

鏡の国へ行ってみよう！ ～対称性のはなし～

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

伊藤 由佳理

分類する

□ 数学は、
たくさんあるものを分類・区別して、きれいに整理整頓する学問です。

まずは、具体例を考えましょう！

分類する

▣ 洗濯物を片づけよう！



分類する

▣ たたむ



分類する



□ たんすにしまろう



分類する

□ Aさんの場合



分類する

□ Bさんの場合



分類する

□ Cさんの場合



分類する



□ さて、あなたは？



問題



東南アジアのチョウ：この中には1匹だけ違う種が混じっていますが、あとは同じ種です。どのチョウか分かりますか？

鏡（かがみ）

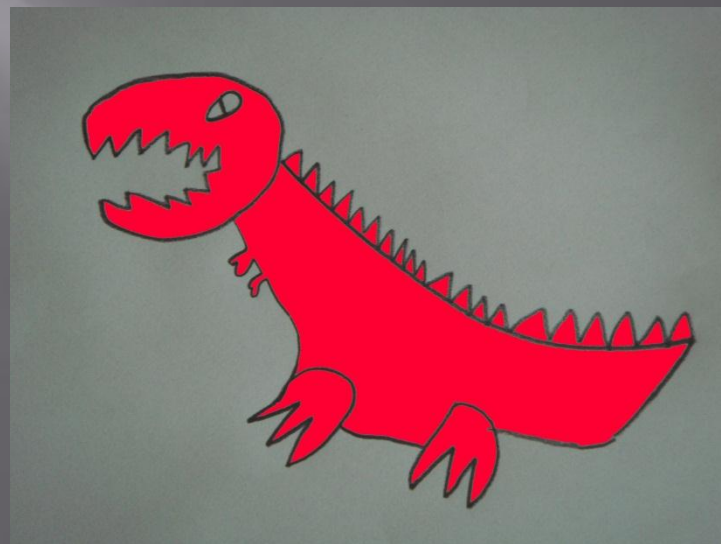
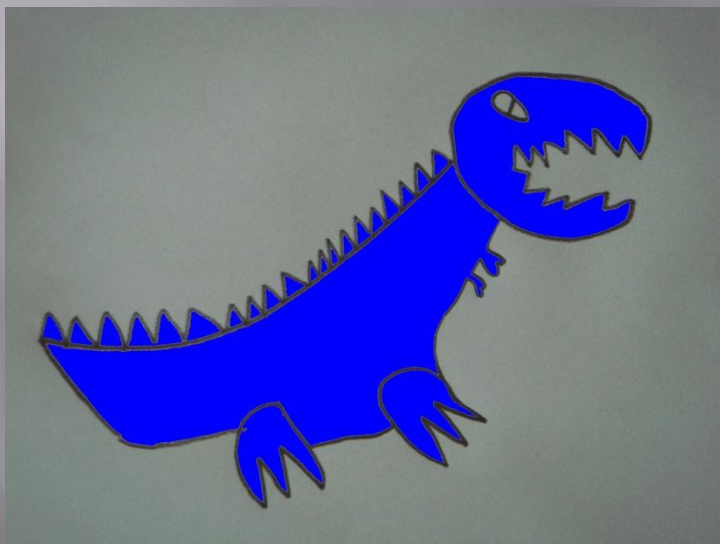
- 鏡にうつる姿は、こちらと同じように動くが、向こう側の構造は反対でもある。
- 「鏡の国のアリス」「ひみつのアッコちゃん」



