

幾何学模型アーカイブ からの眺望



河野俊丈

東京大学大学院数理科学研究科

2009年3月 日本数学会市民講演会

幾何学模型の歴史



E. Kummer



F. Klein

1870年頃

クンマー(E. Kummer)が、彼自身の制作による模型を用いて議論を行った。

(1873年のベルリン科学アカデミーの月報)

1880年頃から20世紀初頭

クライン(F. Klein), ブリル(A. Brill)らを中心にMartin Schilling社で石膏による

幾何学模型制作のプロジェクトが展開し、1932年まで継続される。

東大数理と幾何学模型

1910年頃

東京大学理学部数学教室に 中川銓吉 教授が
第一次大戦の頃あるいは、それ以前に輸入.



中川銓吉

1997年10月 - 12月

東京大学創立120周年記念特別展

「学問のアルケオロジー」に展示.

幾何学模型と芸術

- 20世紀はじめ マックス・エルンストがパリで展示されていた幾何学模型に注目。マン・レイが石膏模型の写真を芸術雑誌Cahiers d'artに発表。
- ヘンリー・ムーアの彫刻作品にも影響を与える。
- 2005年～2006年 杉本博司氏によって撮影された東大数理所蔵の模型の写真、および現在の技術で作成された模型が、森美術館における展覧会「杉本博司 時間の終わり」などで展示される(パリのポンピドーセンターなどを巡回)。

模型の主なジャンル

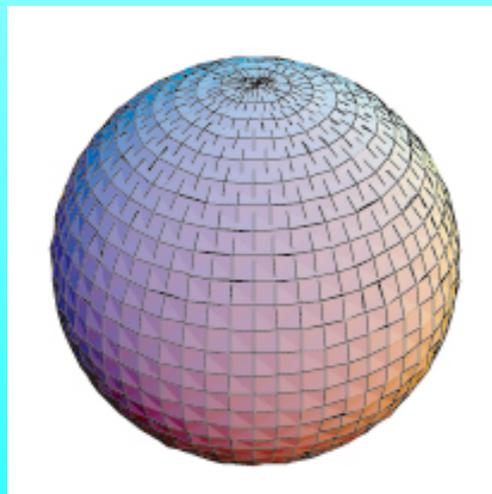
- 代数曲面
- 定曲率曲面, 極小曲面
- 複素関数 (楕円関数など)
- 線織面のモデル
- 多面体の針金模型

代数曲面

$P(x, y, z)$ 多項式.

代数曲面：空間内で $P(x, y, z) = 0$ を満たす点全体の集合.

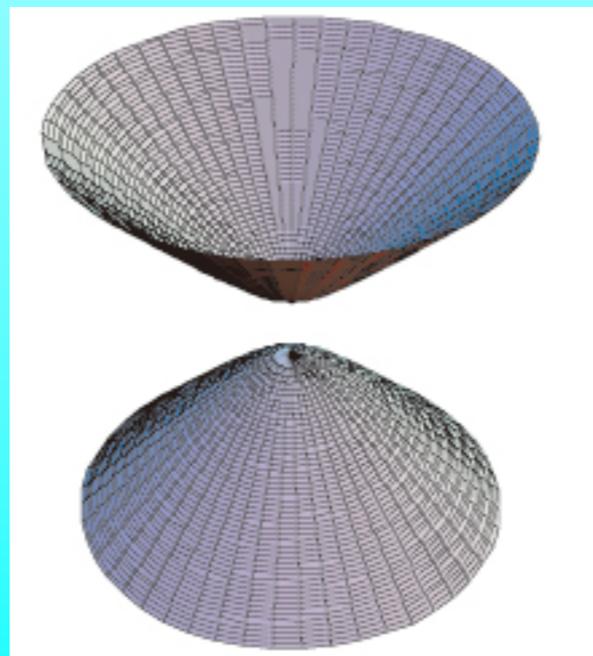
2次曲面



$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$

直交する楕円面と
双曲面

代数曲面

$P(x, y, z)$ 多項式.

代数曲面：空間内で $P(x, y, z) = 0$ を満たす点全体の集合.

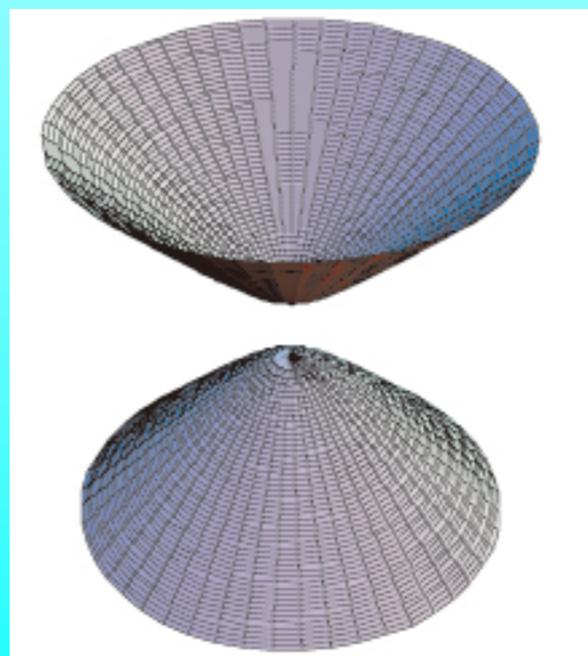
2次曲面



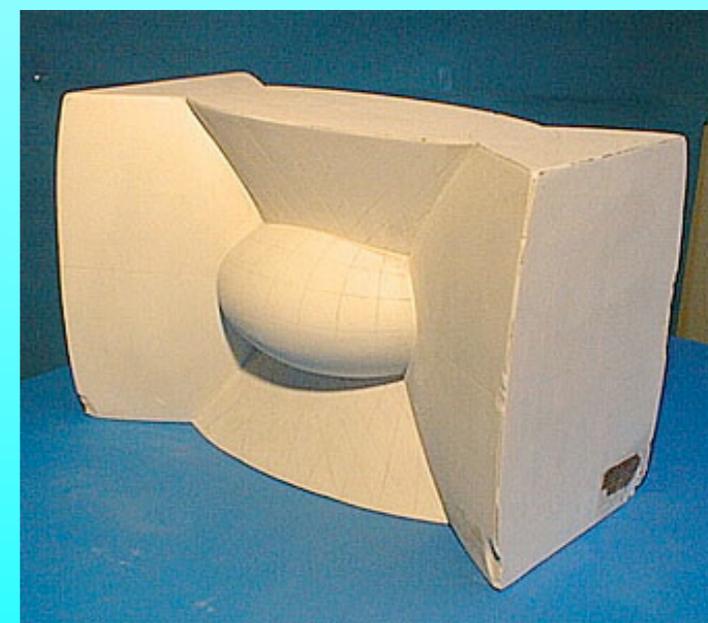
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



