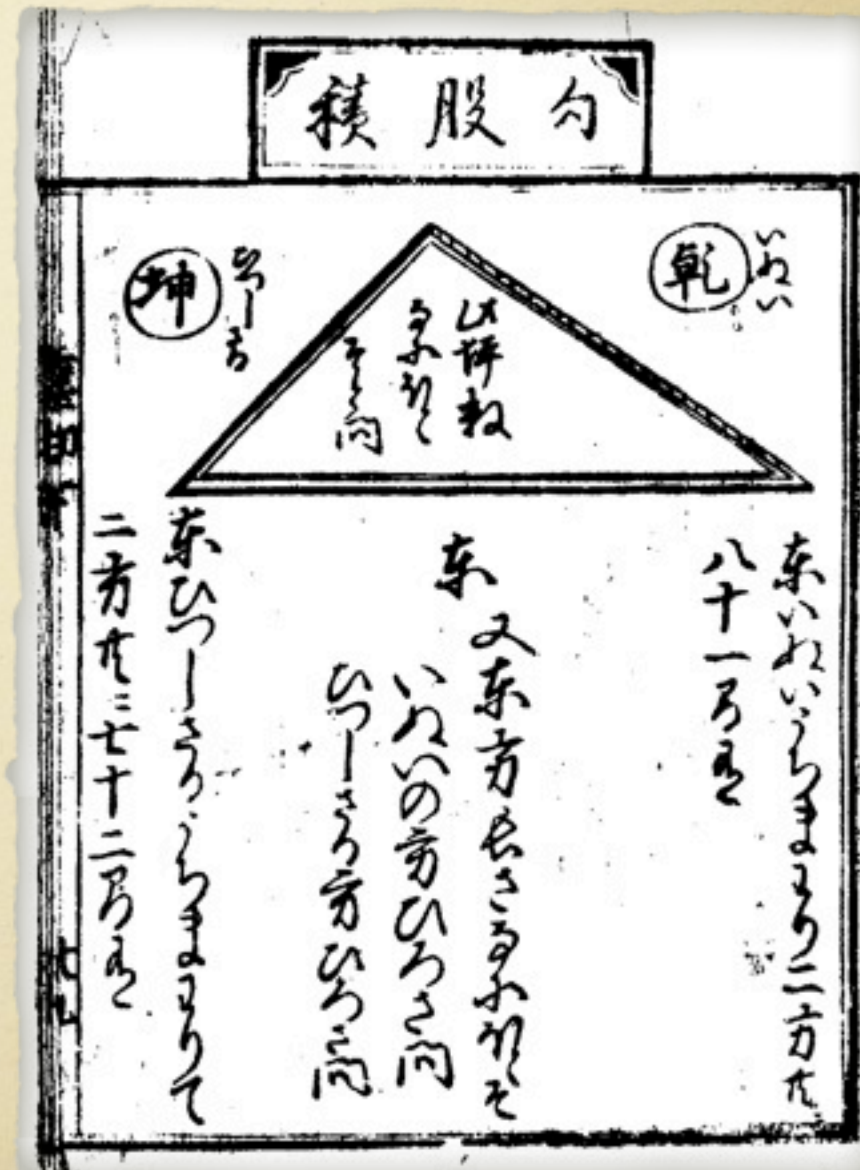
- 『塵劫記』ベストセラー
  - 海賊版が出回る（著作権 ?）
  - 算術塾の乱立
- 『新篇塵劫記』（1641年）
  - 答えの書かれていない問題12問（遺題）を載せた
  - 当時の算術家への挑戦状



遺題の問題

- 直角三角形の三辺 a, b, c
    - $a + b = 81$
    - $a + c = 72$
- 三辺の長さと面積を求めよ





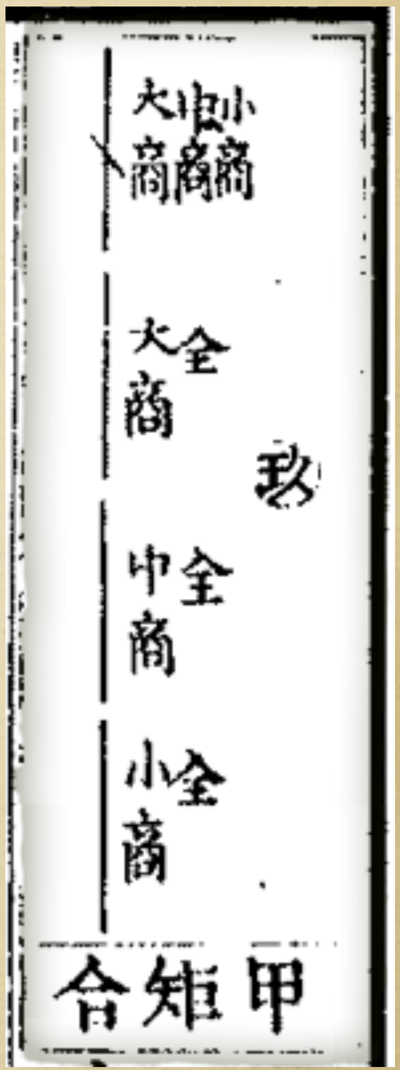
遺題継承

- 榎並和澄（えなみともすみ）『参両録』（1653年）
  - 塵劫記の遺題に解答
  - 新たな遺題を掲載
- 以後、遺題継承が続く
  - 和算の発展

十字環の問題

関孝和

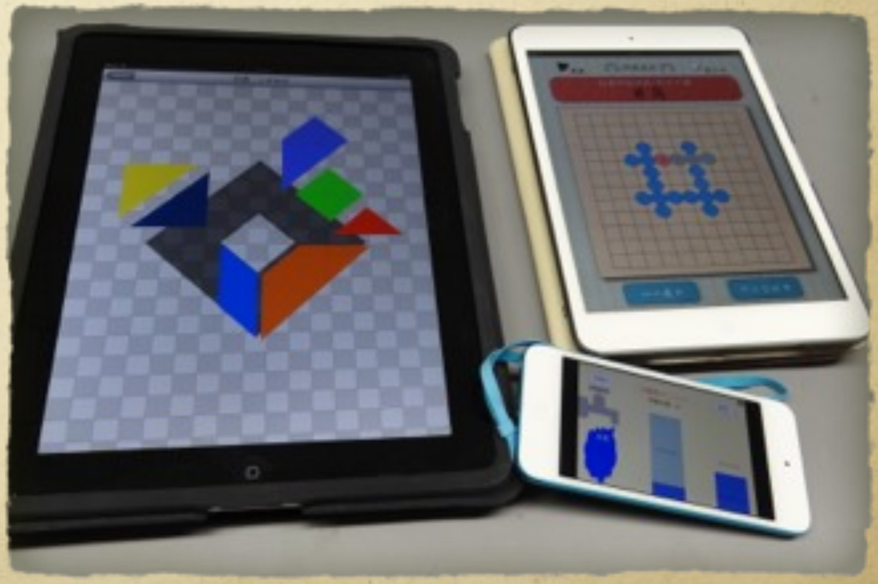
- 関孝和（せきたかかず）
  1640頃〜1708
  - 算聖といわれる
  - 点竄術（傍書法）発明
  - 多変数の代数計算
  - 和算の計算力の基礎



$$-\sqrt{\text{大}\cdot\text{中}\cdot\text{小}}+\sqrt{\text{大全}}+\sqrt{\text{中全}}+\sqrt{\text{小全}}=0$$

和算の発展

- 和算研究の発展
  - 多数の和算家が寄与
- 遊び・娯楽としての和算
  - 『塵劫記』
  - 『和國智恵較』（環中仙 1727）
  - 『勘者御伽雙紙』（中根彦循 1743）



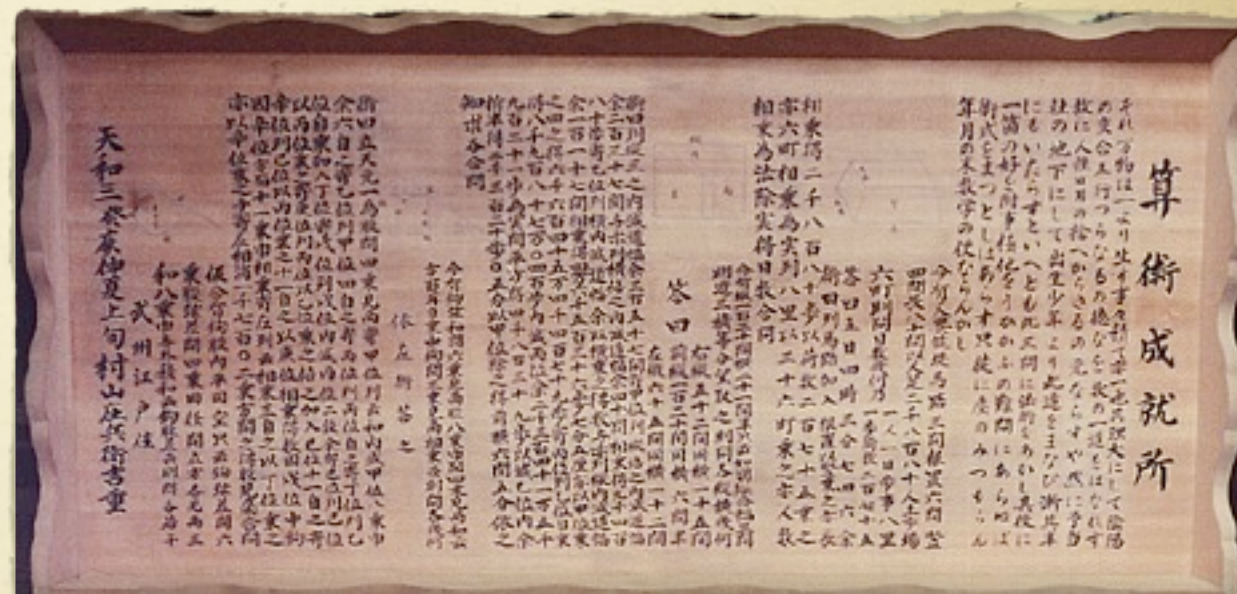
算額奉納

- 絵馬を奉納するのに習い、算額の奉納が始まる
    - 問題が解けたことを感謝
    - 学問成就の祈願
    - 庶民の研究発表の場
    - 全国に広まる
    - 現存算額 : 約千枚

内子 八幡神社

最も古い算額

- 全国では1683年
  - 星宮神社（栃木県）
  - 村山庄兵衛吉重



- 愛媛県内では1788年
  - 金刀比羅神社（大洲市）
  - 別宮四郎兵衛

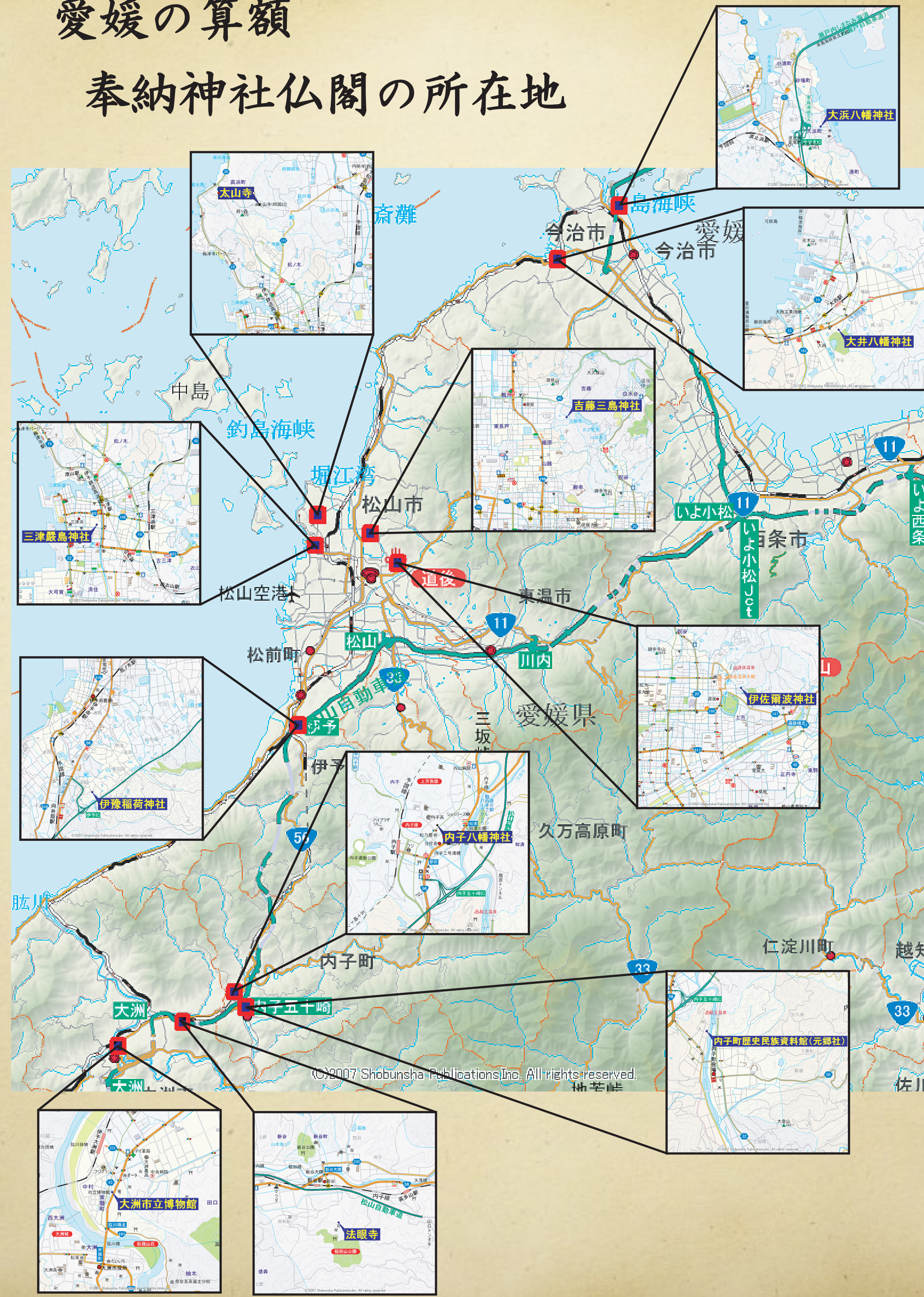
愛媛の・・・

愛媛県内の算額

- 大浜八幡神社（今治1845）
- 大井八幡神社（今治1906）
- 伊佐爾波神社
  23面（1803〜1937）
- 太山寺（1852）
- 吉藤三島神社（1880）
- 三津厳島神社（1810）
- 郡中稲荷神社（伊予 1797）
- 内子八幡神社（1847）
- 元郷社三島神社（五十崎 1894）
- 元郷社三島神社（五十崎）
- 金刀比羅神社（大洲 1788）
- 法眼寺（大洲 1794）