- ラカンの「鏡像段階論」（精神分析）
- 鏡はいろんな場面に登場する不思議な道具。

鏡と対称性

- 鏡の中の姿は、自分と対称性がある。
- 「幾何学的な対称性」に注目するとき、「色」の違いは、数学では気にしない！



数学における「対称性」

- ▣ 「対称性」は、幾何学的にだけでなく、代数学的にも、解析学的にも定義できる。

【例】 次の式は、 a と b について、対称である。

$$a+ab+b$$

つまり、 a と b を入れ替えても、同じである。

幾何学的な対称性

- 幾何学的には「対称性」を次のように定義する。

【対称性（たいしょうせい）】

対称性をもつ、とは？

ある軸を中心として回転したり、

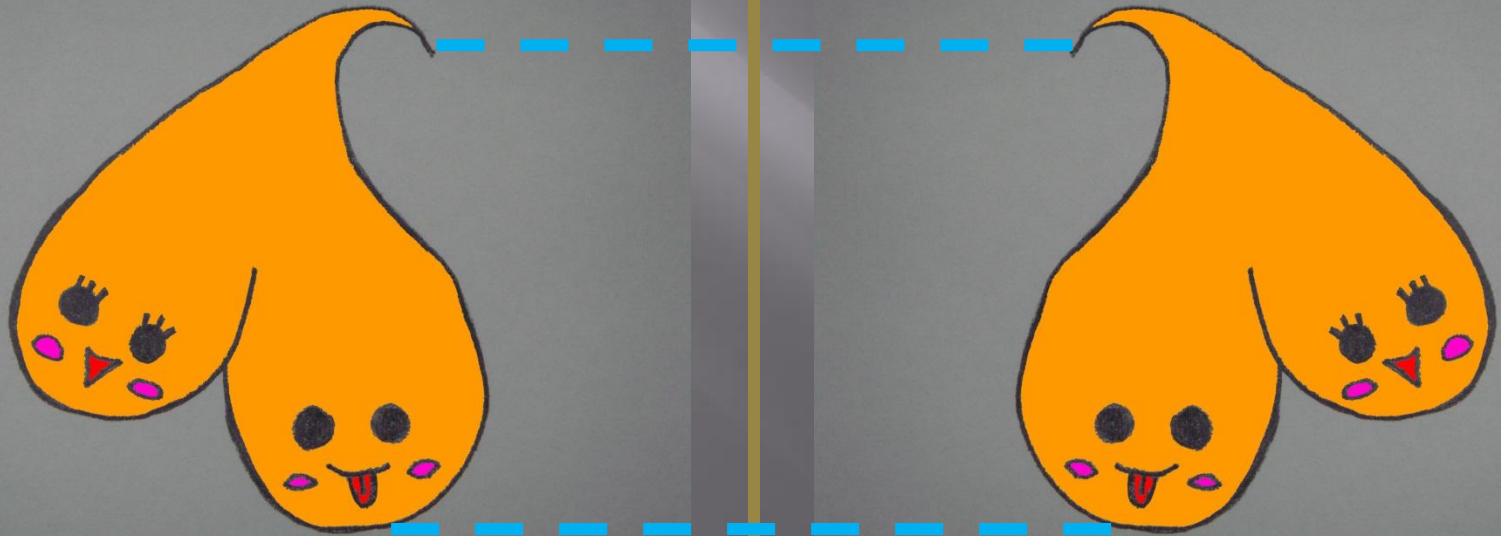
ある点を中心として反転したり、

鏡に映す、など

ある操作（合同変換）の後にはじめの状態と同じ状態になることをいう

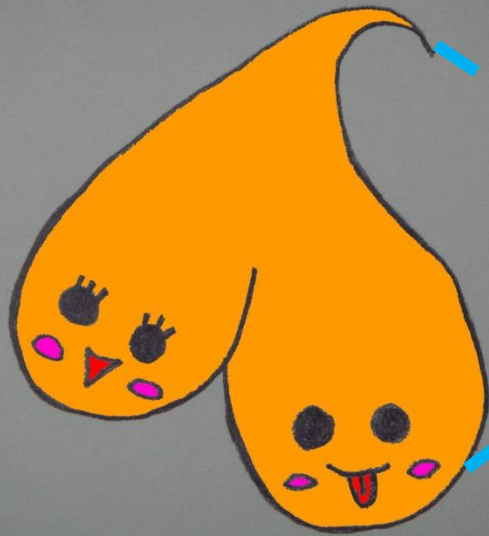
幾何学的な対称性

□ 線対称