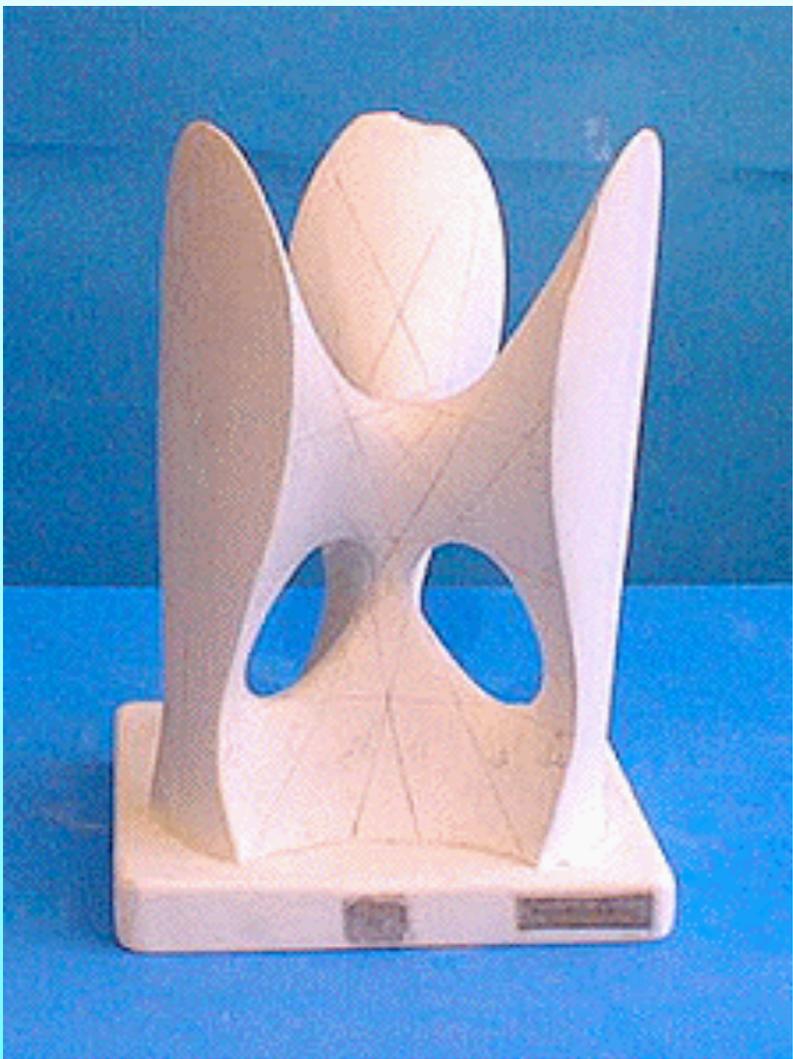
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