愛媛の算額

奉納神社仏閣の所在地



松山市吉藤 三島神社

松山市三津 厳島神社

内子 八幡神社

松山市道後 伊佐爾波神社

伊佐爾波神社の算額

- 算額23面（復元1面）
- かつては回廊に掲げられていた
- 傷みがひどい
- 現在は非公開

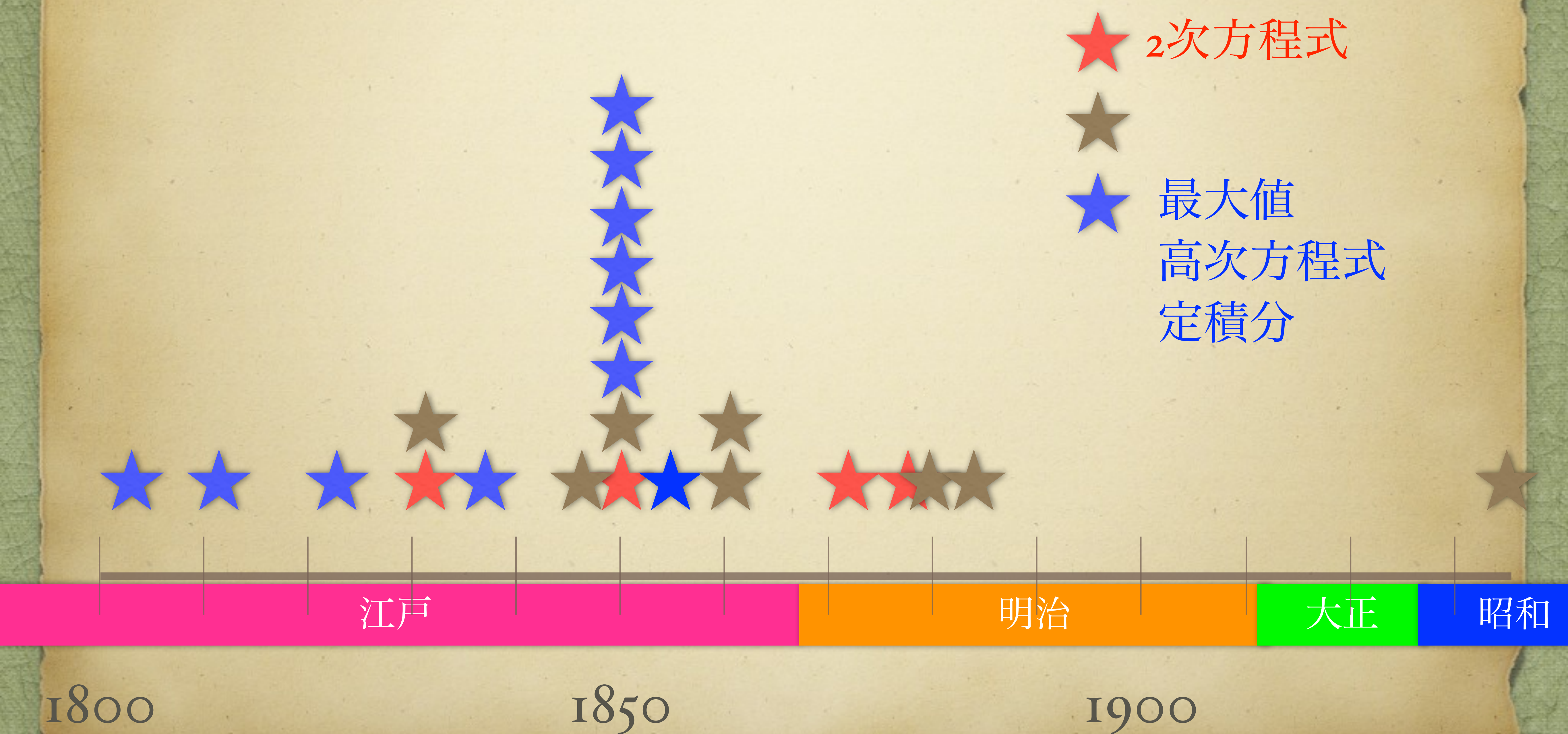
昭和41年

『道後八幡 伊佐爾波神社の算額』

- 平成17年出版
（伊佐爾波神社、愛媛和算研究会）
- 算額22面すべてを写真入りで解説
- 算額6面については問題の現代解を載せる

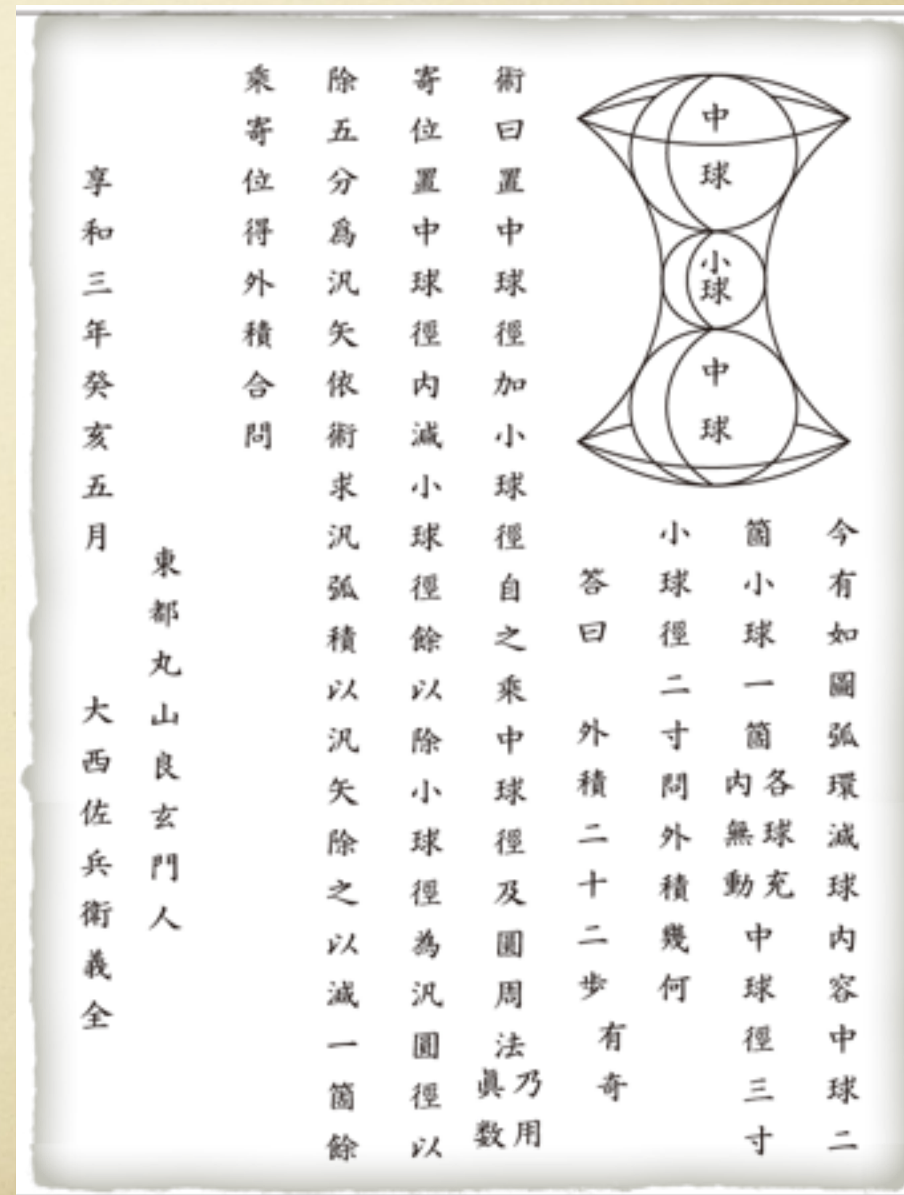
現在の伊佐爾波神社

伊佐爾波神社算額の奉納年



大西佐兵衛の算額

- 1803年奉納



今有如圖弧環滅球内容中球二箇小球一箇各球充内無動中球徑三寸小球徑二寸問外積幾何

答曰外積二十二歩有奇

術曰置中球徑加小球徑自之乘中球徑及圓周法乃用眞数寄位置中球徑内滅小球徑餘以除小球徑為汎圓徑以除五分為汎矢依術求汎弧積以汎矢除之以滅一箇餘乘寄位得外積合問

東都丸山良玄門人

享和三年癸亥五月

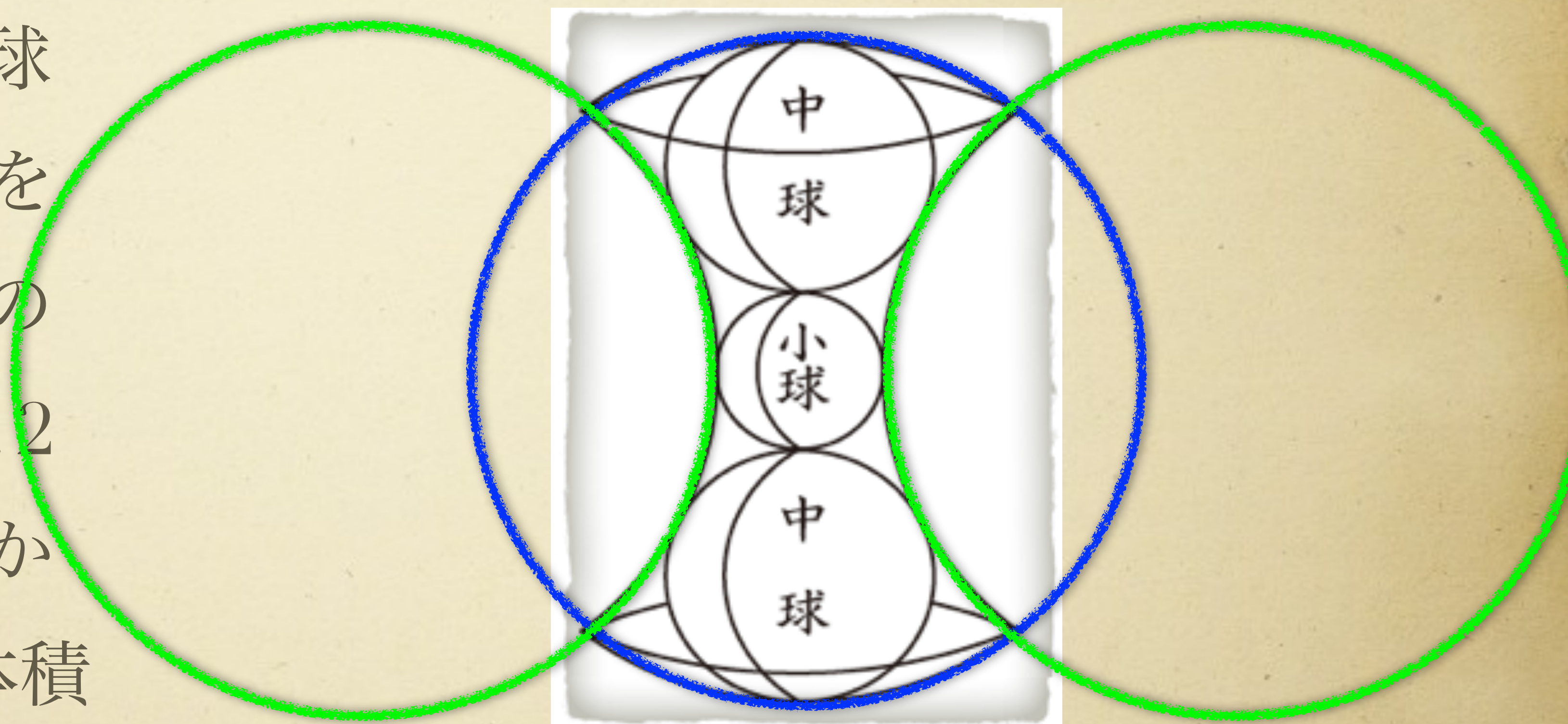
大西佐兵衛義全

大西佐兵衛

- 松山藩家老水野家の用人
- 江戸で丸山良玄に和算を学ぶ
- 和算書『雑題』30冊を著す
  - 愛媛県立図書館

大西佐兵衛の問題

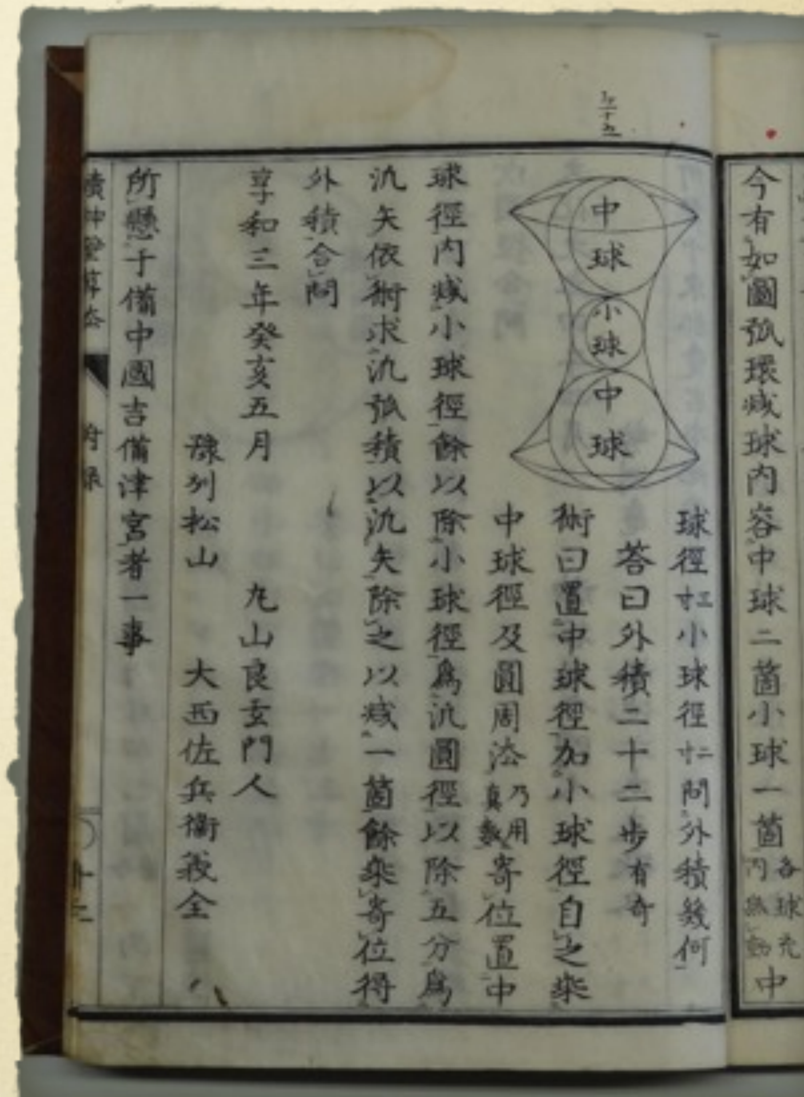
- 図のように、弧環減球に中球2個と小球1個を入れる。中球と小球の直径がそれぞれ3寸と2寸のとき、弧環減球から3個の球を除いた体積を求めよ。



$$V = 2\pi\left(\frac{128}{3}+\frac{225}{8}\sqrt{7}-150\sin^{-1}\frac{\sqrt{7}}{4}\right)-\left(\frac{4}{3}\pi+2\cdot\frac{9}{2}\pi\right)$$

『続神壁算法』に掲載

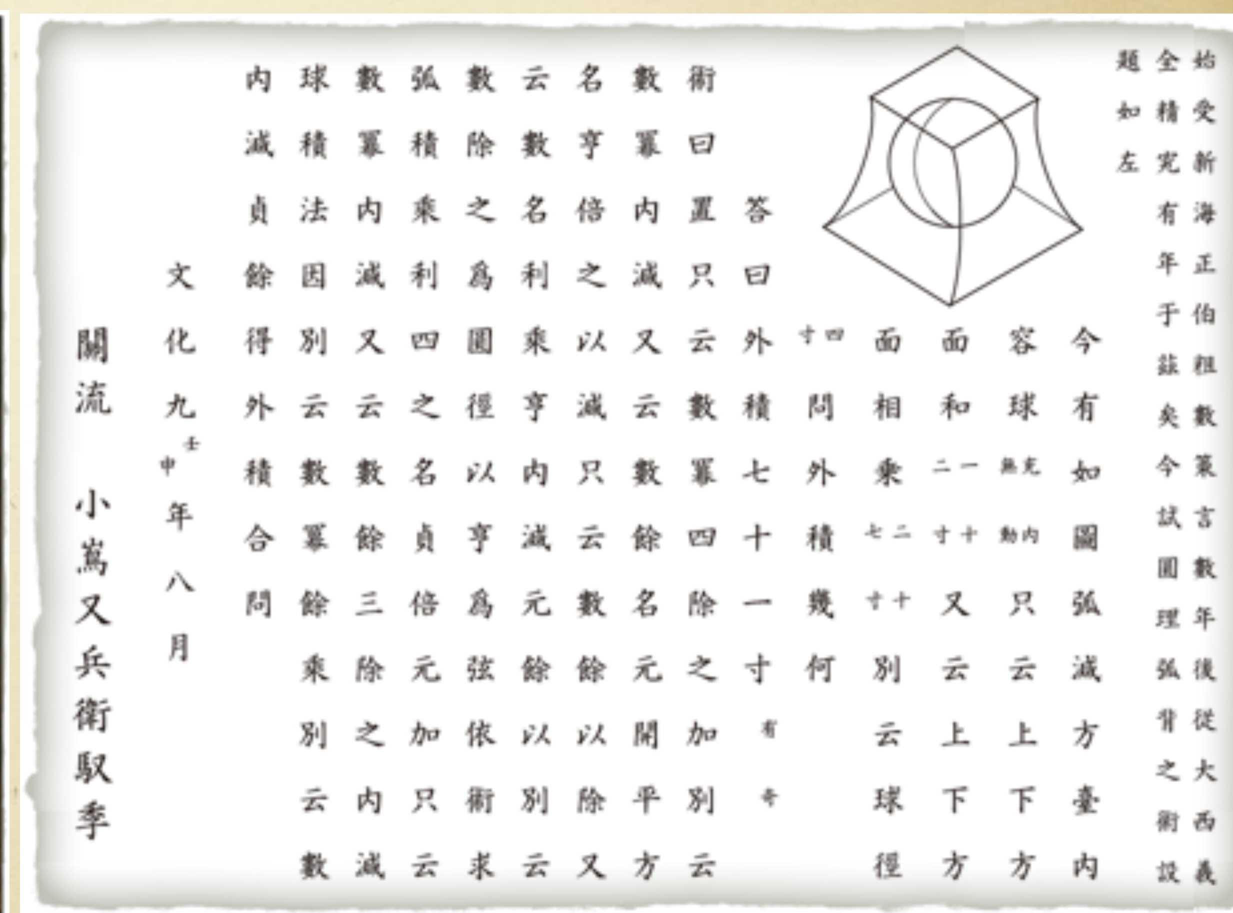
藤田嘉言(よしとき)著



全国の難易度の高い算額を収録した問題集

小嶌又兵衛の算額

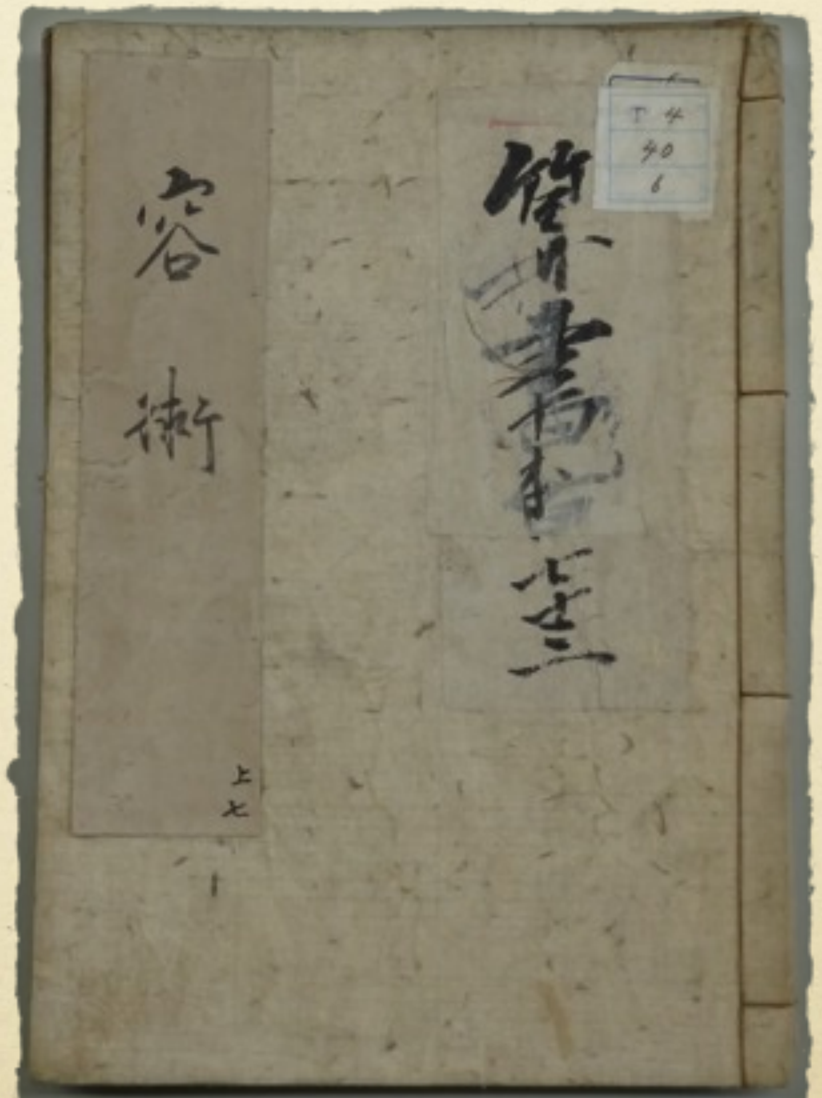
- 1812年奉納

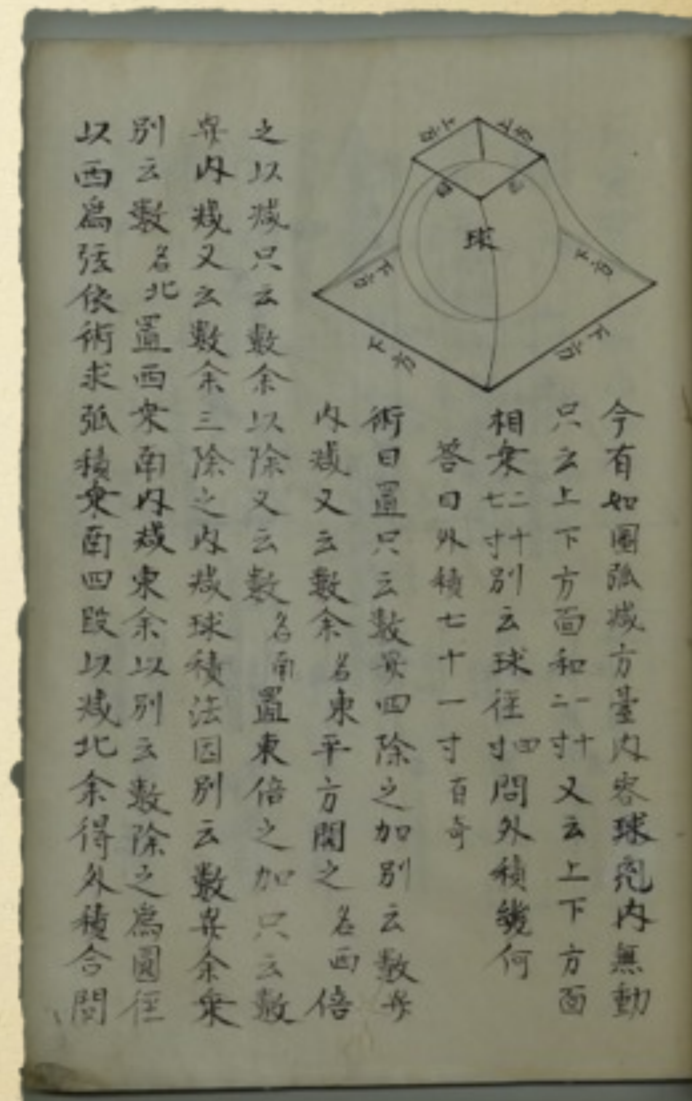


始受新海正伯祖數算言數年後從大西義
全精究有年于茲矣今試圖理弧背之術設
題如左
今有如圖弧減方臺內
容球只云上下方
面和又云上下方
面相乘別云球徑
問外積幾何
答曰外積七十一寸
術曰置只云數冪四除之加別云
數冪內減又云數餘名元開平方
名亨倍之以減只云數餘以除又
云數名利乘亨內減元餘以別云
數除之為圓徑以亨為弦依術求
弧積乘利四之名貞倍元加只云
數冪內減又云數餘三除之內減
球積法因別云數冪餘乘別云數
內減貞餘得外積合問
文化九壬申年八月
關流　小嶌又兵衛馭季