幾何学的な対称性

□ 点对称

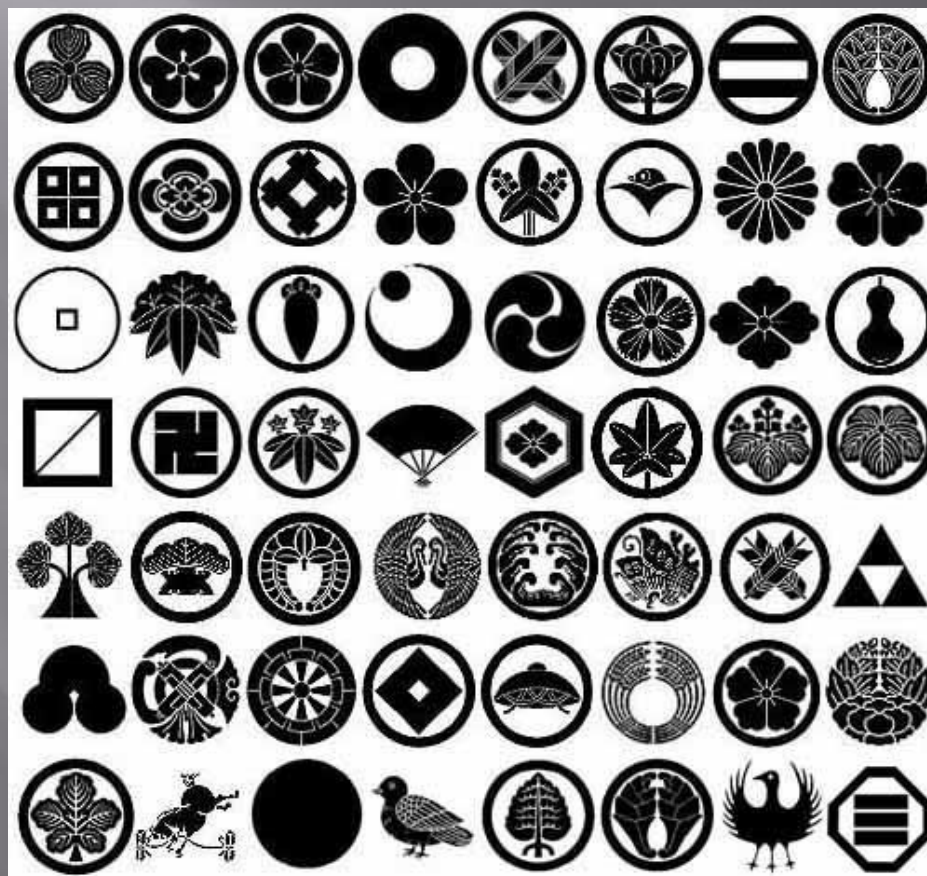


1. 自分自身がうつる鏡

- ▣ まずは、自分自身とまったく同じになる鏡を考えましょう！
- ▣ つまり、「鏡に映した姿」が「自分」とまったく同じになってしまう場合を考えます。
- ▣ ある図形を自分自身にうつす「動かし方」が、どのくらいあるのか見てみましょう！

1. 自分自身がうつる鏡

- 対称性のある図形には、こんなものもあります。



ちょっと「群論」

- ▣ 「幾何学的な対称性」を表す方法として、「群（ぐん）」という概念がある。

【群（ぐん）】

ある演算 $*$ で閉じた代数的集合 G の、任意の元 x, y, z が、次の性質をみたすとき、群という。

1. $(x * y) * z = x * (y * z)$ （結合法則）
2. $x * e = e * x = x$ をみたす単位元 e が存在する。
3. $x * y = y * x = e$ をみたす x の逆元 y が存在する。