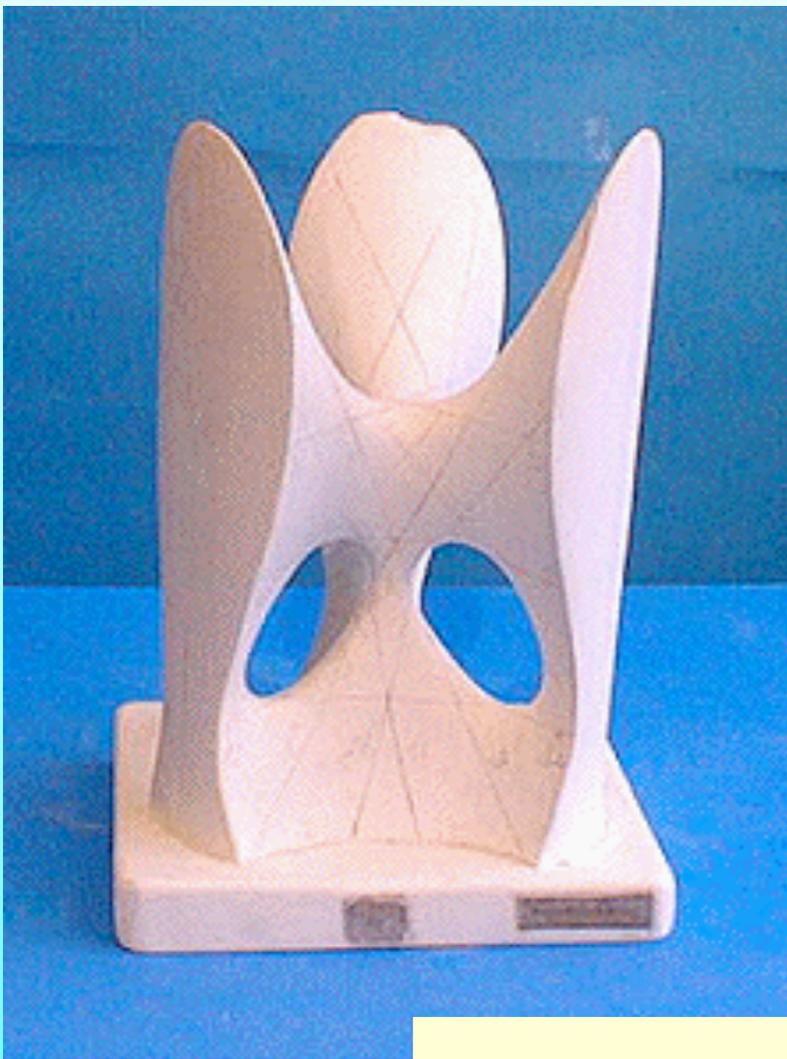


$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$



直交する楕円面と
双曲面



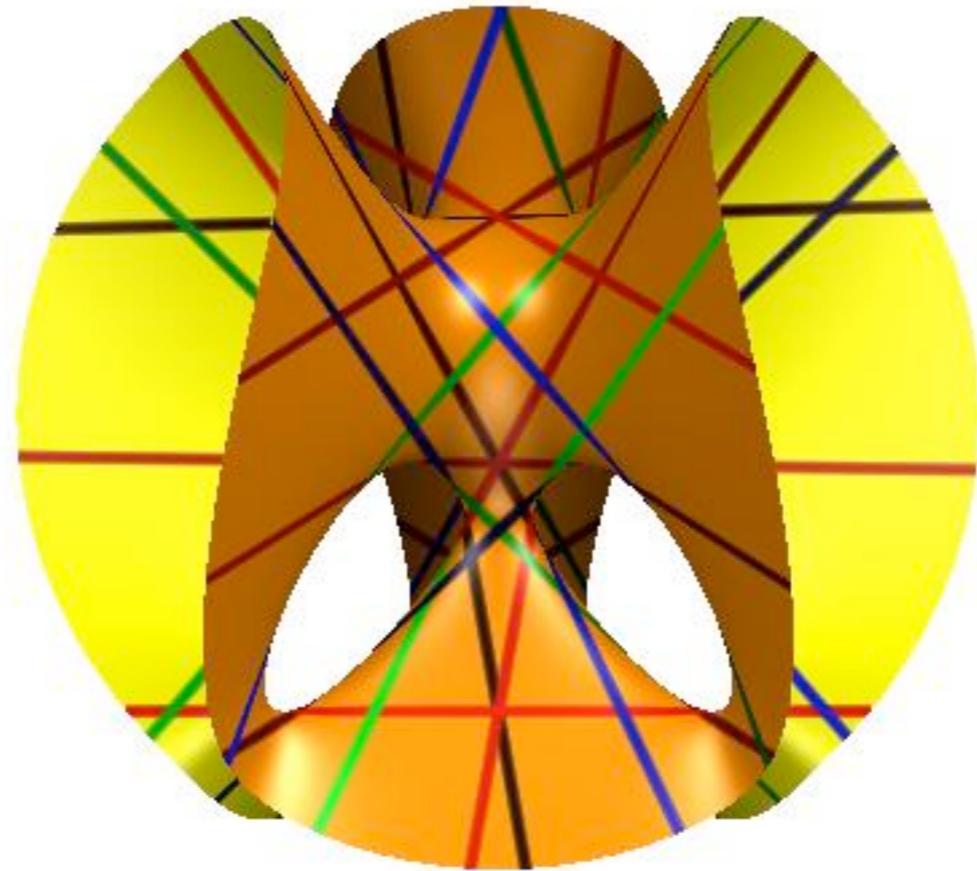
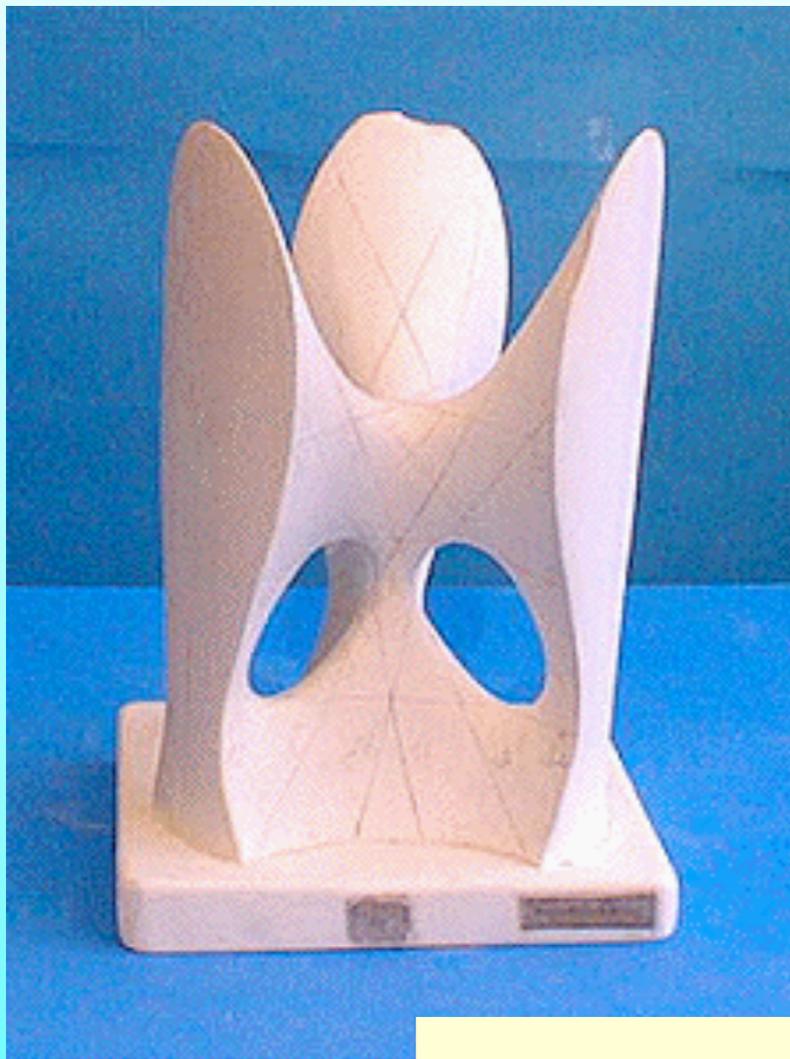