小嶌又兵衛

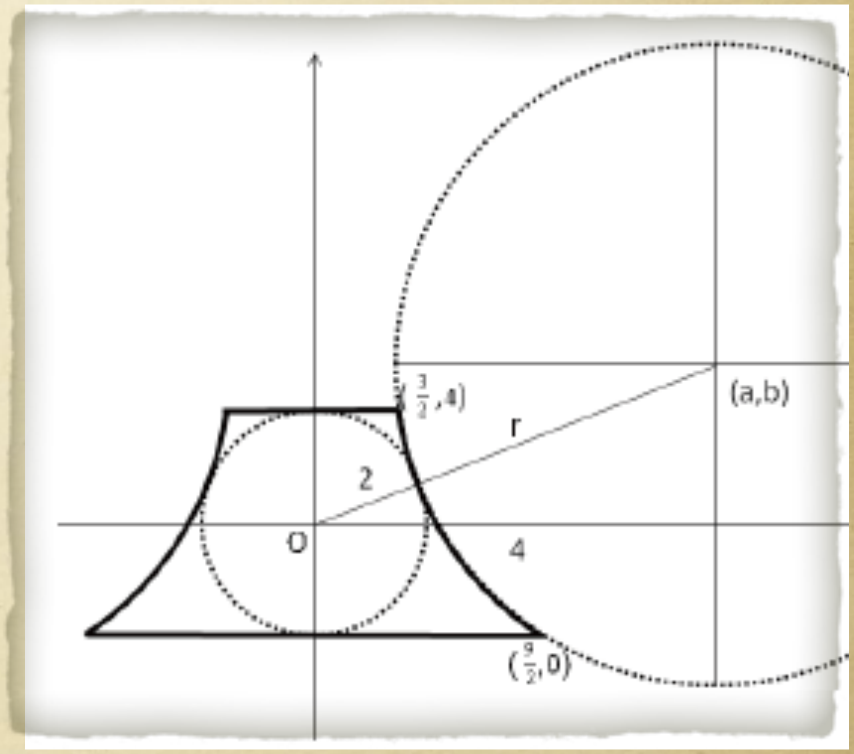
- 大西佐兵衛の門人
- 松山藩家老菅家の要職
- 和算書『容術』30冊を著す
  - 愛媛県立図書館





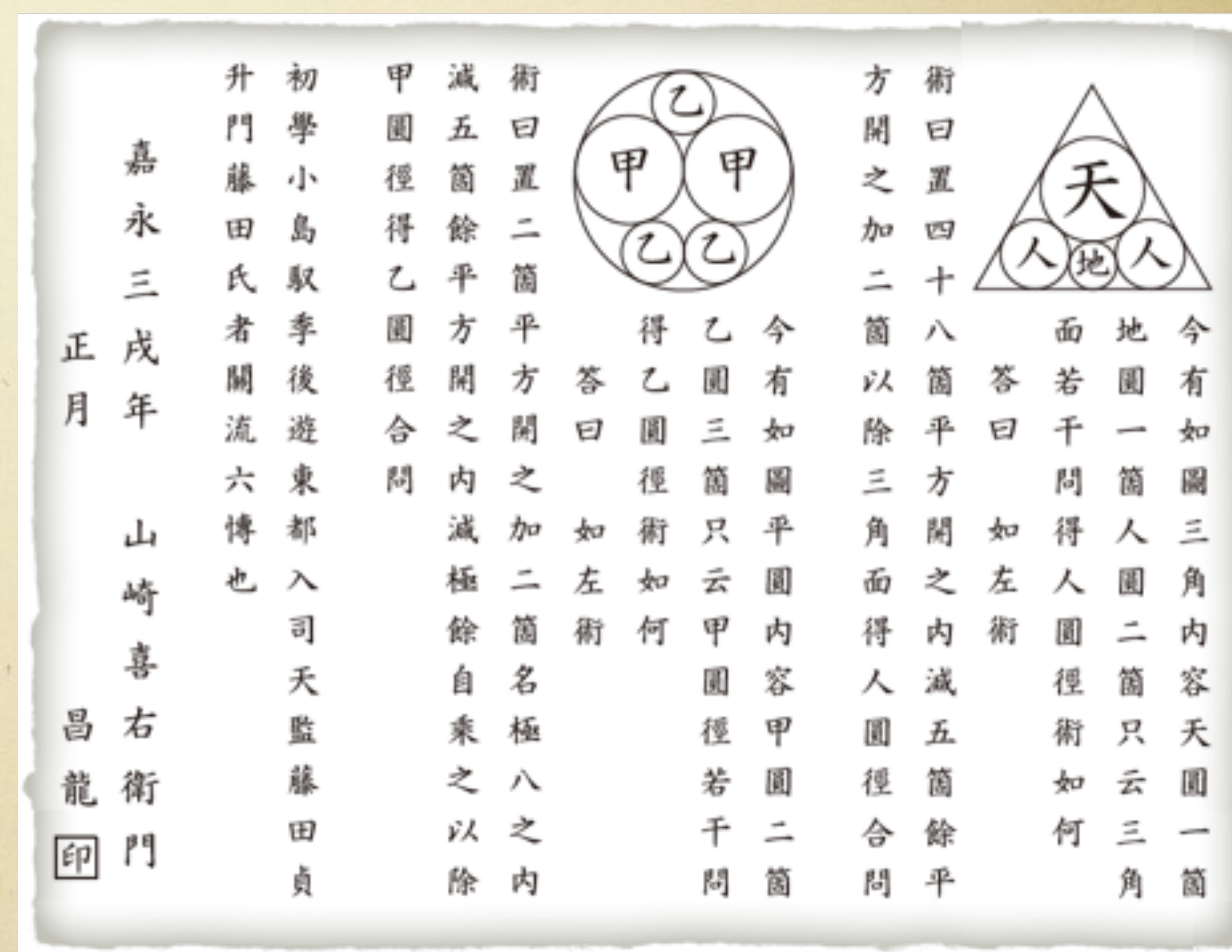
小嶌又兵衛の問題

- 図のように、弧減方台に球を内接させる。方台の上面の1辺の下面の1辺の長さの和が12寸、積が27寸である。球の直径が4寸であるとき、方台から球を除いた体積を求めよ。



山崎喜右衛門の算額

- 1850年奉納



今有如圖三角内容天圓一箇地圓一箇人圓二箇只云三角面若干問得人圓徑術如何

答曰 如左術

術曰置四十八箇平方開之内減五箇餘平方開之加二箇以除三角面得人圓徑合問

今有如圖平圓内容甲圓二箇乙圓三箇只云甲圓徑若干問得乙圓徑術如何

答曰 如左術

術曰置二箇平方開之加二箇名極八之内減五箇餘平方開之内減極餘自乘之以除甲圓徑得乙圓徑合問

初學小島馭季後遊東都入司天監藤田貞升門藤田氏者關流六傳也

嘉永三戌年 山崎喜右衛門

正月 昌龍 印

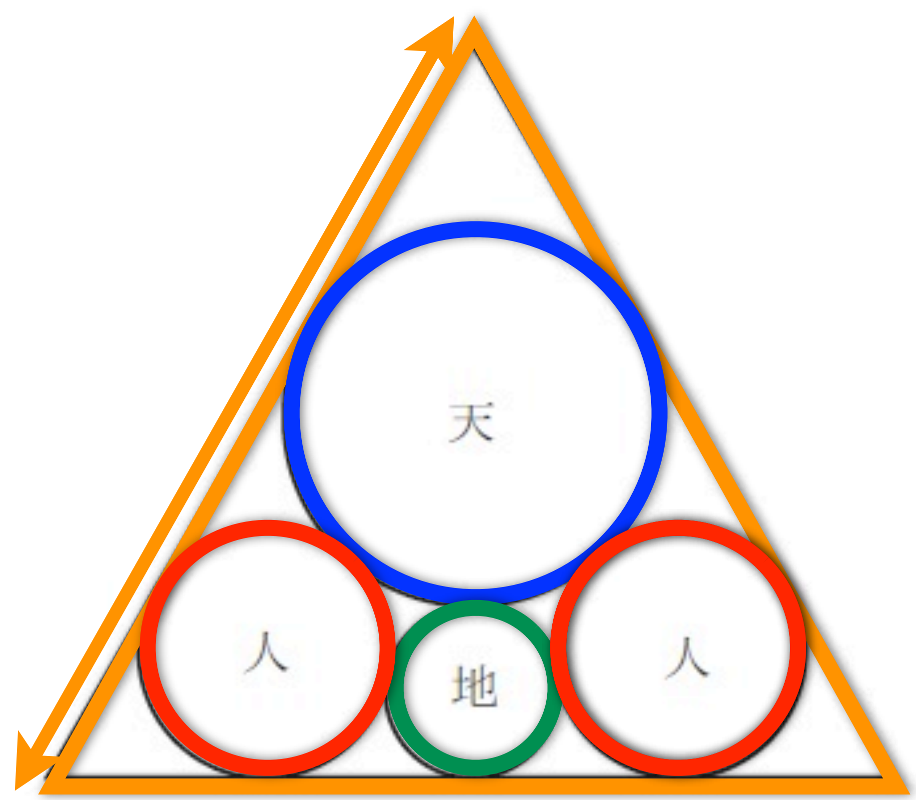
山崎喜右衛門

- 和算は初め小嶌又兵衛に学ぶ
- 江戸に出て、藤田貞升(さだます)に学ぶ
- 1850年に山崎とその弟子6名が算額奉納
- 松山藩校「明教館」の数学教授所の初代主任教授（明治3年)

明教館

山崎喜右衛門の問題

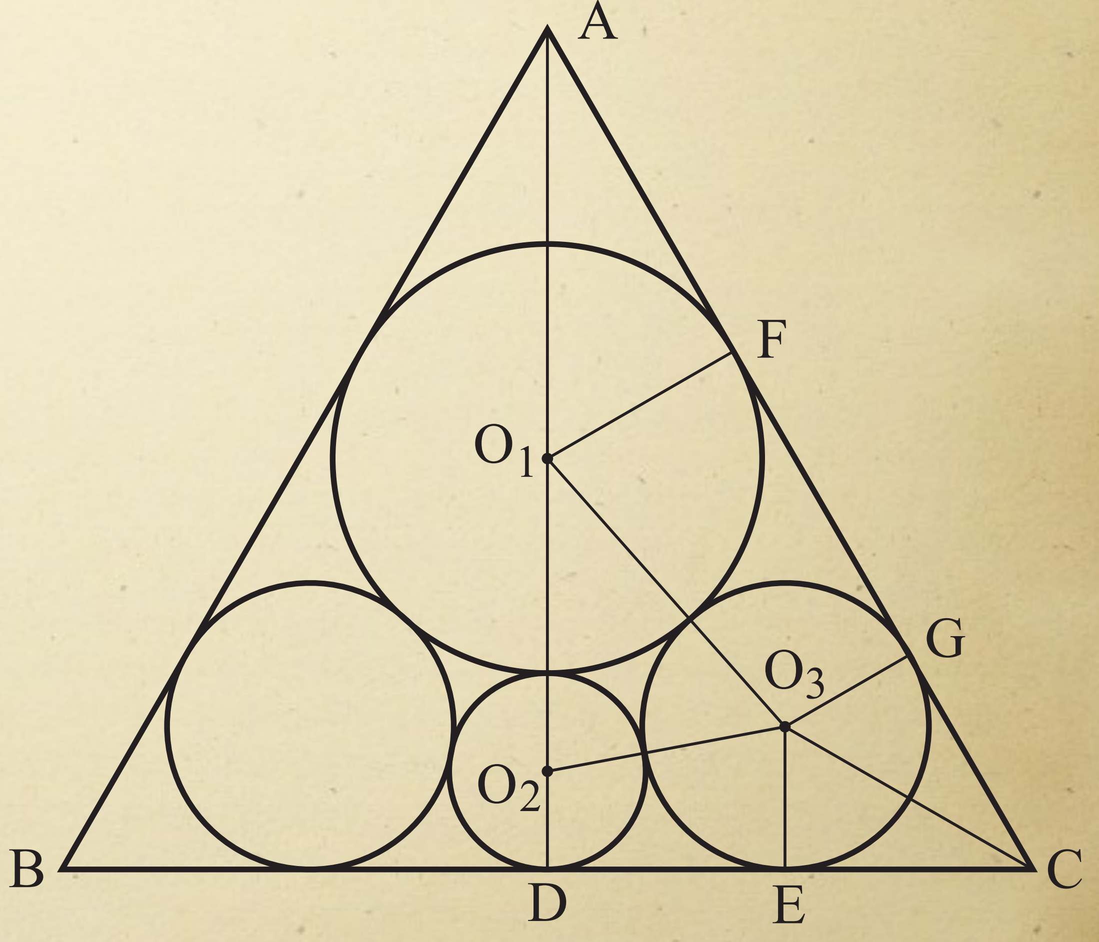
（右）



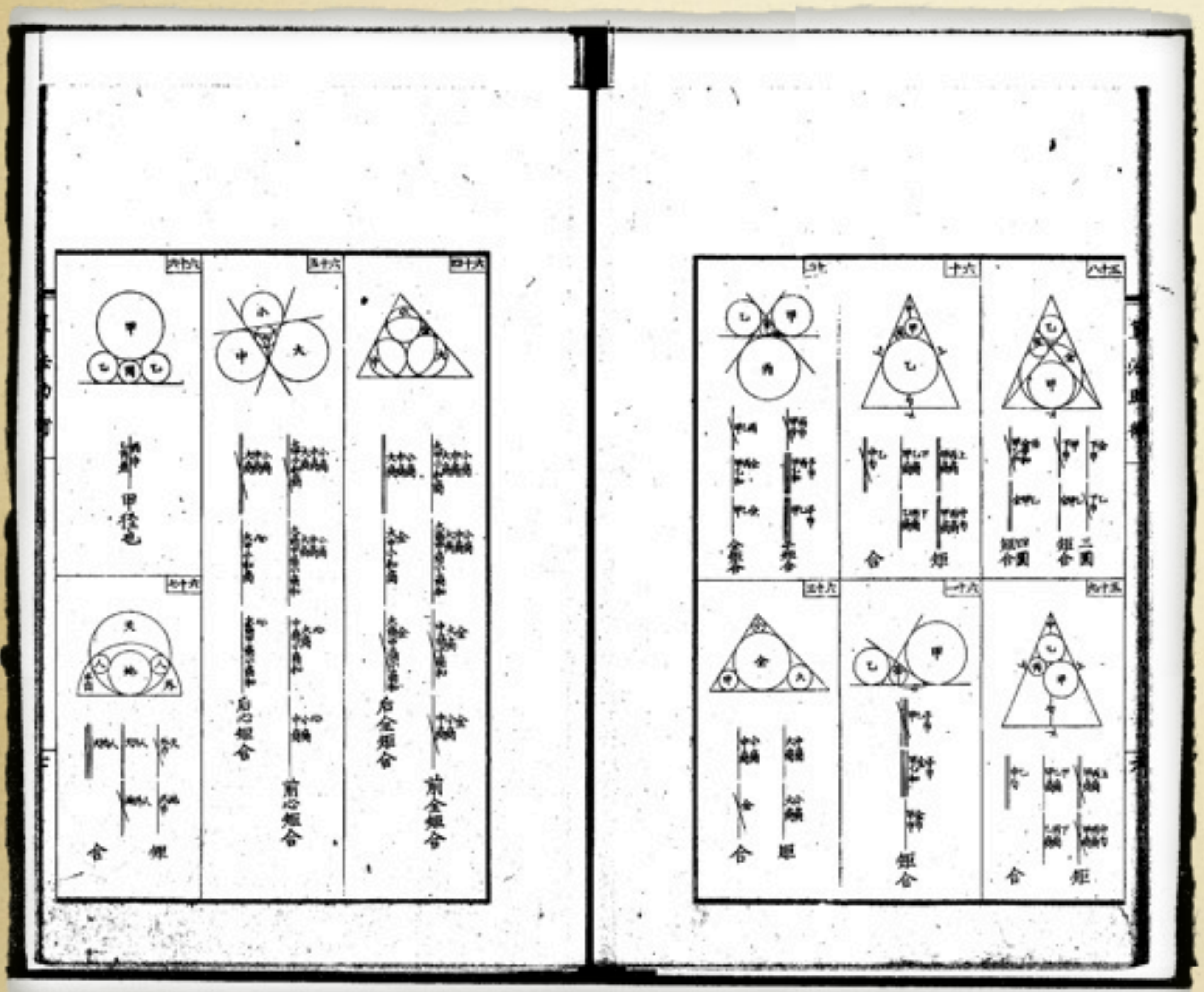
図のように、正三角形内に天円 1 個、地円 1 個、人円 2 個がある。正三角形の 1 辺の長さが与えられたとき、人円の直径を求めよ。