1. 自分自身がうつる鏡

- ▣ 「家紋の動かし方全体」は群になる！

- ▣ 定義の1から3の性質は、
 1. 3つの操作に関して、結合法則がなりたつ
 2. 単位元＝恒等操作（何もしない）
 3. 逆元＝ある動かし方の逆操作

1. 自分自身がうつる鏡

▣ 家紋の動かし方

その1（回転）・・・巡回群

家紋自身を、回転することにより、
自分自身に一致させることができる。

【例】三つ巴（みつどもえ）

120度回転で、自分自身と一致する。

これは3次の巡回群



1. 自分自身がうつる鏡

▣ 家紋の動かし方

その2（回転と裏返し）・・・二面体群
家紋自身を回転したり、裏返すことで、
自分自身に一致させることができる。

【例】桔梗（ききょう）

72度回転や、裏返しによって、
自分自身と一致する。



これは5次の二面体群

1. 自分自身がうつる鏡

□ 他にも、いろいろな動かし方があります。

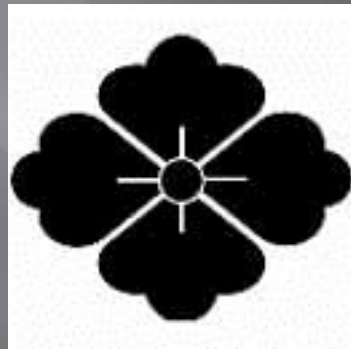
菊



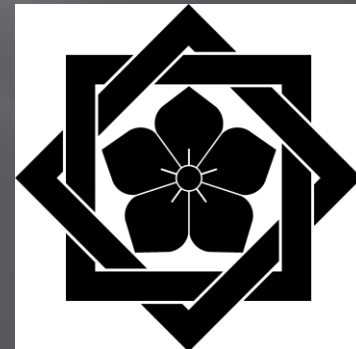
桐



花菱



違い枳に桔梗



1. 自分自身がうつる鏡

- 異なる図形でも、動かし方が同じなら、対応する群が同じとみなします。

たとえば、次のふたつは、動かし方は同じなので、対応する群も同じです。

桐



橘



1. 自分自身がうつる鏡

- ▣ 家紋の種類は豊富にありますが、家紋を自分自身に重ねる操作（合同変換）にあたる群は、

回転と裏返しだけ

になる。つまり、

1. n 次の巡回群（正 n 角形の回転）

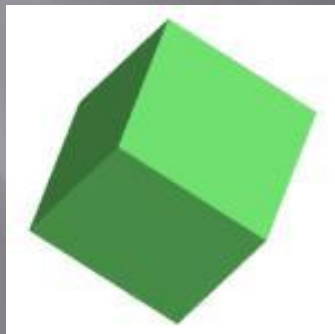
2. n 次の二面体群

（正 n 角形の回転と裏返し）

のいずれかになります。

1. 自分自身がうつる鏡

- 3次元の正多面体は、ぜんぶで5種類あります。



これらはプラトンの正多面体とも呼ばれています。

1. 自分自身がうつる鏡

▣ しかし、3次元の正多面体の合同変換群は、3種類しかありません！

1. 正四面体群（正四面体）

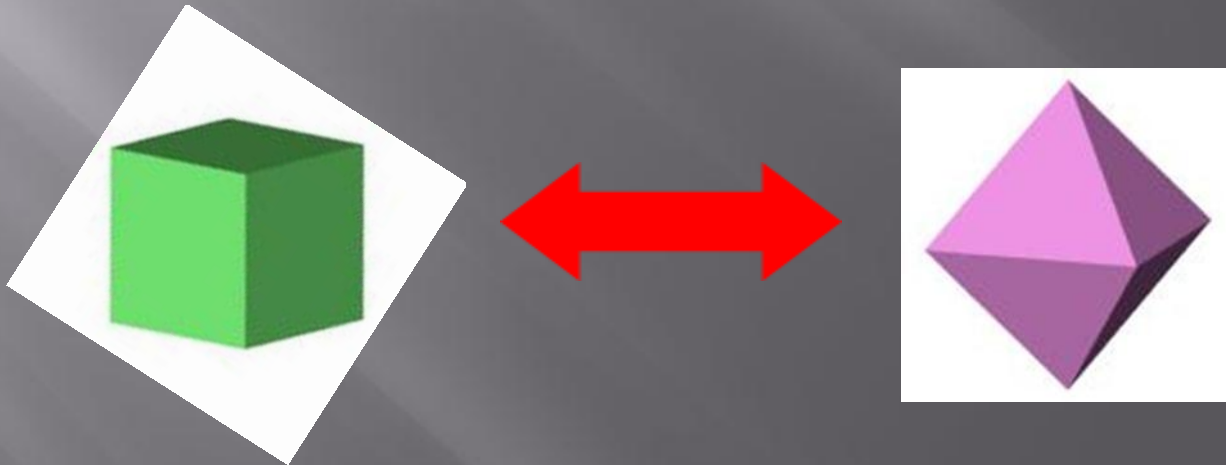
2. 正八面体群（立方体、正八面体）

3. 正12面体群（正12面体、正20面体）

1. 自分自身がうつる鏡

- ▣ 正多面体の合同変換群が、3つになるのは、図形の**双対性**のためです。

立方体と正八面体（正12面体と正20面体）は互いに頂点と面を対にすることができるので、動かし方は、同じになります。



1. 自分自身がうつる鏡

- ▣ ここまでに出てきた群は、3次元の空間内の距離を変えない合同変換に対応しています。

【定理】 3次の回転群 $SO(3)$ の有限部分群は

1. 巡回群
2. 二面体群
3. 正四面体群
4. 正八面体群