Clebsch 曲面 – 3次曲面上の27本の直線

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbf{R}P^4$$



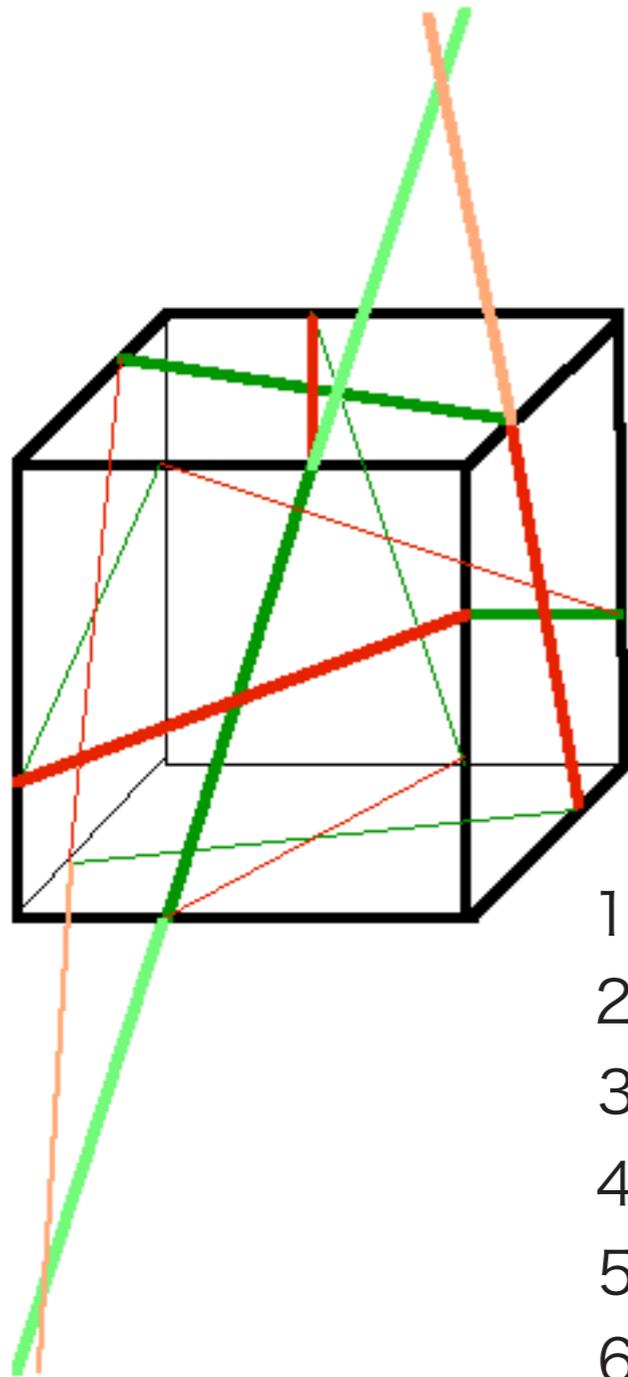
Clebsch 曲面 – 3次曲面上の27本の直線

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbf{R}P^4$$

27本の直線の配置

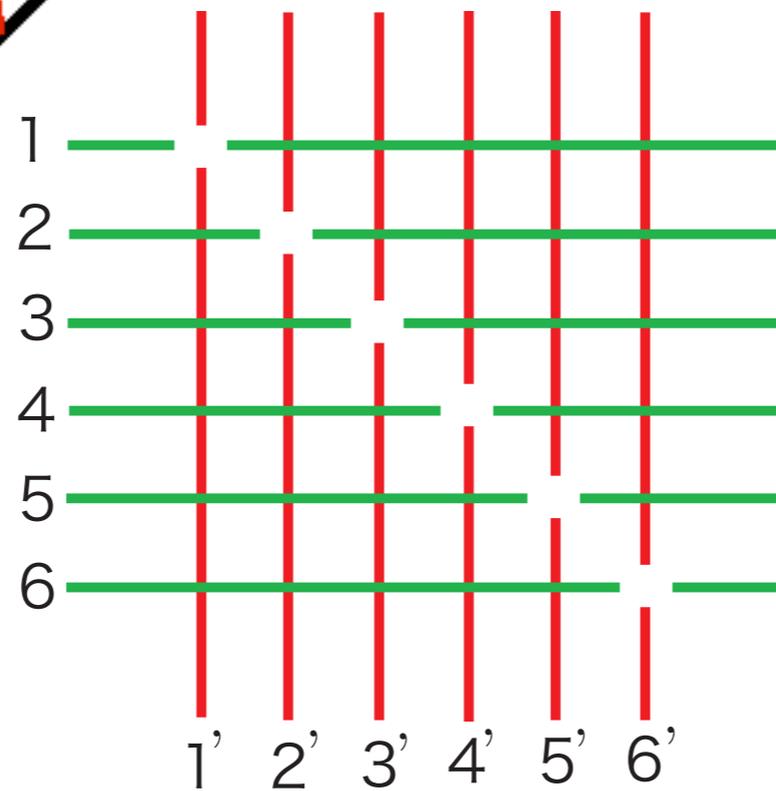