問題を解いてみよう

- 簡単ではない
- 式が立てられない
- 式が足りない
- 計算が複雑すぎる



和算の公式集



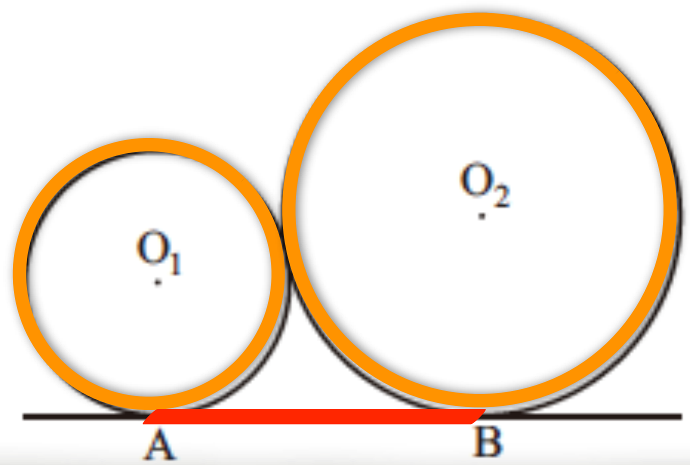
長谷川弘閲／山本賀前編『算法助術』1841年

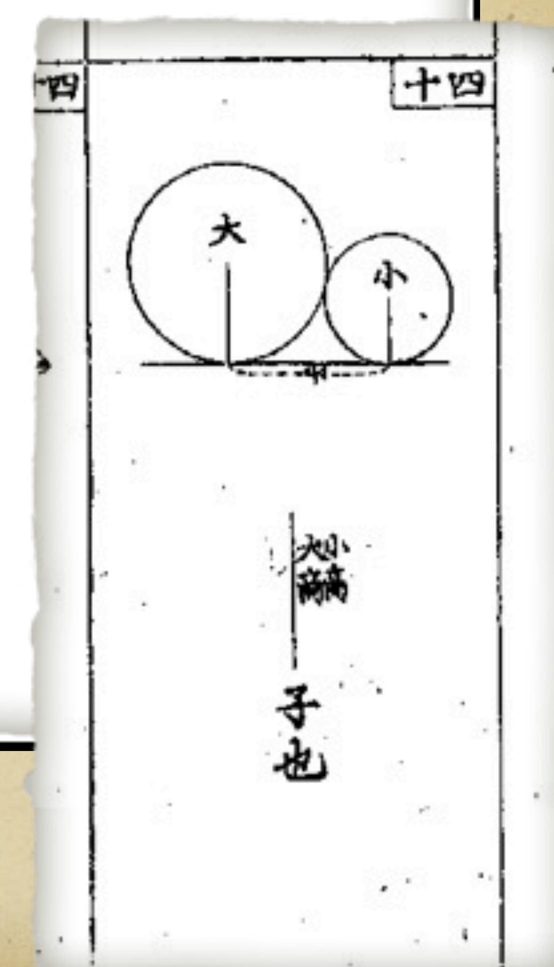
和算公式 1

補助定理 7　2 円 O_1、O_2 は互いに外接し、直線 l に 2 点 A、B で接している。円 O_1、O_2 の半径をそれぞれ r_1、r_2 とするとき、

$$AB = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

である。

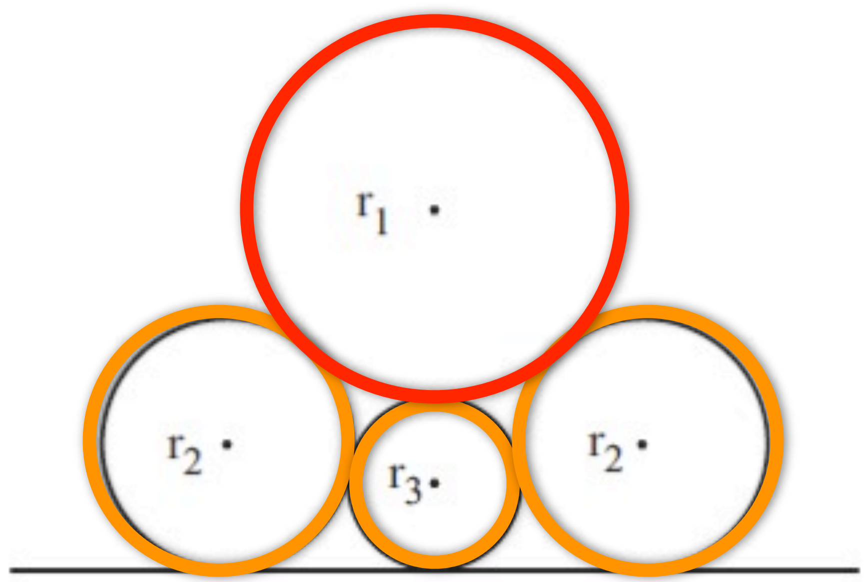


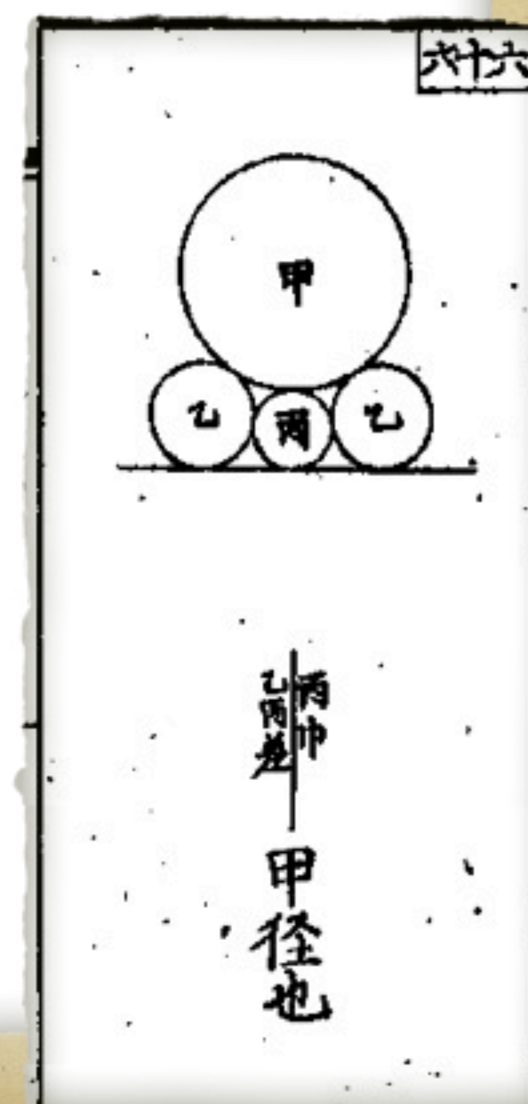


和算公式 2

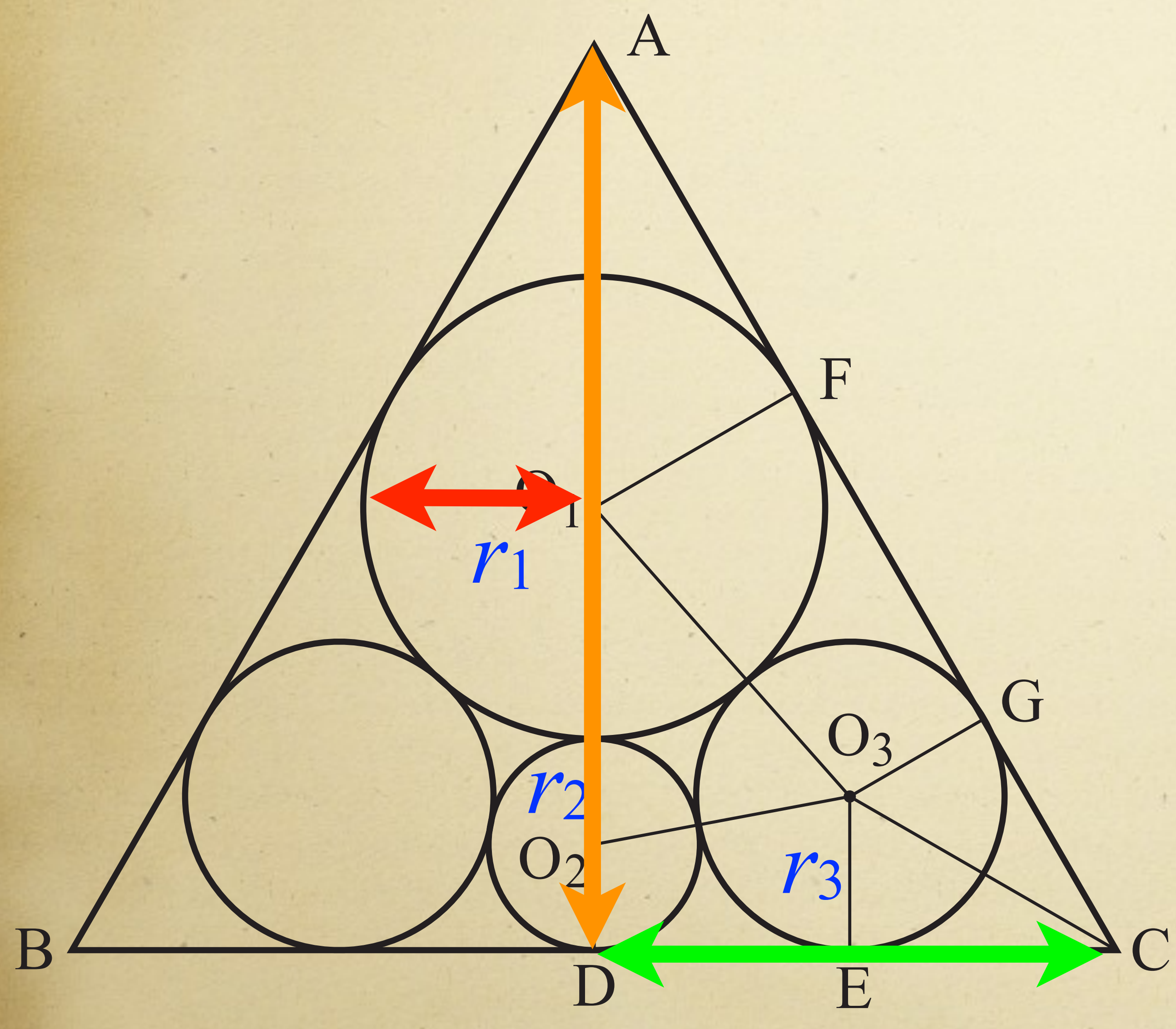
補助定理 11　直線上に半径が r_2, r_3, r_2 の連結する 3 個の円が載っている。これら 3 円に外接する円の半径 r_1 は次式で与えられる。

$$r_1 = \frac{r_3^2}{r_2 - r_3}$$





立式



$$AD = 3r_1 + 2r_2$$

$$DC = 2\sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{3}r_3$$

$$AD : DC = \sqrt{3} : 1$$

$$r1 = \frac{r_2^2}{r_3 - r_2}$$

4次方程式

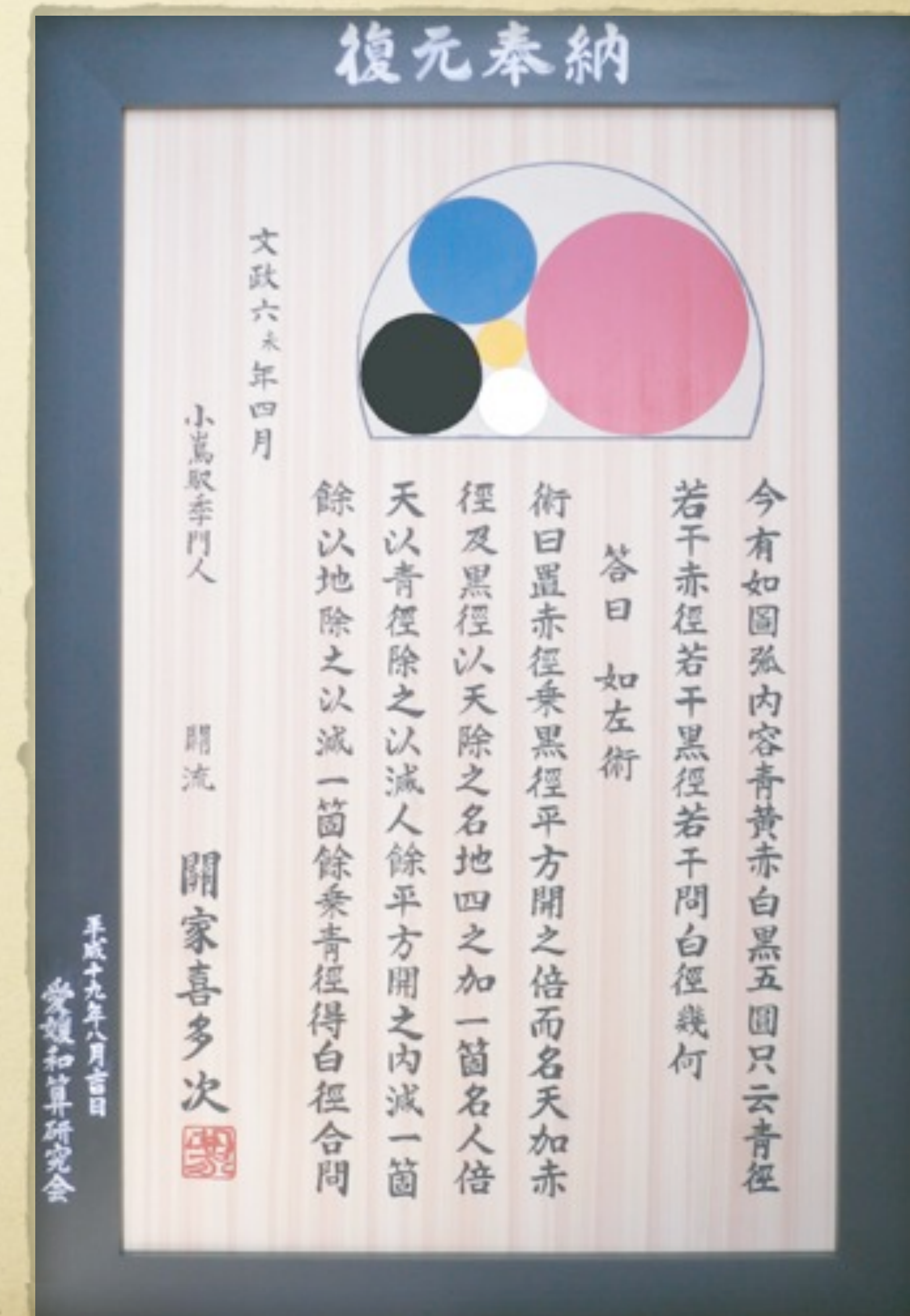
$$t^4+2t^2-32\sqrt{3}t+33=0$$

$$t^4+2t^2-32\sqrt{3}t+33=(t^2+4t+9+4\sqrt{3})(t^2-4t+9-4\sqrt{3})$$

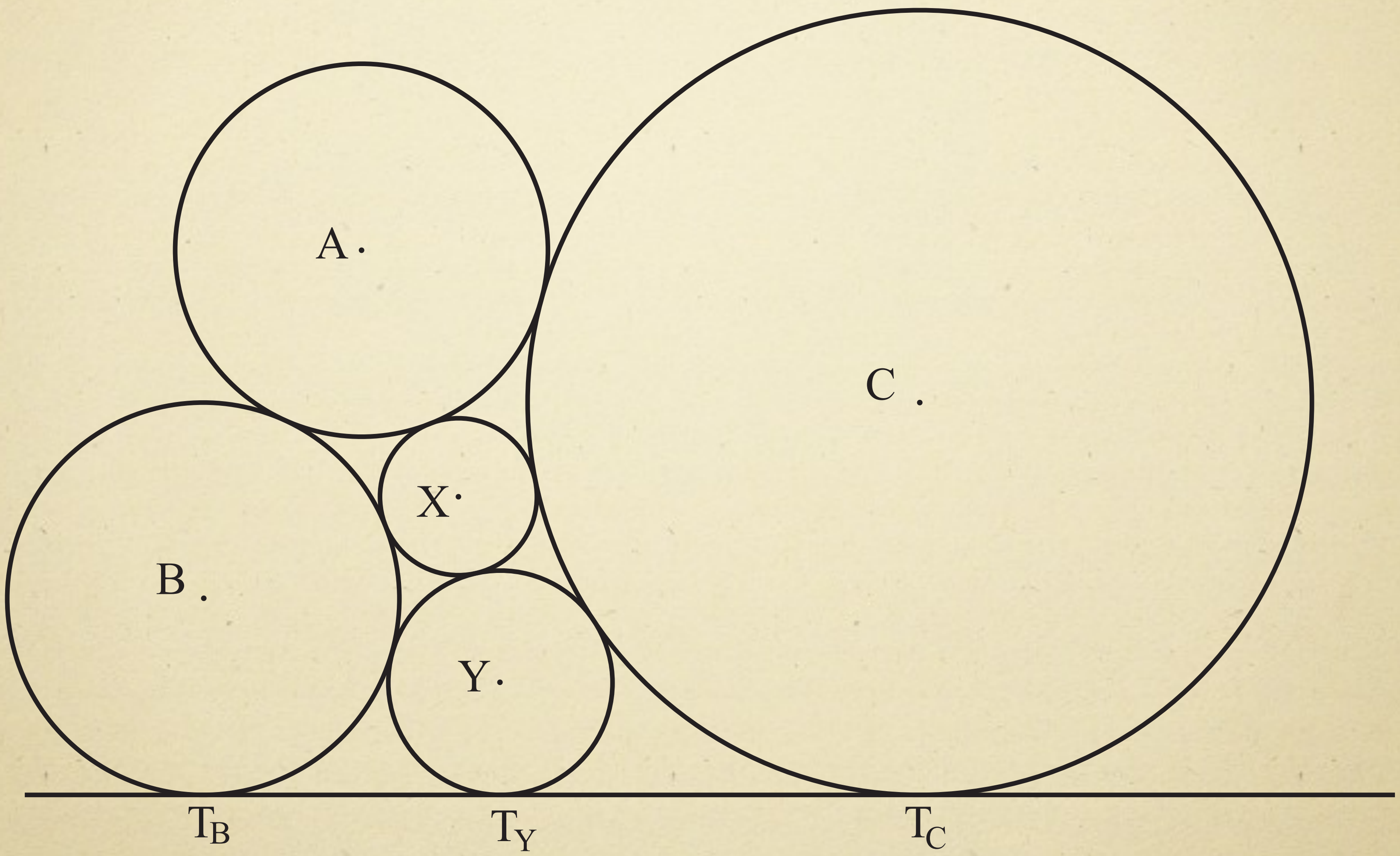
$$t=2+\sqrt{4\sqrt{3}-5}$$

関家喜多次の算額

- 1823年奉納
- 図のように、円弧内に青、黄、赤、白、黒の5個の円がある。青。赤、黒の3個の円の直径が与えられたとき、白円の直径を求めよ。



問題としては



これだけで充分

デカルトの円定理

補助定理 9　半径が a, b, c の互いに外接する 3 個の円がある。これら 3 円を含むように内接する円の半径を R、これら 3 円が囲むすき間にあり 3 円と外接する円の半径を r とする。このとき、

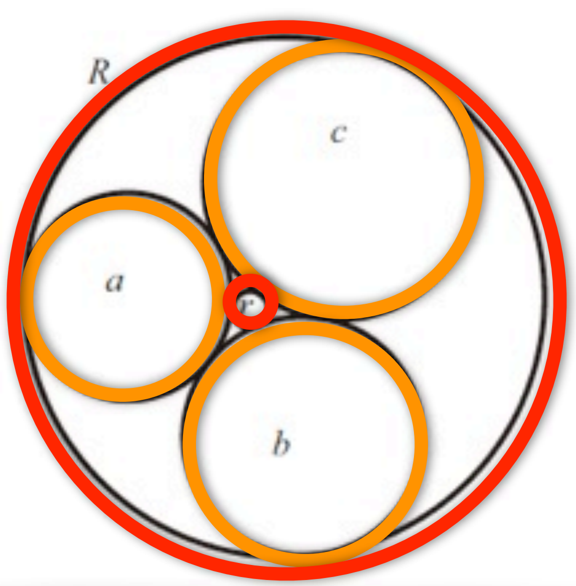
(1) $$\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-2abc(a+b+c)\right)R^2+2abc(ab+bc+ca)R+a^2b^2c^2=0$$

(2) $$\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-2abc(a+b+c)\right)r^2-2abc(ab+bc+ca)r+a^2b^2c^2=0$$

(3) $$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{R}\right)^2=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{R^2}\right)$$

(4) $$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{r}\right)^2=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

である。



傍斜術

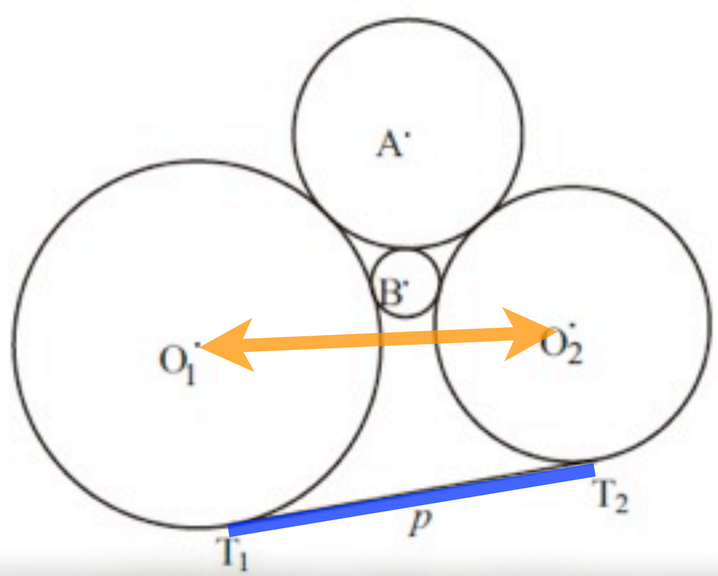
補助定理 12 (傍斜術)　図のように、2 円 A と B が外接し、その 2 円にさらに円 O_1 と円 O_2 が外接している。円 O_1 と円 O_2 の共通外接線 T_1T_2 の長さを p、4 円の O_1, O_2, A, B の半径をそれぞれ r_1, r_2, a, b とするとき、