5. 正12面体群

のいずれかと同型である！

2. 永遠につづく鏡

- ある図形を自分自身に移す対称性に注目して、2次元と3次元の場合を見てきました。
- こんどは、同じ図形がどこまでも続いているような場合を考えてみましょう。
- そのために、回転と裏返しのほかに、平行移動も加えてもとの図形と一致する場合を考えます。

2. 永遠につづく鏡

□ さらに、**平行移動**を加えると・・・
包装紙や壁紙のように連続する図形が得られます。

このような図形を自分自身に重ねる動かし方は
「2次元結晶群」と呼ばれ、全部で17種類！

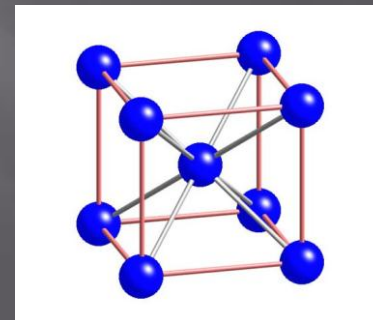
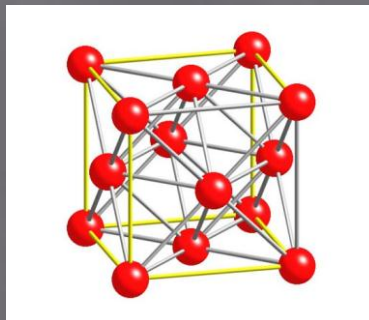
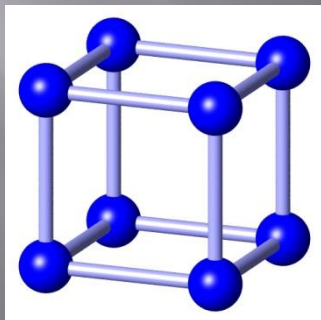


1. スペインのアルハンブラ宮殿のタイルの模様
2. 着物などの古典的な文様 などにもあります。

『この定理が美しい』（数学書房）の「対称性の美」参照

2. 永遠につづく鏡

- さらに3次元でも平行移動を加えた「3次元の結晶群」を考えることができます。
- 数学的には、「3次元結晶群」は、217種類あることが証明されており、そのほとんどが自然界に存在するようです。



- さらに4次元では、4783種類あるそうです。

3. 自然科学における対称性

- ▣ 「群」は、図形の対称性を知る手段として、物理学や化学などでも、よく利用されています。

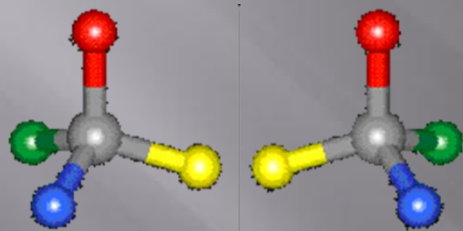
その代表的なものが、**分子の構造決定**である！
自然界に存在する未知の物質の分子構造を知るため、その物質に特殊な光を当てて、幾何学的な対称性を調べることで、その分子の結晶構造がわかります。



天然物合成の技術は、製薬などに応用されています。

3. 自然科学における対称性

- 2001年ノーベル化学賞「不斉分子触媒の開発」
2つの鏡像体のうち、一方だけの合成を可能にする重要な反応の触媒分子を開発。



野依 良治氏



名古屋大学野依記念物質科学研究館2F

ケミストリーギャラリー 平日10:00～16:00

3. 自然科学における対称性

□ 2008年ノーベル物理学賞

「CP対称性の破れの起源の発見」

1972年に、粒子と反粒子の非対称性で、私たちの世界が存在すると提唱し、30年後に大型加速器で実証された。



小林 誠氏



益川 英敏氏



➡ ノーベル物理学賞・化学賞展示室（理学部A館1階）

月～木 10:00～12:00、13:00～16:00

3. 自然科学における対称性

- ▣ このように、数学では「対称性のよいもの」に注目することが多いのですが、
- ▣ 自然科学では「対称性がないところ」に面白い研究対象があることも多いようです。