互いに捩れの位置にある6本の直線2組

$1, 2, 3, 4, 5, 6; 1', 2', 3', 4', 5', 6'$

$i, i', j, j', i \neq j$ と交わる直線15本

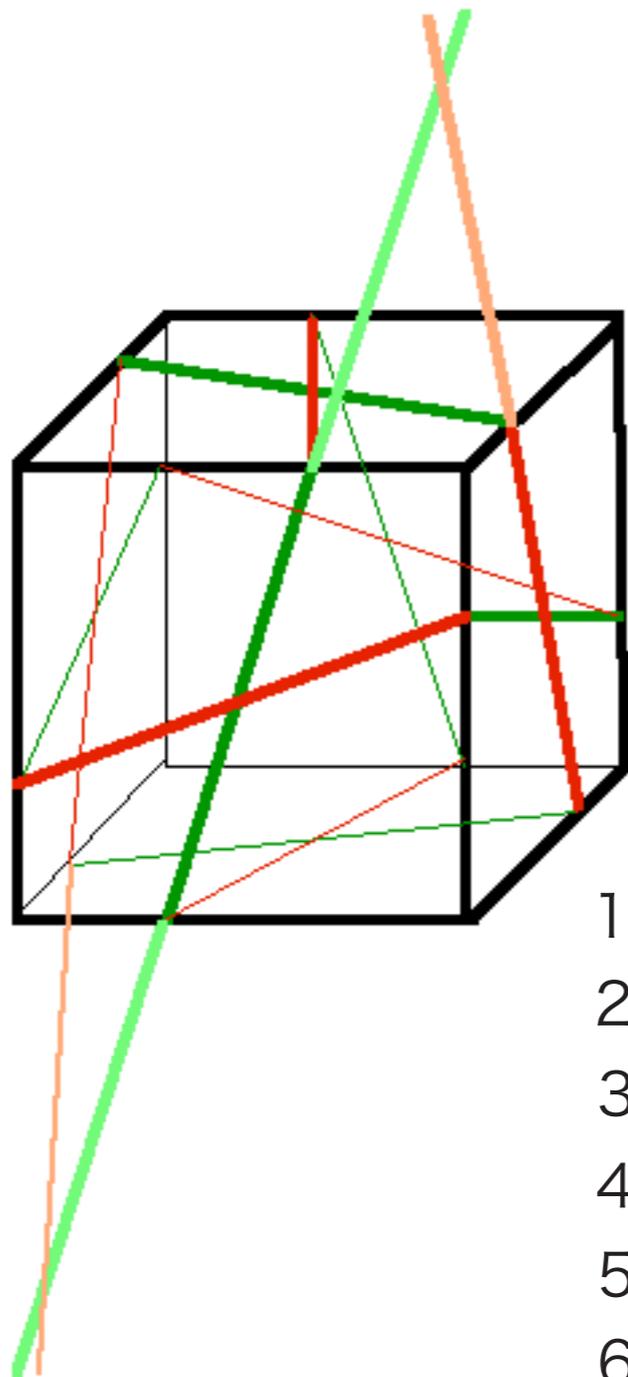
$ij, 1 \leq i, j \leq 6$



直線の配置は美しい
対称性を持つ

Schläfli double six

27本の直線の配置

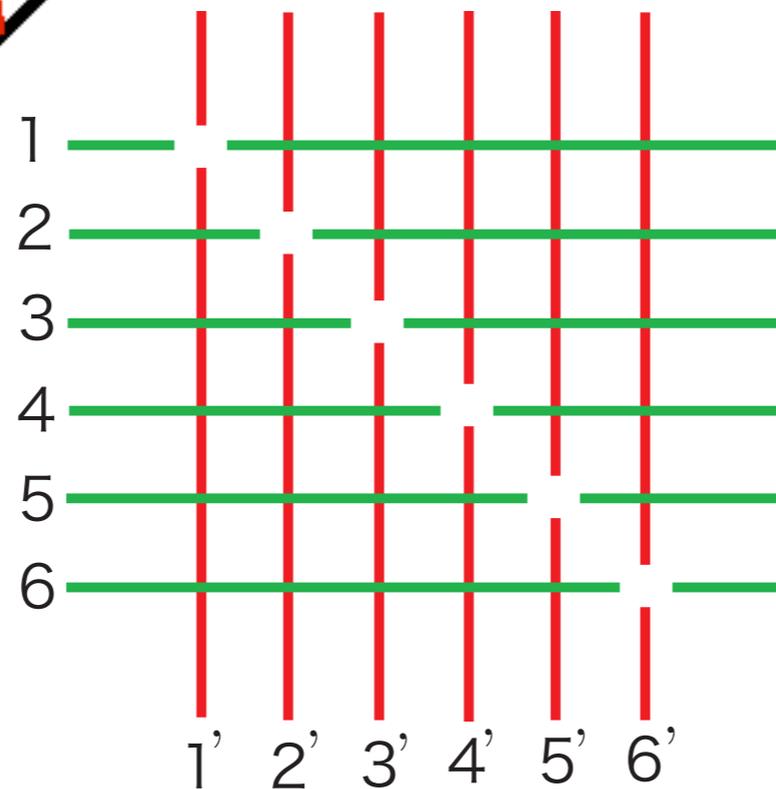