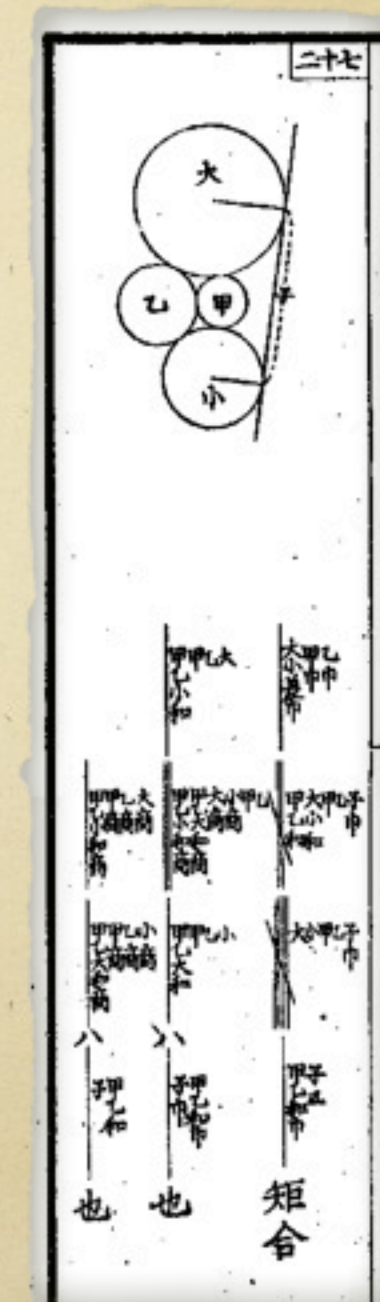
(1)　$(a+b)^2p^4 - 16abr_1r_2p^2 - 8ab(a+b)(r_1+r_2)p^2 + 16a^2b^2(r_1-r_2)^2 = 0$

(2)　$(a+b)^2p^2 = 4(a+b+r_2)abr_1 + 8ab\sqrt{(a+b+r_1)(a+b+r_2)r_1r_2} + 4(a+b+r_1)abr_2$

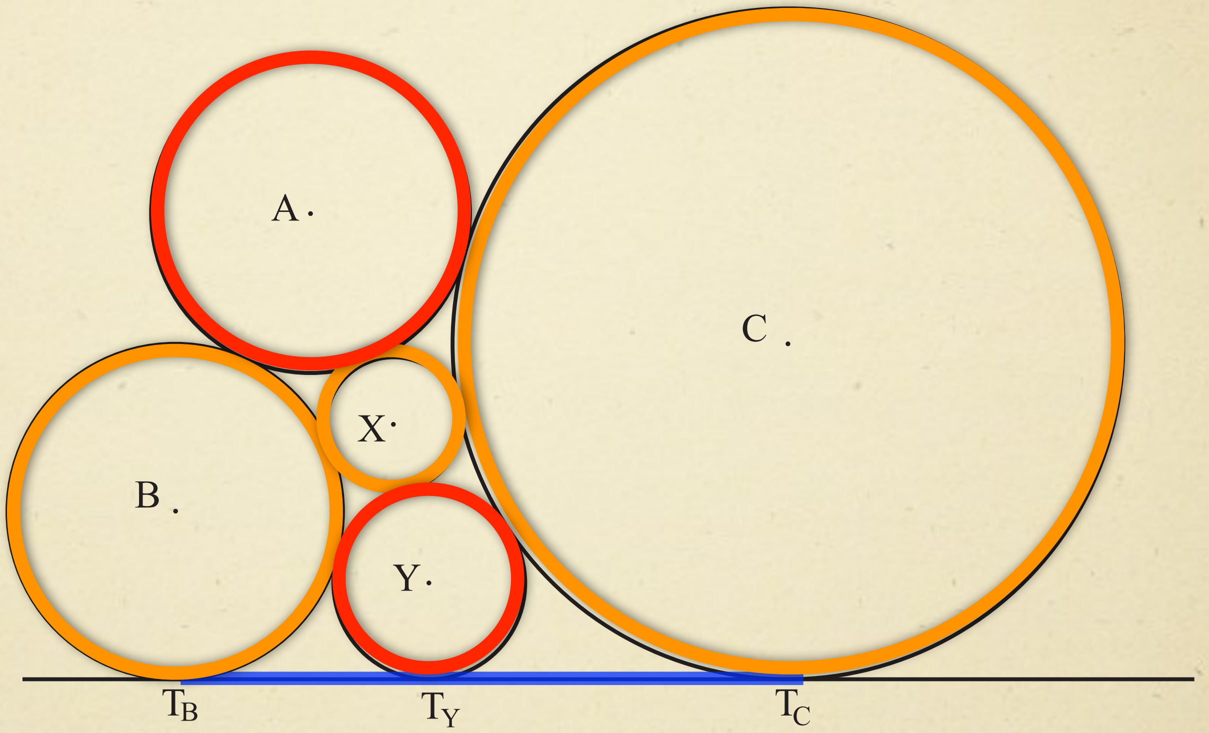
(3)　$(a+b)p = 2\sqrt{(a+b+r_2)abr_1} + 2\sqrt{(a+b+r_1)abr_2}$

が成り立つ。





立式



$$(a+x)^2p^4 - 16abcxp^2 - 8ax(a+x)(b+c)p^2 + 16a^2x^2(b-c)^2 \tag{18.1}$$

$$(x+y)^2p^4 - 16bcxyp^2 - 8xy(x+y)(b+c)p^2 + 16x^2y^2(b-c)^2 \tag{18.2}$$

$$p^2 = 4y(b + 2\sqrt{bc} + c) \tag{18.3}$$

整理して

白円の半径 y に関する3次方程式

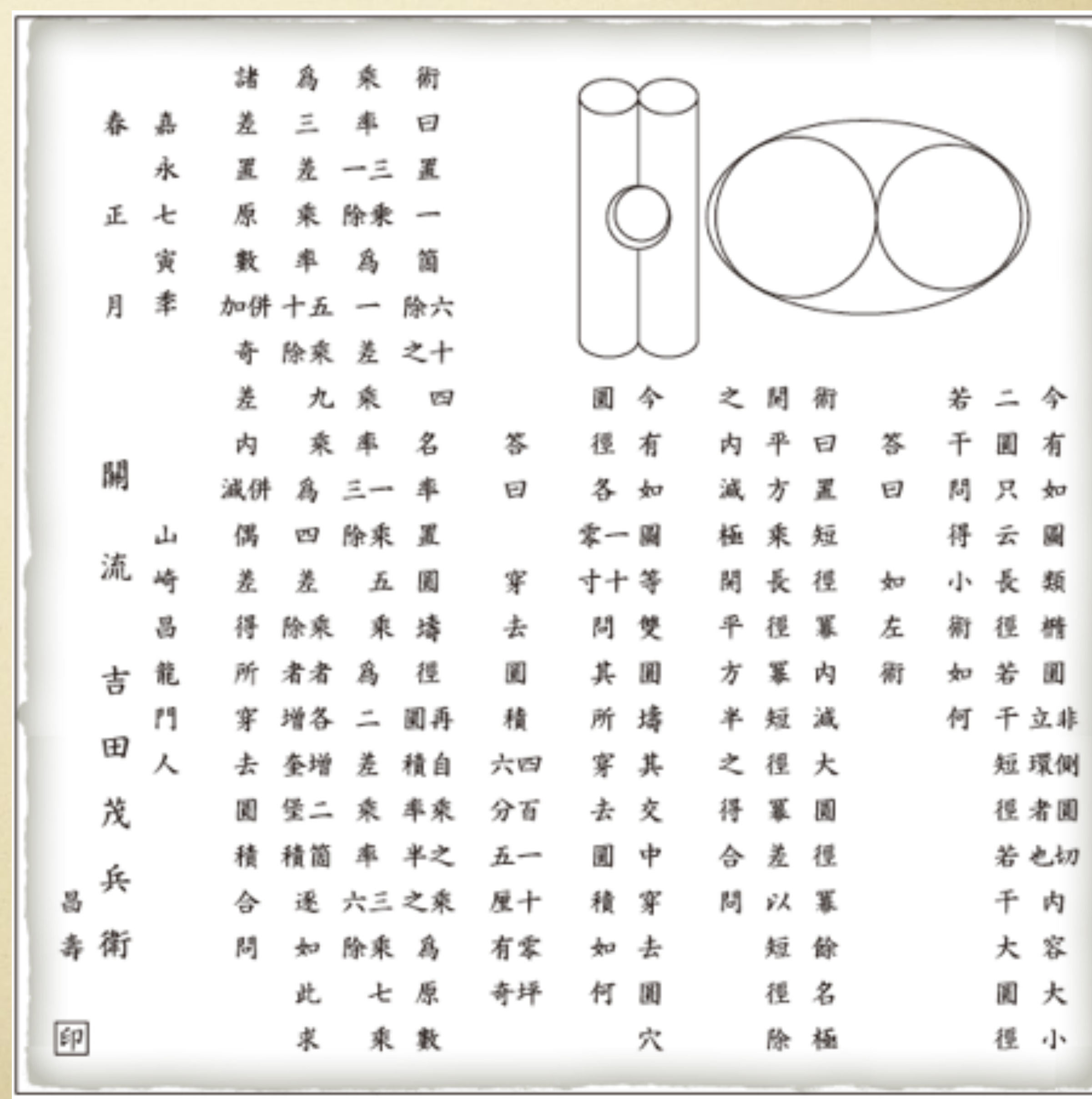
$$(s+t)^4y^3 - a(s+t)^2(s^2+6st+t^2)y^2 + 8as^2t^2(s^2+4st+t^2)y - 16as^4t^4 = 0 \qquad (18.9)$$

これを解けば白円が決まる

ただ、きれいな式には表せそうにない

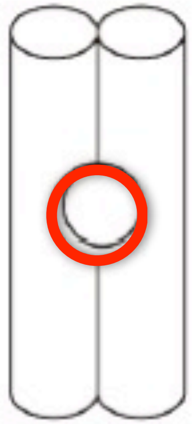
吉田茂兵衛の算額

- 1854年奉納



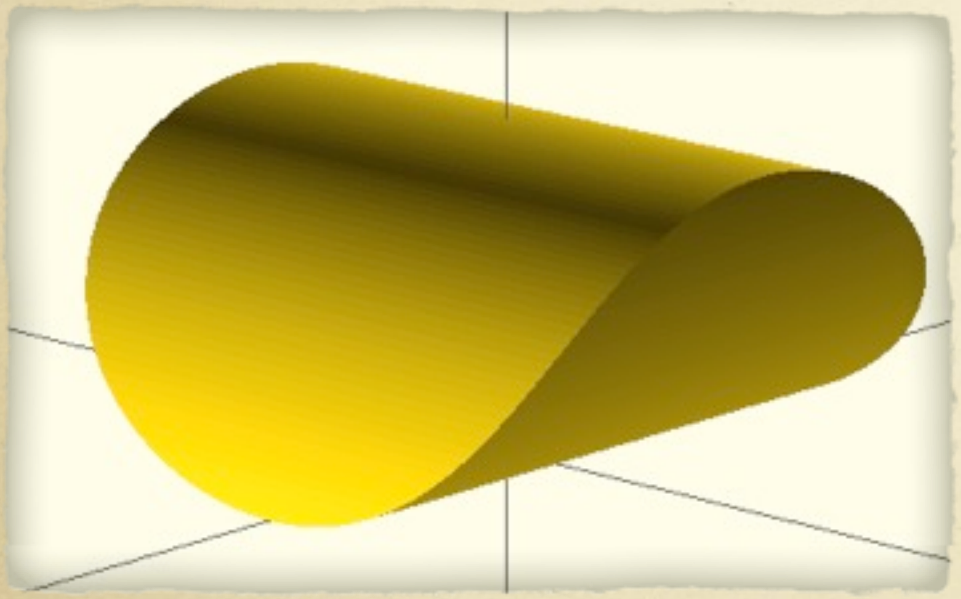
左の問題

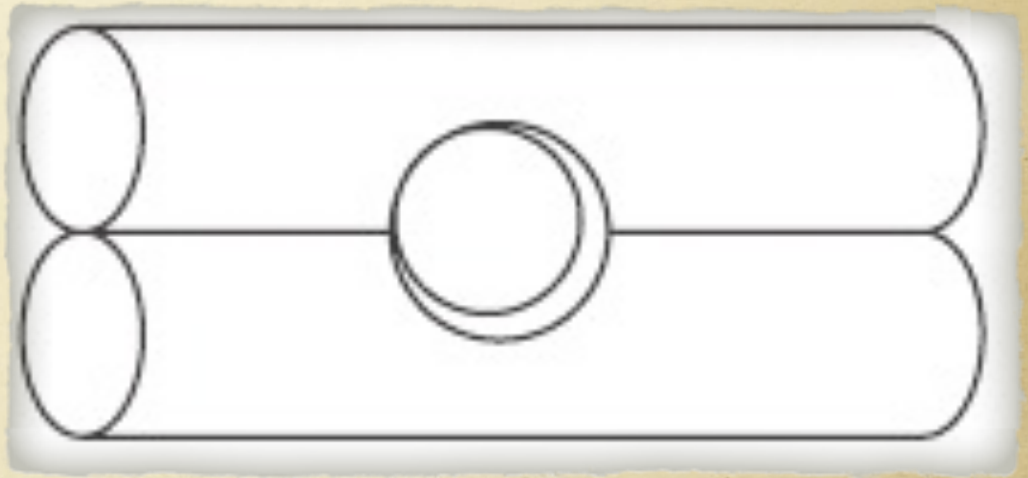
(左)



図のように、直径が等しい 2 つの円柱を並べ、同じ直径を持つ円柱を直行させて貫通させて抜き取る。円の直径の長さが 10 寸のとき、抜き取った立体の体積を求めよ。

体積の計算



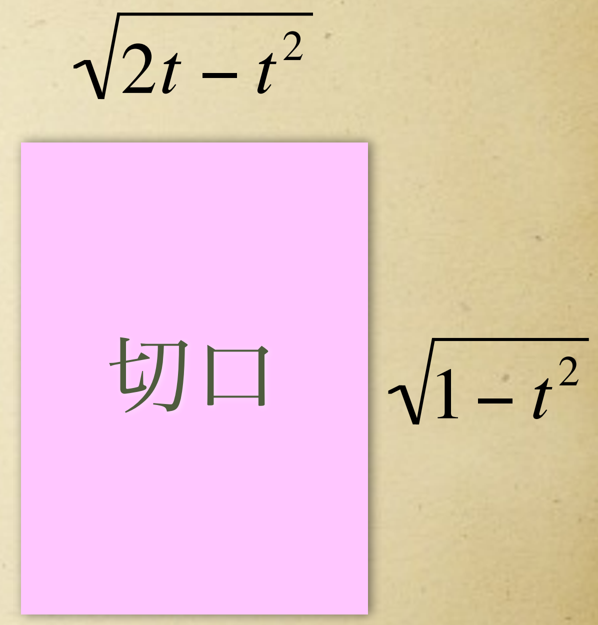


同じものが2個

平面で切った切口

$$S(t) = \sqrt{2t - t^2}\sqrt{1 - t^2}$$

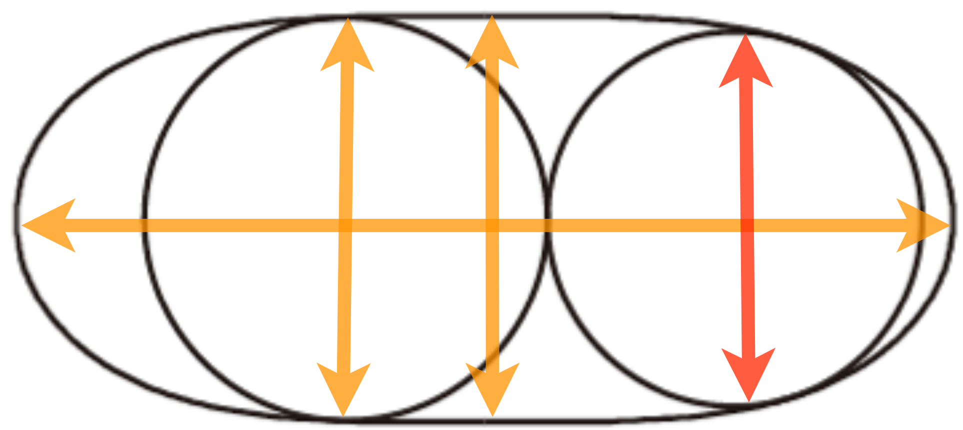
$$= \sqrt{2t - t^2}\left(1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} - \frac{t^6}{10} - \frac{5t^8}{128}\cdots\right)$$



$$V = \int_0^1 S(t)dt = V_0 - V_2 - V_4 - V_6 - V_8 \cdots$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{5\pi}{32} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{21\pi}{256} - \frac{7}{30}\right) - \left(\frac{429\pi}{4096} - \frac{269}{840}\right) - \left(\frac{12155\pi}{65536} - \frac{583}{1008}\right)\cdots$$