3. 自然科学における対称性



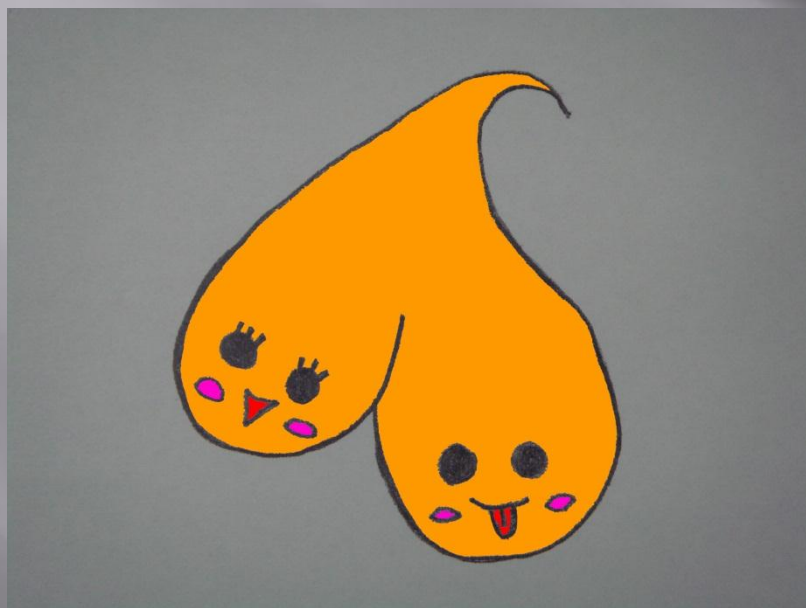
東南アジアのチョウ：この中には1匹だけ違う種が混じっていますが、あとは同じ種です。どのチョウが分かりますか？

3. 自然科学における対称性

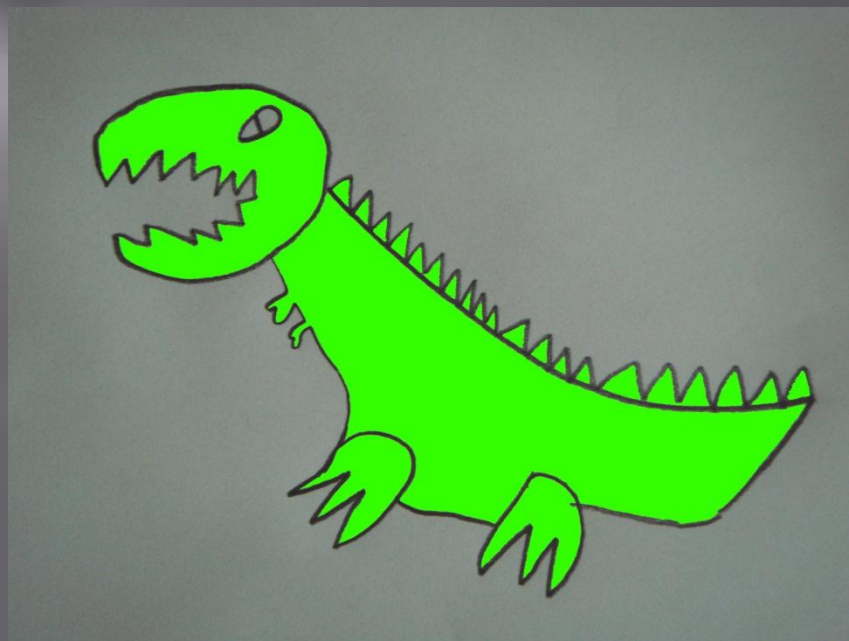
- ▣ 10月に名古屋で開催される「生物多様性会議」では、様々な生物の関わり合いが議論されます。
- ▣ 数学という学問は、数多くあるものの本質的な部分、基本的な構造に注目することが多いので、一見「多様性」とは相反するもののようですが、自然科学や社会現象の説明にも使われています。

 「恐竜たちがやってきた」－化石から学ぶ過去の生物多様性－
名古屋大学博物館～2010年9月30日(木)

ご清聴
ありがとうございました！



©Emily



©Haruki