互いに捩れの位置にある6本の直線2組

$$1, 2, 3, 4, 5, 6; 1', 2', 3', 4', 5', 6'$$

$i, i', j, j', i \neq j$ と交わる直線15本

$$ij, \quad 1 \leq i, j \leq 6$$

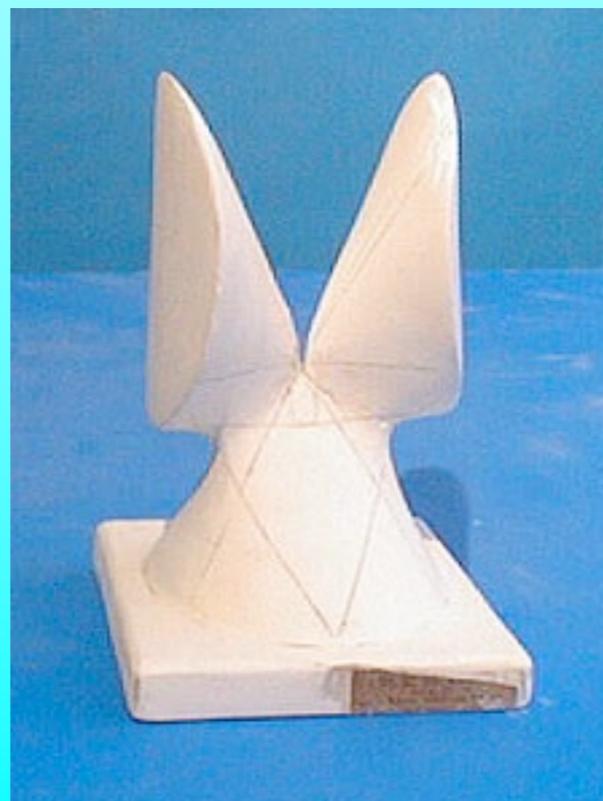
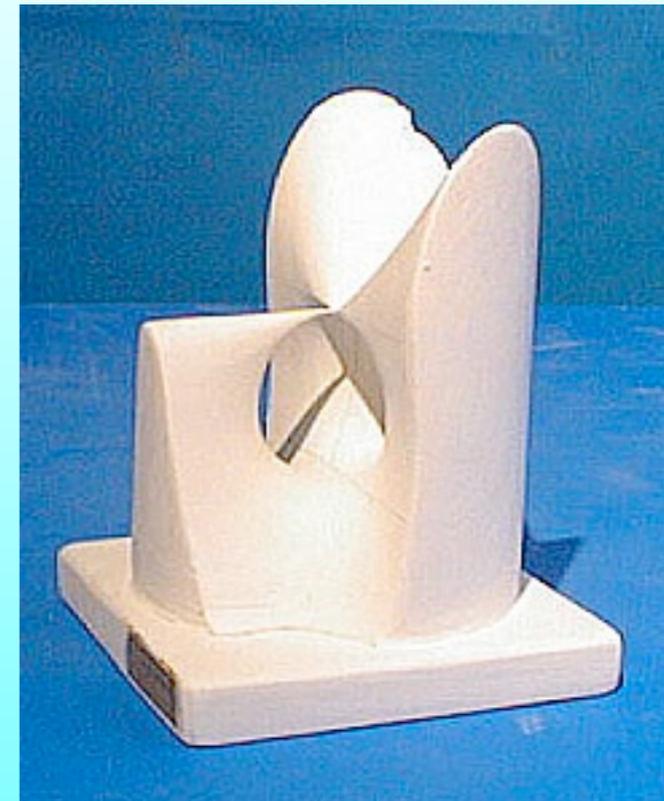
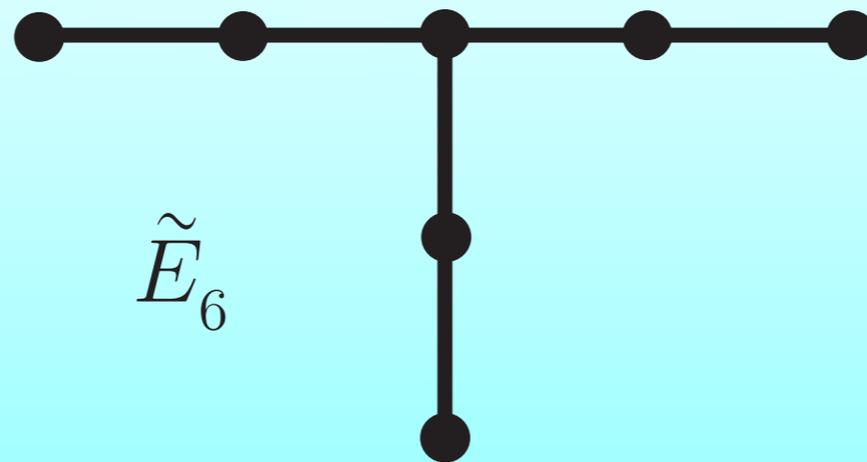