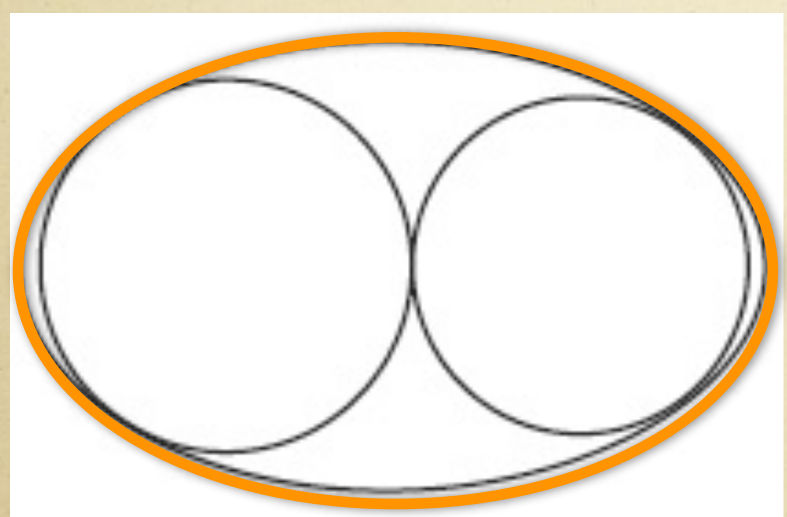
右の問題



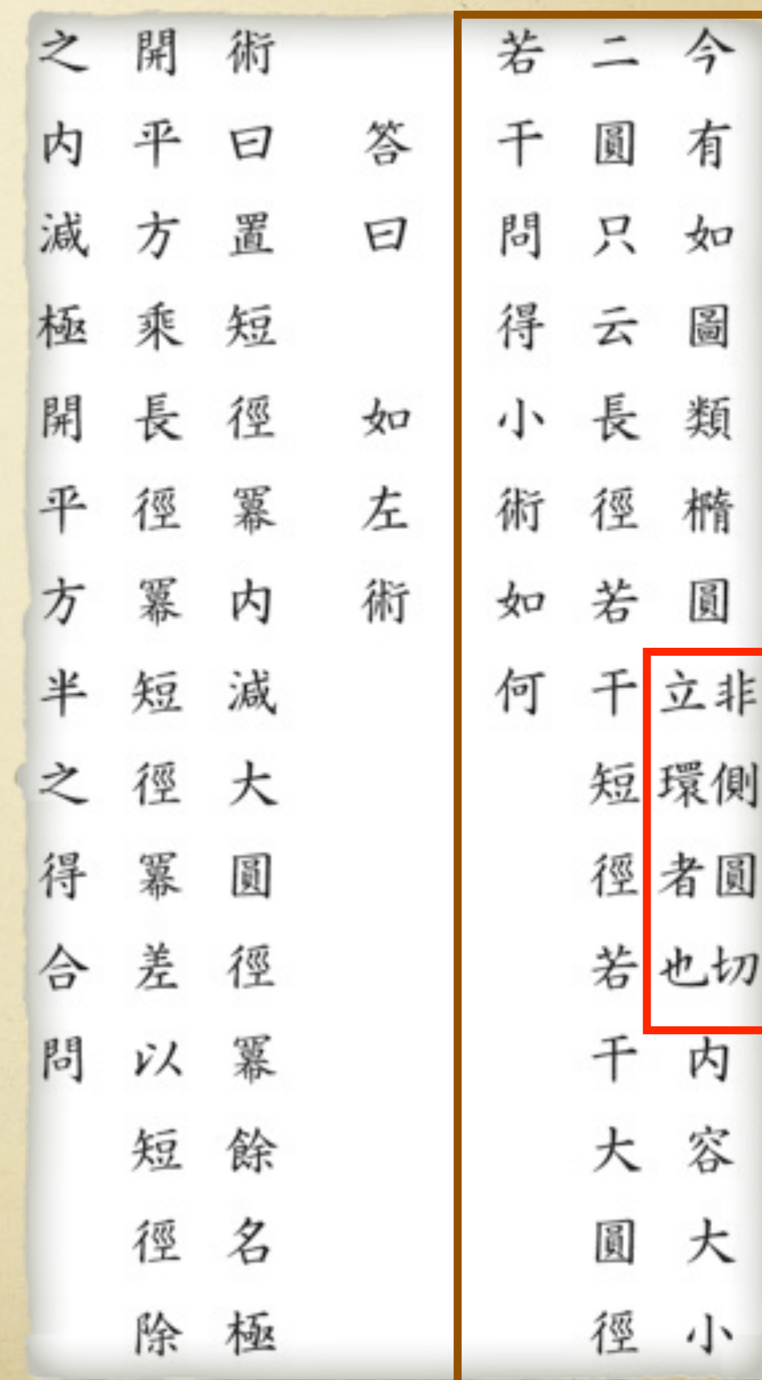
図のように、類楕円内に大小２個の円がある。類楕円の長径、短径、大円の直径の長さが与えられたとき、小円の直径の長さを求めよ。

類楕円とは

側円(楕円)ではなく立環(トーラス)を切ったもの



トーラスの切口



今有如圖類楕圓非側圓切立環者也内容大小
二圓只云長徑若干短徑若干大圓徑
若干問得小術如何

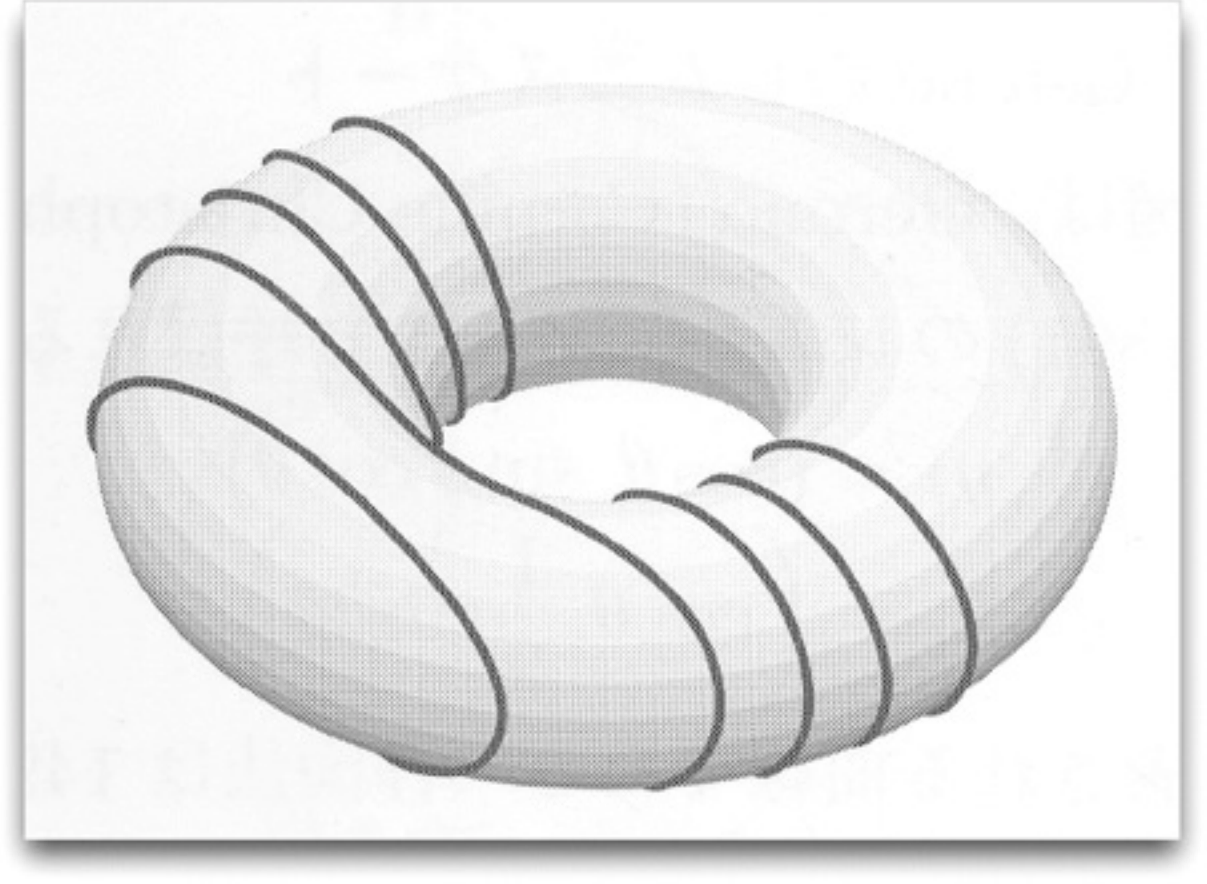
答曰

如左術

術曰置短徑冪内減大圓徑冪餘名極
開平方乘長徑冪短徑冪差以短徑除
之内減極開平方半之得合問

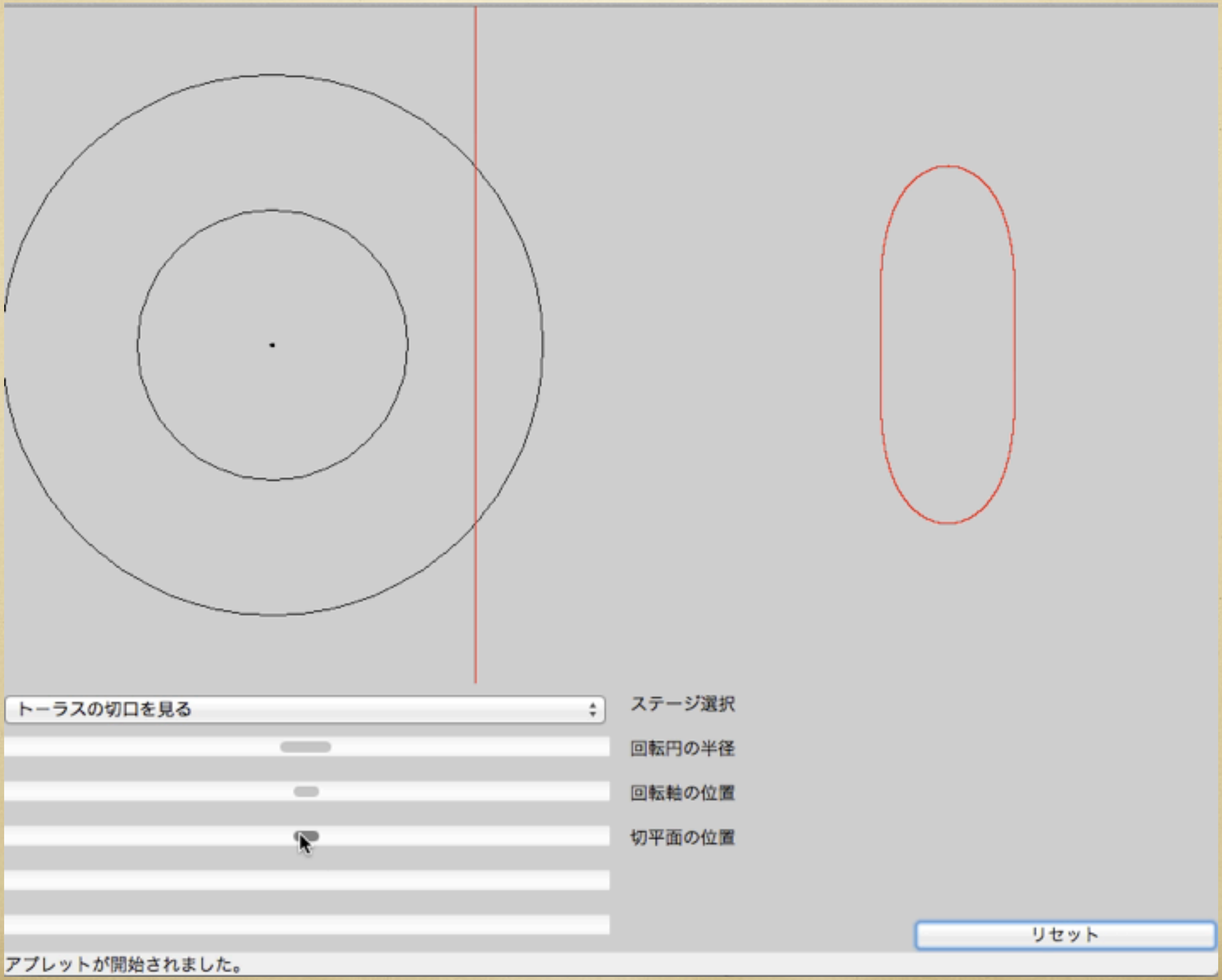
カッシーニの卵形線

類楕円 = カッシーニの卵形線



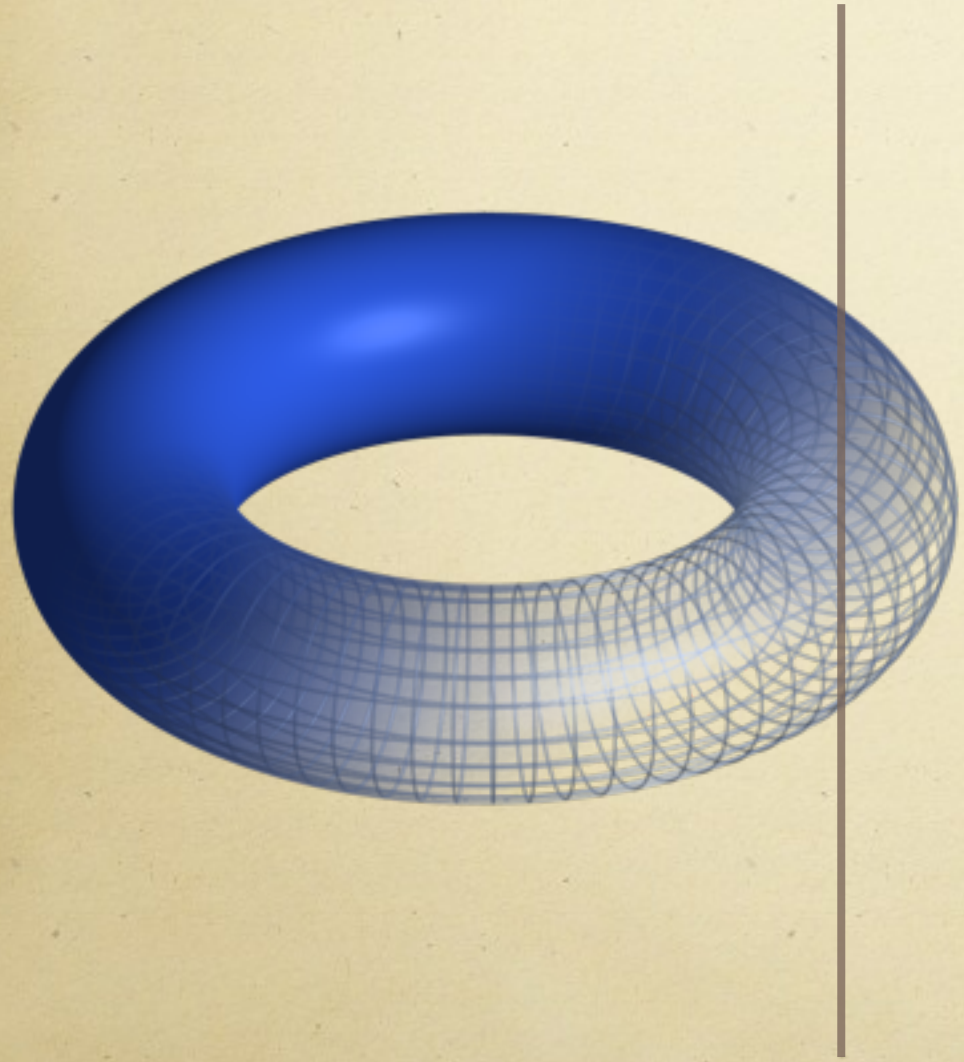
磯田 他『曲線の事典』

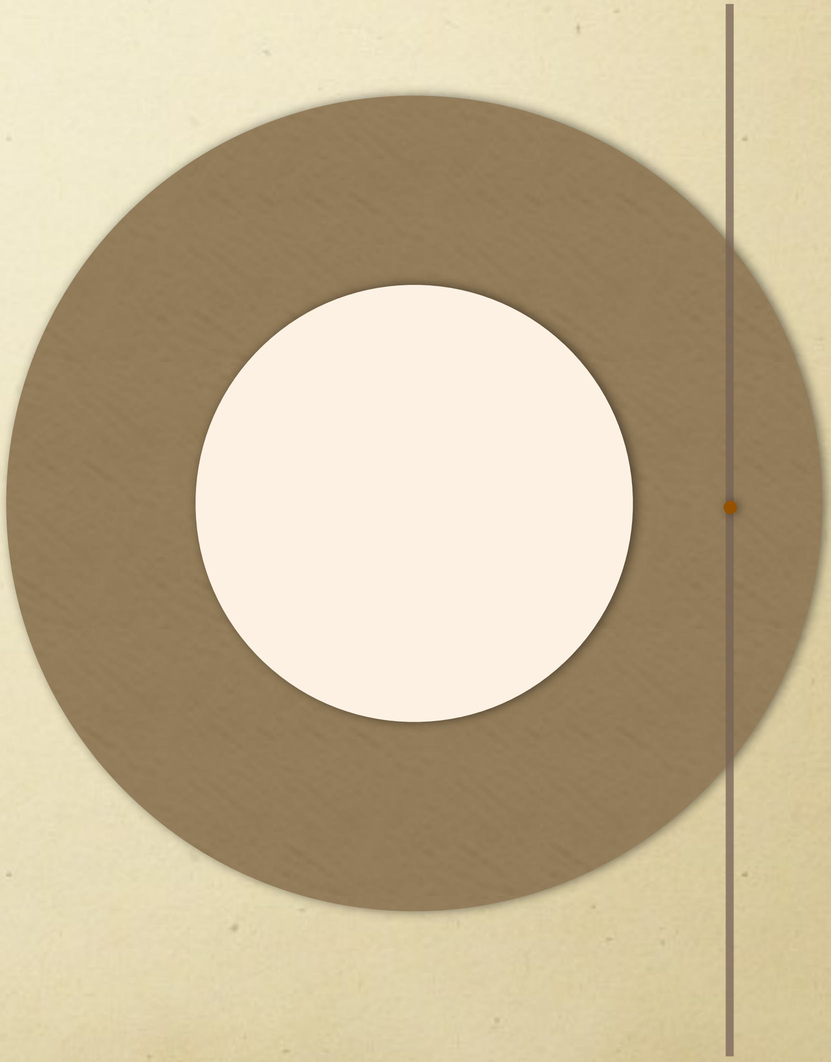
類楕円　?



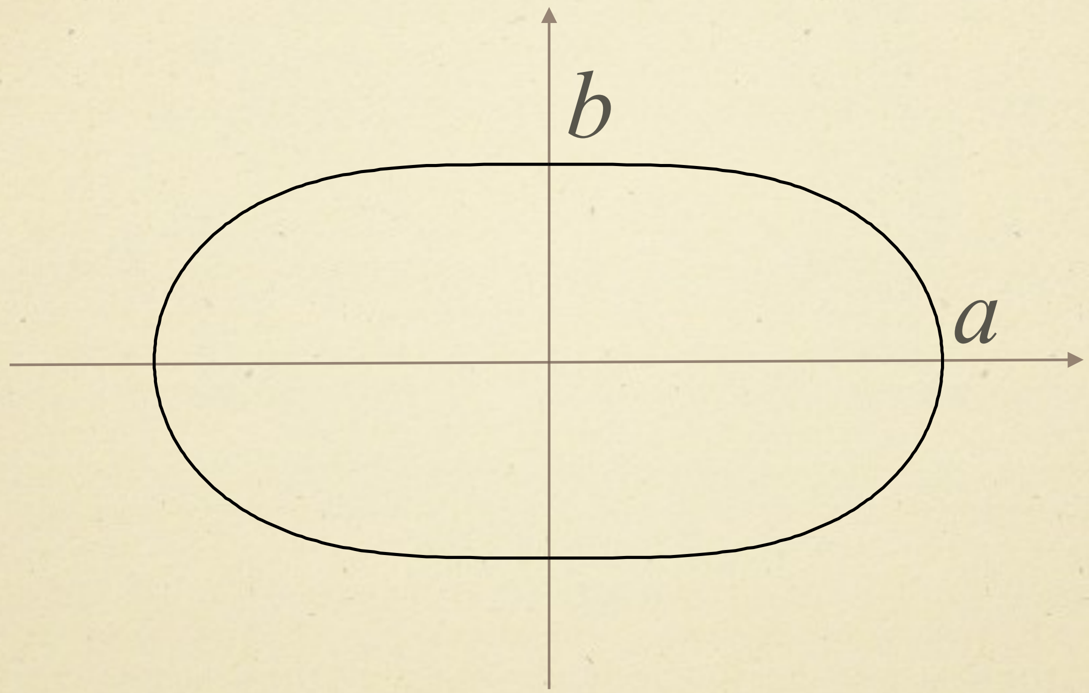
トーラスの切口を見る
ステージ選択
回転円の半径
回転軸の位置
切平面の位置
リセット
アプレットが開始されました。

類楕円とは





類楕円の方程式



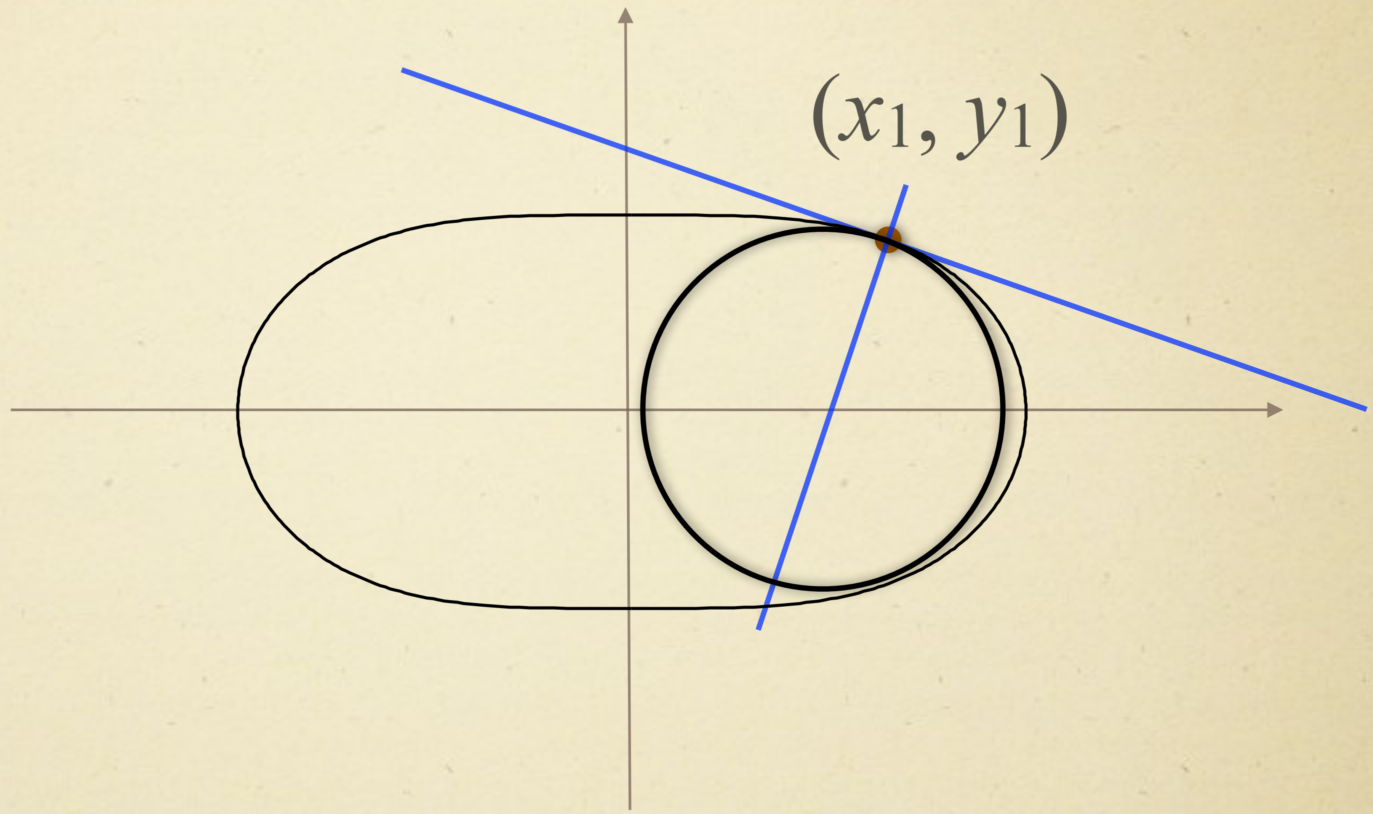
$$b^2(x^2+y^2-b^2)^2+(a^2-b^2)^2(y^2-b^2)=0$$

4次方程式

内接円を計算

曲線:

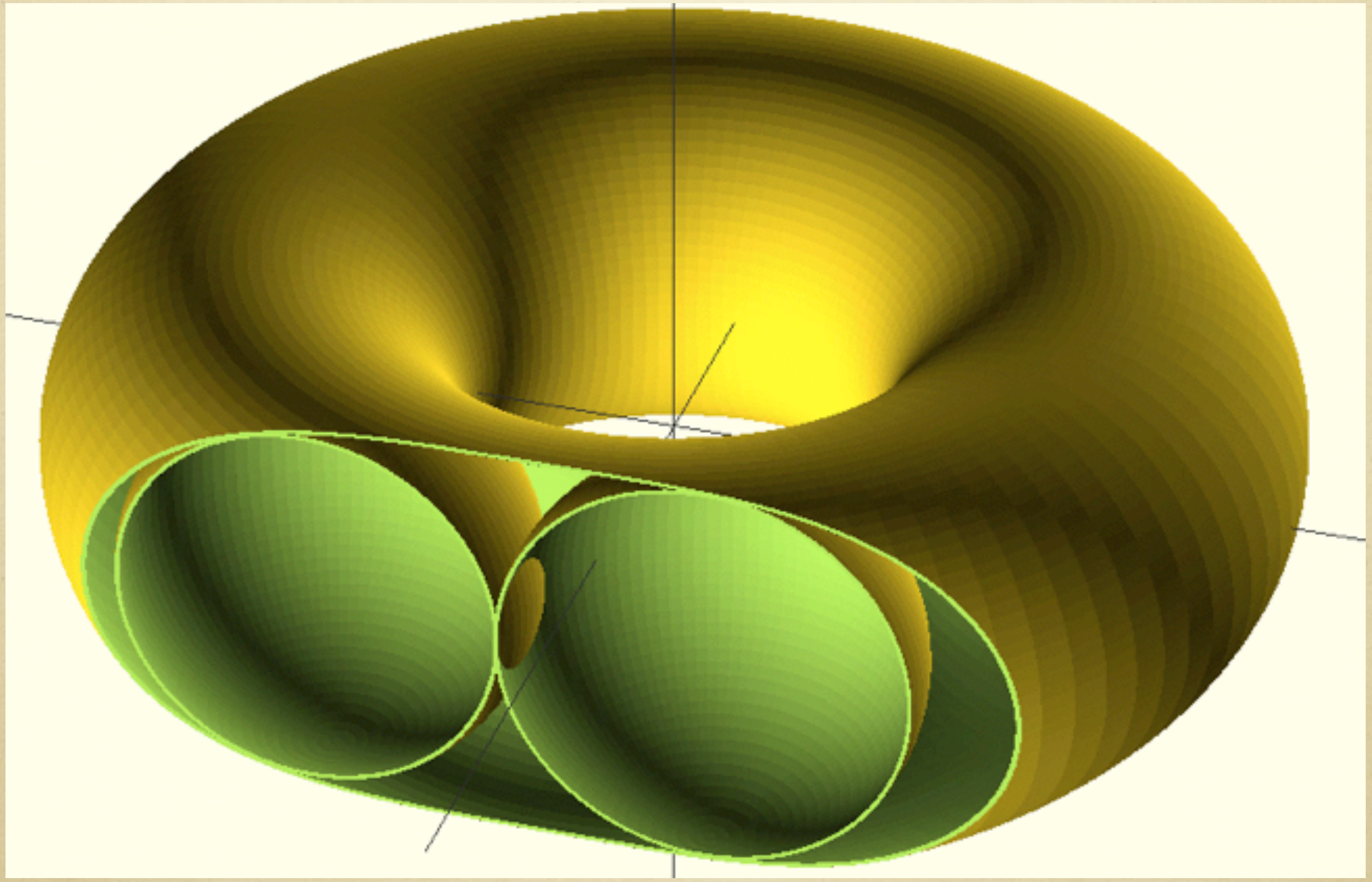
$F(x,y)=0$



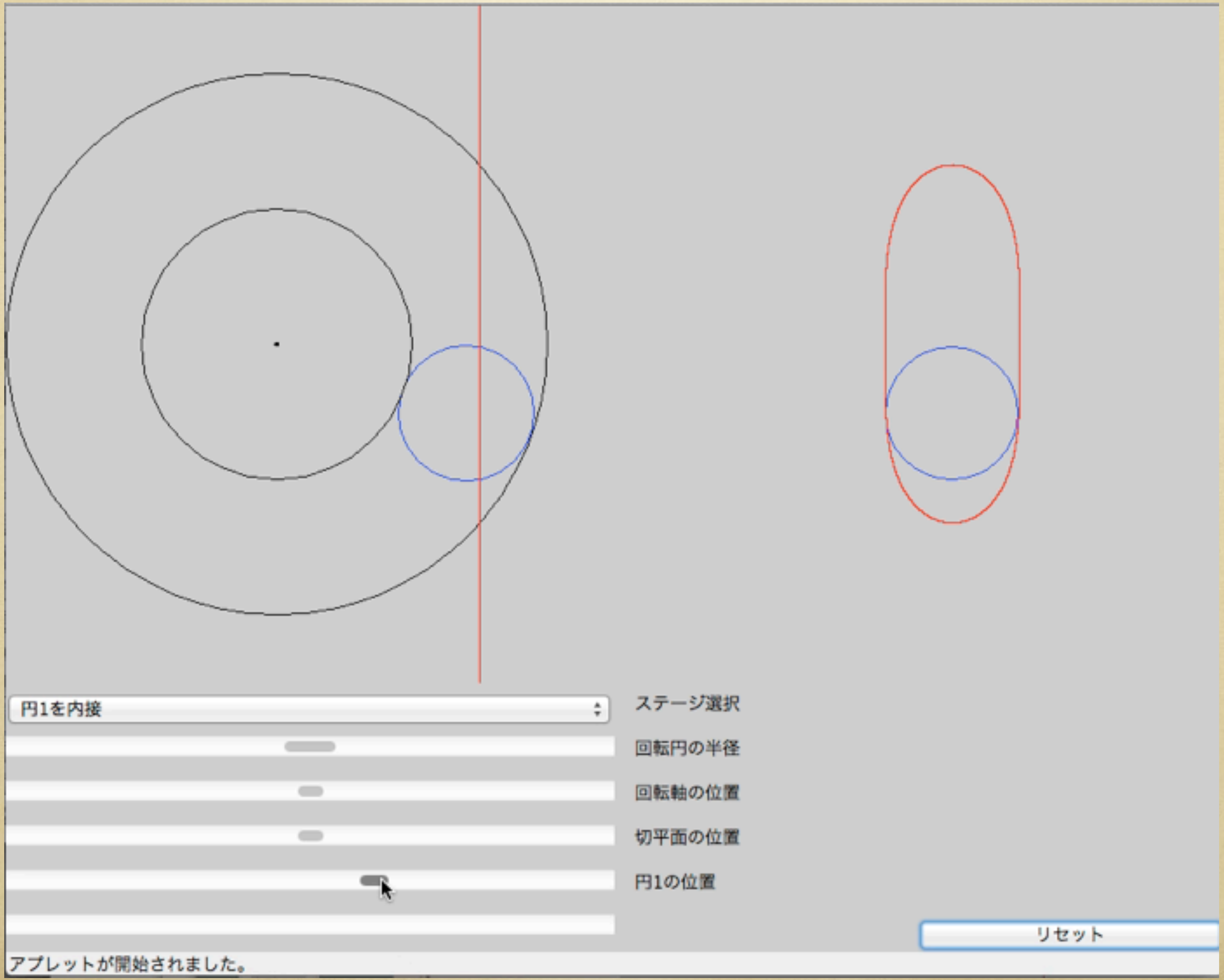
接線: $$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1)(x-x_1)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1)(y-y_1)=0$$

法線: $$\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1)(x-x_1)-\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1)(y-y_1)=0$$

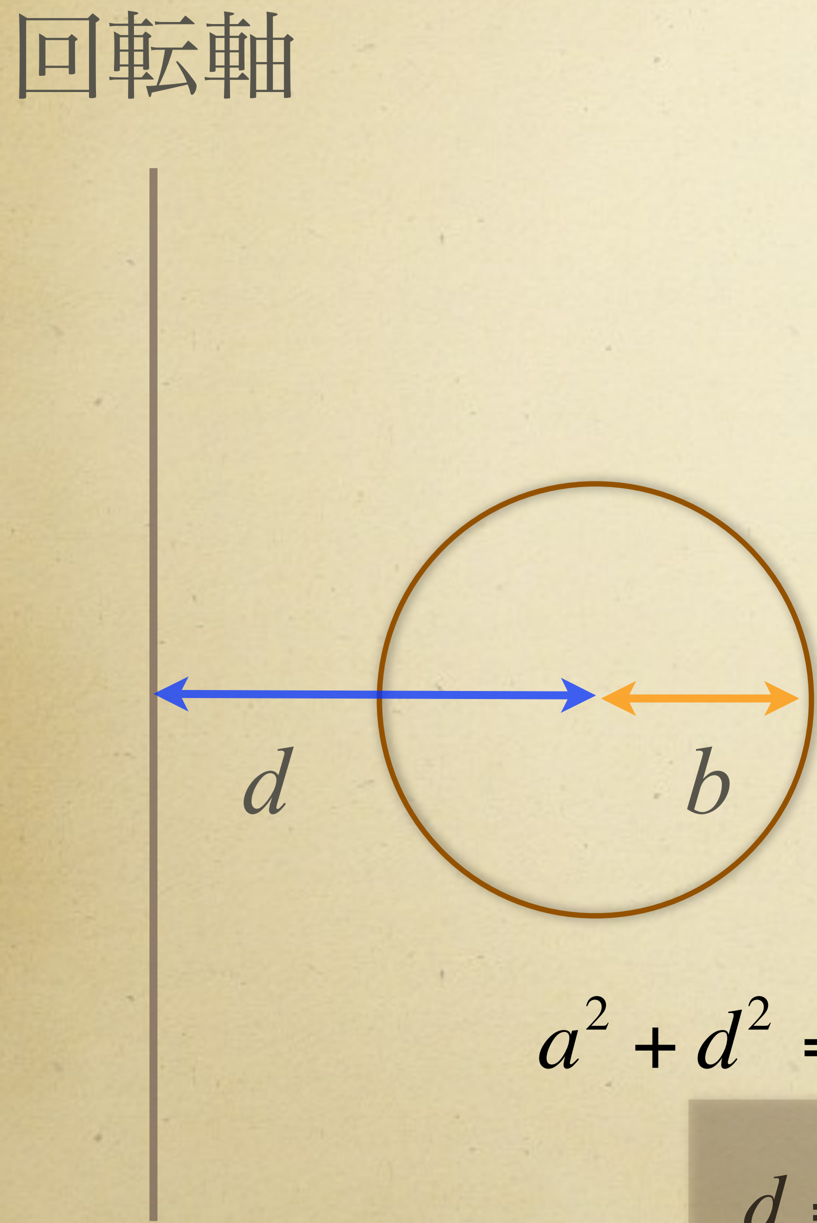
和算でこんなことをしているとは思えない!!