直線の配置は美しい
対称性を持つ

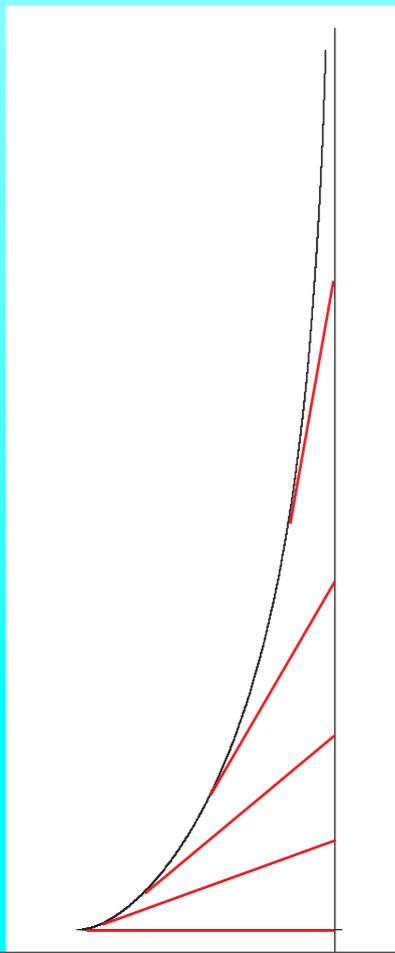
E_6 型ワイル群の対称性

Schläfli double six

3次曲面の退化



特異点をもつ曲面



トラクトリクスの回転面



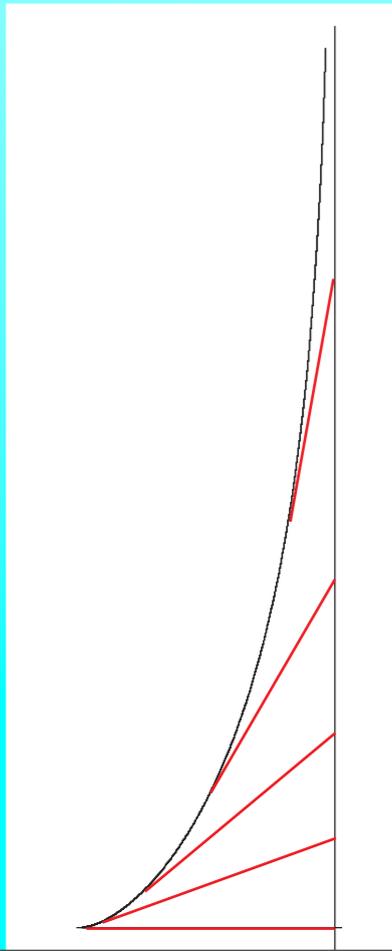
擬球 – 負の定曲率曲面

$$x = \frac{\cos u}{\cosh v}$$

$$y = \frac{\sin u}{\cosh v}$$

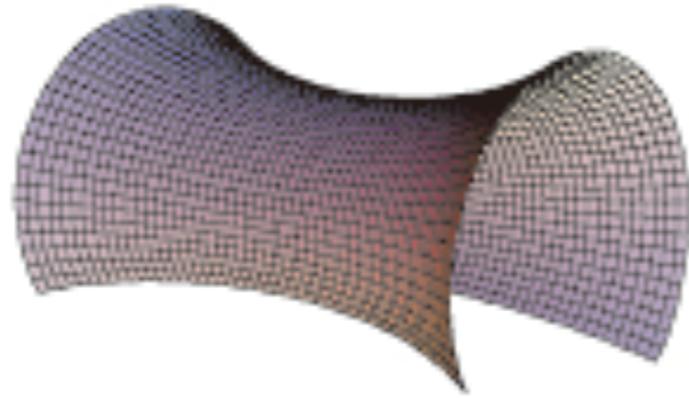
$$z = v - \tanh v$$

$$(0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < \infty)$$

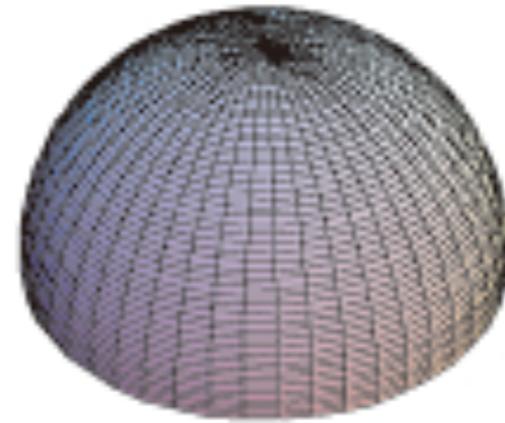


トラクトリクスの回転面

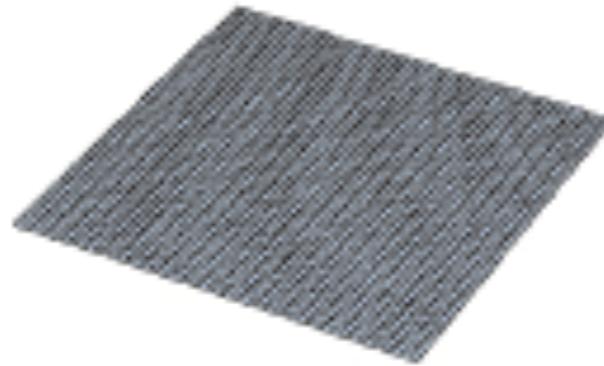
曲面のガウス曲率



$$K < 0$$

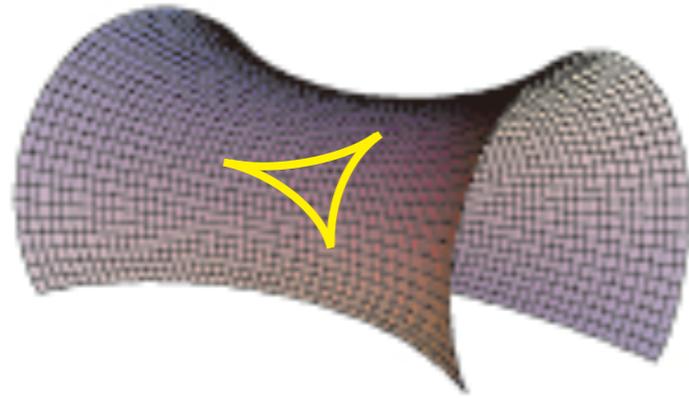


$$K > 0$$