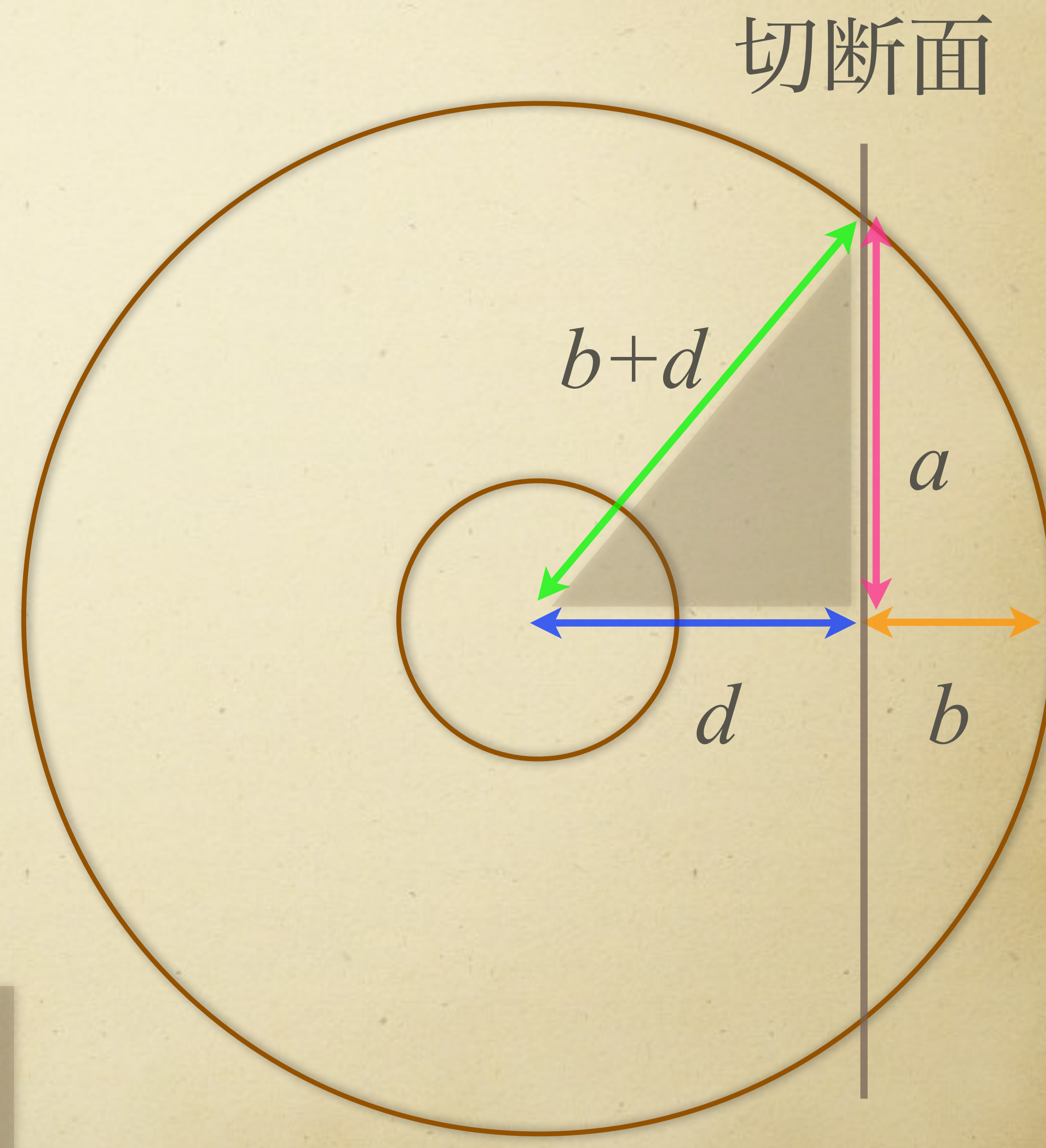


トーラスと内接球の切断面



類楕円の長短軸

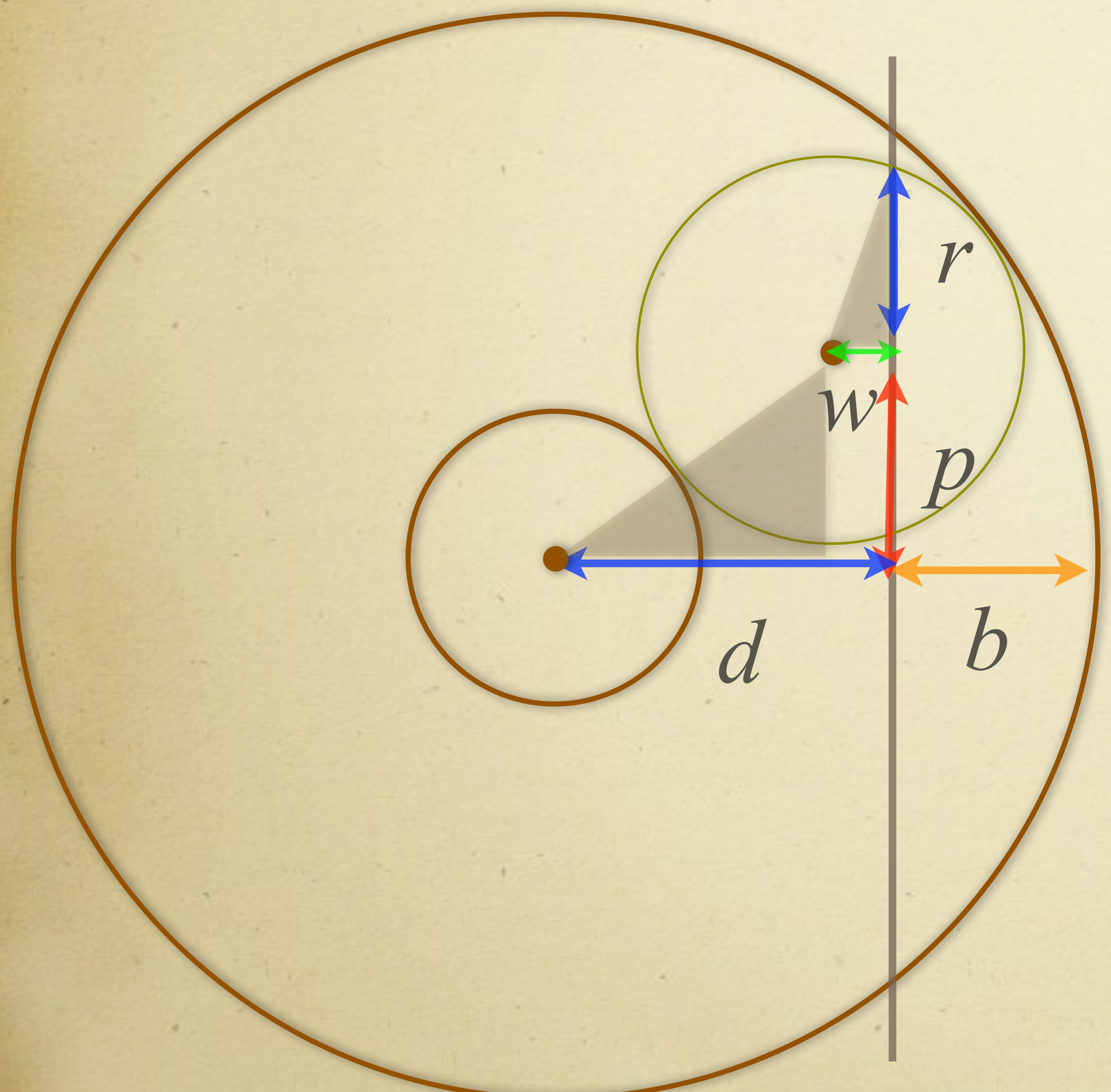


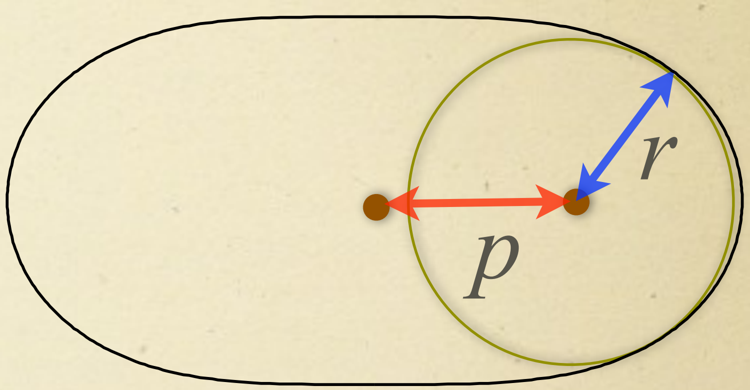


$$a^2 + d^2 = (b + d)^2$$

$$\boxed{d = \frac{a^2 - b^2}{2b}}$$

トーラスと内接球の切断





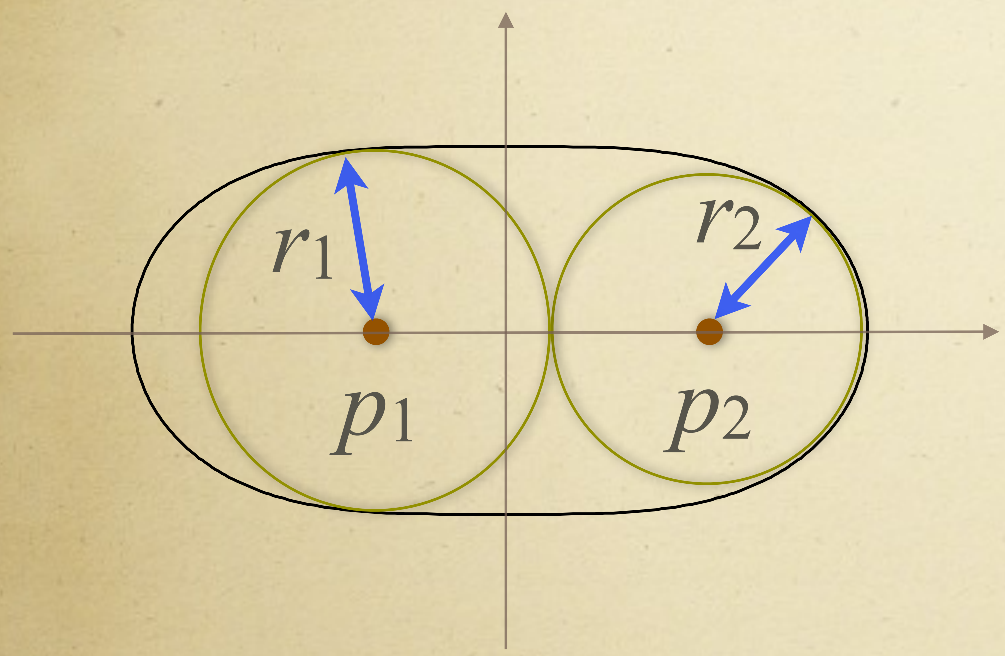
$$w^2 + r^2 = b^2$$

$$(d - w)^2 + p^2 = d^2$$

$$w = \sqrt{b^2 - r^2}$$

$$p = \sqrt{2dw - w^2}$$

類楕円の内接2円



$$d = \frac{a^2 - b^2}{2b}$$

$$w_1 = \sqrt{b^2 - r_1^2}$$

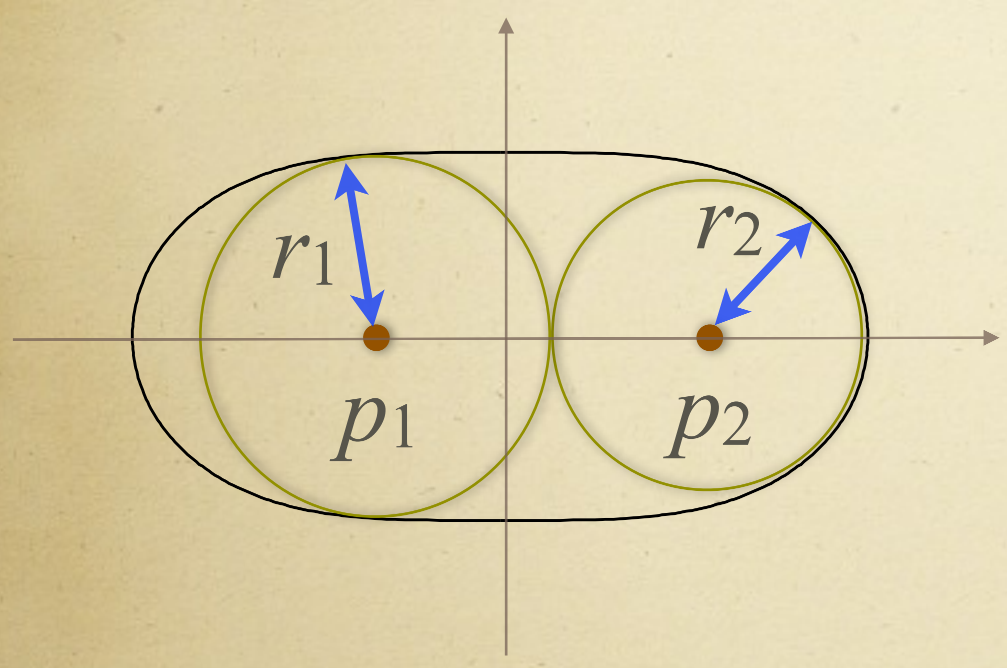
$$p_1 = -\sqrt{2dw_1 - w_1^2}$$

$$w_2 = \sqrt{b^2 - r_2^2}$$

$$p_2 = -\sqrt{2dw_2 - w_2^2}$$

$$p_2 - p_1 = r_1 + r_2$$

整理して



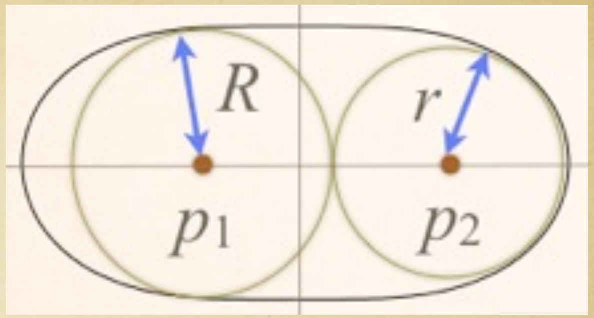
$$(p_1^2 + b^2 - r_1^2)^2 - 4d^2(b^2 - r_1^2) = 0$$

$$(p_2^2 + b^2 - r_2^2)^2 - 4d^2(b^2 - r_2^2) = 0$$

$$p_1 = p_2 - r_1 - r_2$$

p_1, p_2 を消去すればよい

2円の半径の関係式



$$c_4R^4 + c_3R^3 + c_2R^2 + c_1R + c_0 = 0$$

$$c_4 = b^8 + d^8 - 12b^2d^6 + 38b^4d^4 - 12b^6d^2 + 16b^4d^2r^2 - 32b^2d^4r^2 + 16d^6r^2$$

$$c_3 = -4r(d^2 - b^2)(b^6 + d^6 + 11b^2d^4 - 5b^4d^2 - 8d^4r^2 + 8b^2d^2r^2)$$

$$\begin{aligned} c_2 = \; & 8b^8d^2 + 6b^8r^2 - 48b^6d^4 - 24b^6d^2r^2 + 72b^4d^6 + 68b^4d^4r^2 + 16b^4d^2r^4 \\ & -88b^2d^6r^2 - 32b^2d^4r^4 + 6d^8r^2 + 16d^6r^4 \end{aligned}$$

$$c_1 = -4r(d^2 - b^2)(-12b^4d^4 + 4b^6d^2 + b^6r^2 + d^6r^2 + 11b^2d^4r^2 - 5b^4d^2r^2)$$

$$\begin{aligned} c_0 = \; & (8b^3d^3 + 4b^4d^2 + b^4r^2 + d^4r^2 - 4bd^3r^2 + 4b^3dr^2 + 2b^2d^2r^2) \\ & \times(-8b^3d^3 + 4b^4d^2 + b^4r^2 + d^4r^2 + 4bd^3r^2 - 4b^3dr^2 + 2b^2d^2r^2) \end{aligned}$$

和算書によれば

『算法楕円解』（1842年）

答え

$$2dw_2 - b^2 + r_2^2 = 2dw_1 - w_1^2 + 2p_1(r_1 + r_2) + (r_1 + r_2)^2$$

次に (15.7) を代入し整理すると、

$$2dw_2 = 2dw_1 + (r_1^2 - r_2^2) + 2p_1(r_1 + r_2) + (r_1 + r_2)^2$$

$$dw_2 = dw_1 + (r_1 + r_2)(p_1 + r_1)$$

両辺を平方して (15.7) と (15.9) を代入すると、

$$d^2(b^2 - r_2^2) = d^2(b^2 - r_1^2) + 2dw_1(r_1 + r_2)(p_1 + r_1) + (r_1 + r_2)^2(p_1 + r_1)^2$$

$$d^2(r_1^2 - r_2^2) = 2dw_1(r_1 + r_2)(p_1 + r_1) + (r_1 + r_2)^2(p_1 + r_1)^2$$

ここで、両辺を $(r_1 + r_2)$ で割って整理すると、

$$d^2(r_1 - r_2) = 2dw_1(p_1 + r_1) + (r_1 + r_2)(p_1 + r_1)^2$$

$$r_2(d^2 + (p_1 + r_1)^2) = r_1(d^2 - (p_1 + r_1)^2) - 2dw_1(p_1 + r_1)$$

従って、

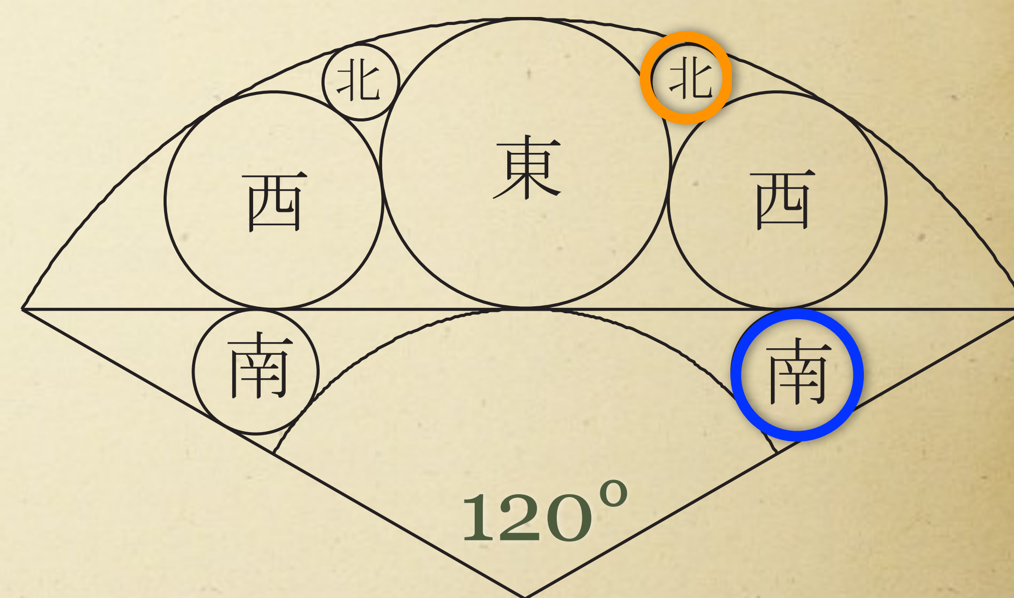
$$\boxed{r_2 = \frac{r_1(d^2 - (p_1 + r_1)^2) - 2dw_1(p_1 + r_1)}{d^2 + (p_1 + r_1)^2}} \qquad (15.12)$$

高阪金次郎の算額

- 1873年奉納（明治6年）

高阪金次郎の問題

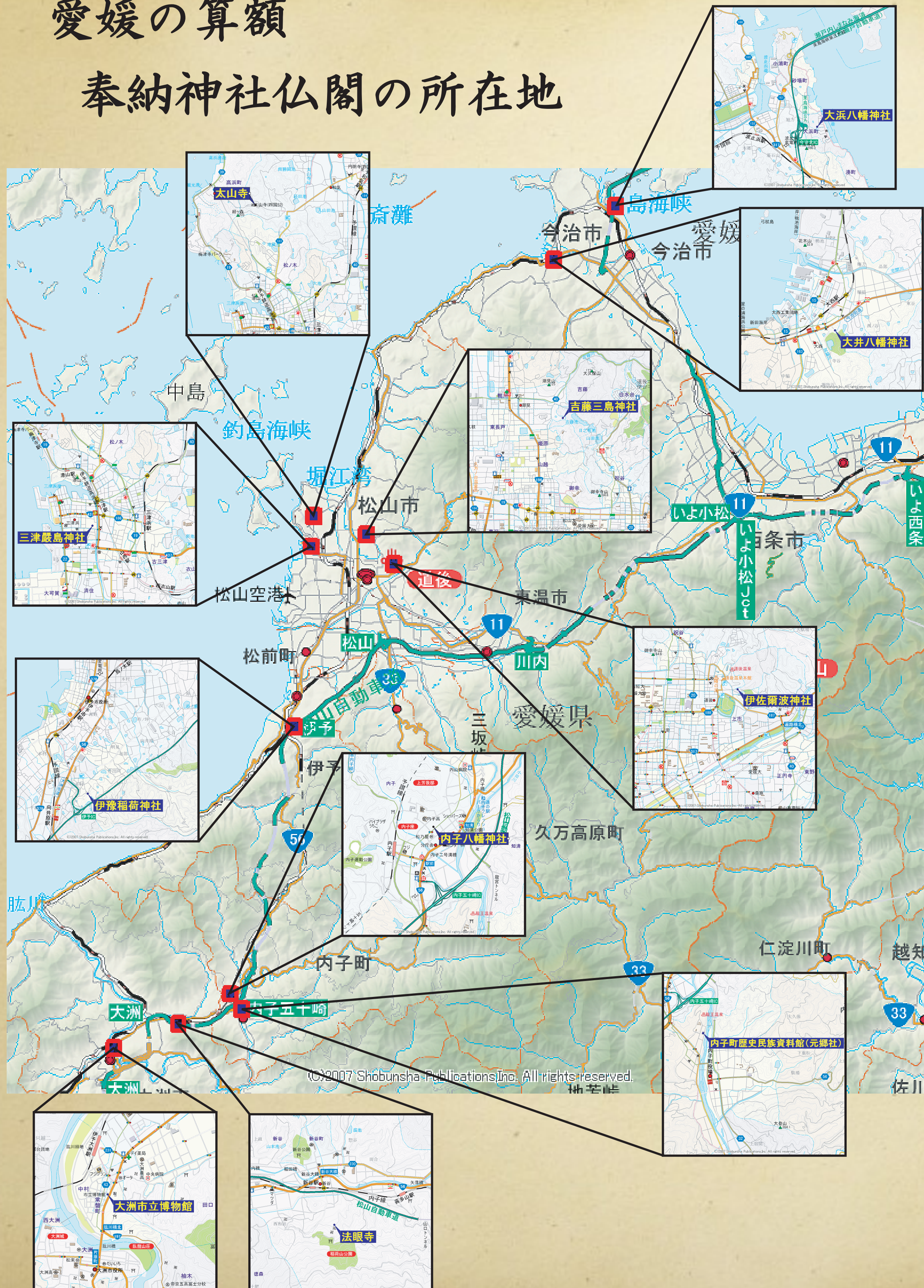
- 図のように、中心角120度の扇形内に線分を引き、東円を1個、西、南、北の円をそれぞれ2個を容れる。南円の直径が既知のとき、北円の直径を求める方法を問う。



奉納年:明治6年12月(1873年) 11歳

$$北 = \frac{32\sqrt{3} + 62}{193}南$$

愛媛の算額
奉納神社仏閣の所在地



宇和島は？

徳久知弘

- 宇和島藩士、和算家 内田五観(いつみ)の「瑪得瑪弟加(マスマテカ)塾」で学ぶ
- 『参両録』の遺題の十字環を研究し『十字環解』を著す
- 著書:『量地三角術用法解』『弧三角通』『測天義解』
- 『明治前日本数学史』で取り上げられた唯一の愛媛の和算家

和算の衰退

- 明治5年の学制発布
  - 「伝統的な和算から近代的な洋算へ」
  - 「和算を廃止し、洋算を専ら用ふるべし」
- しかし、明治時代に日本が西洋の科学技術を短期間に吸収できたのは
  - 和算が高度なレベルにあって、広く日本中に浸透していたから

愛媛の和算家

- 今回は6人しか取り上げることができなかった
  - 大西佐兵衛
  - 小嶌又兵衛
  - 山崎喜右衛門
  - 関家喜多次
  - 吉田茂兵衛
  - 徳久知弘

算額奉納者系譜

（注）氏名の下の［　］内の数字は算額を奉納した年

ご清聴ありがとうございました。