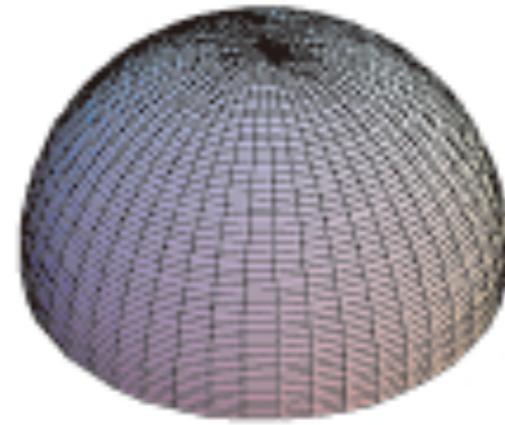


$$K = 0$$

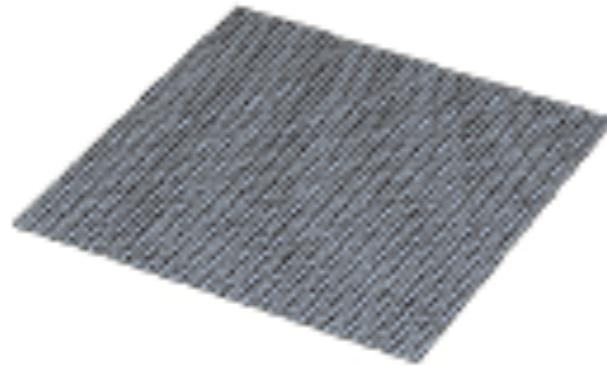
曲面のガウス曲率



$$K < 0$$

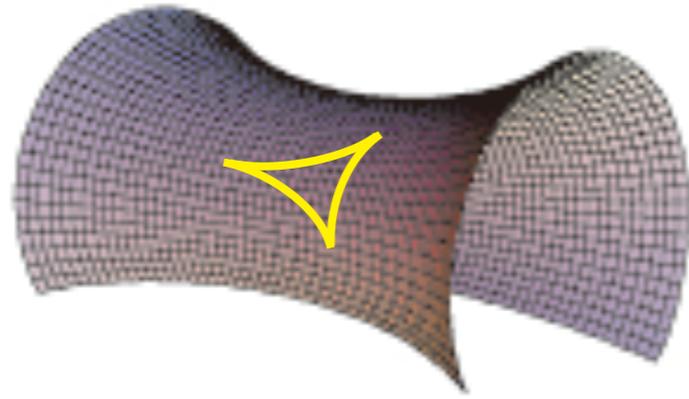


$$K > 0$$

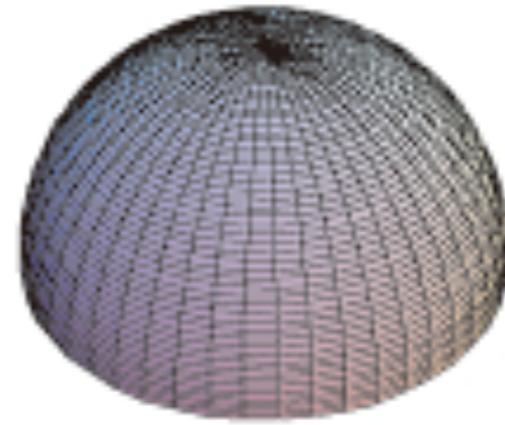


$$K = 0$$

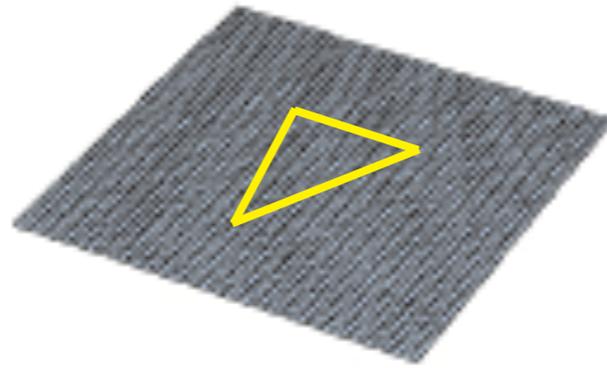
曲面のガウス曲率



$$K < 0$$

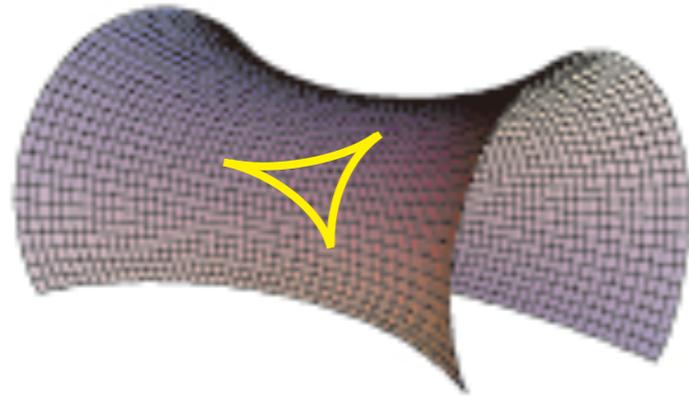


$$K > 0$$

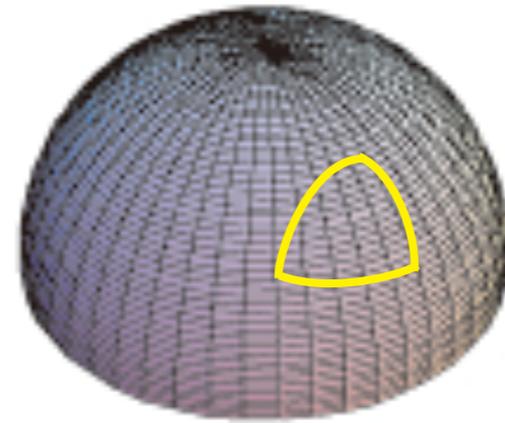


$$K = 0$$

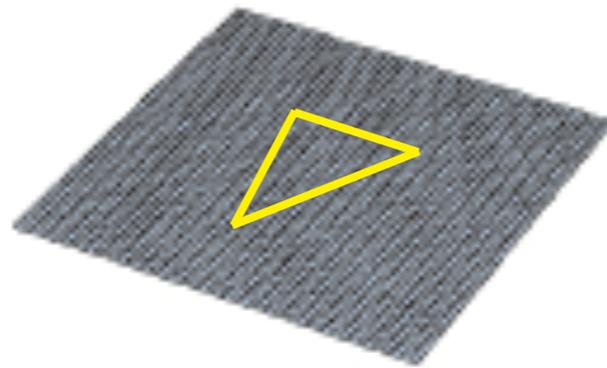
曲面のガウス曲率



$$K < 0$$



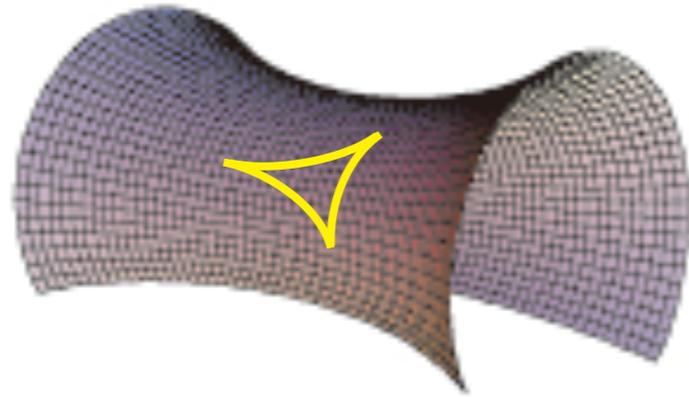
$$K > 0$$



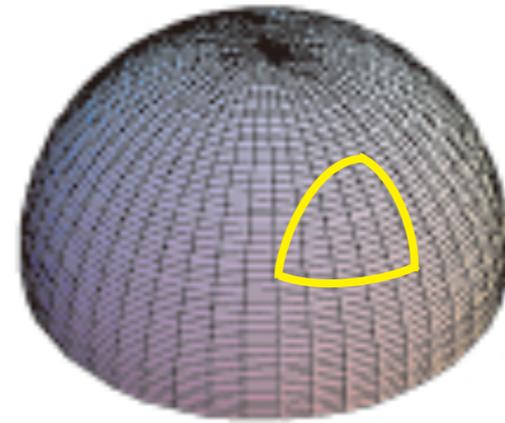
$$K = 0$$

曲面のガウス曲率

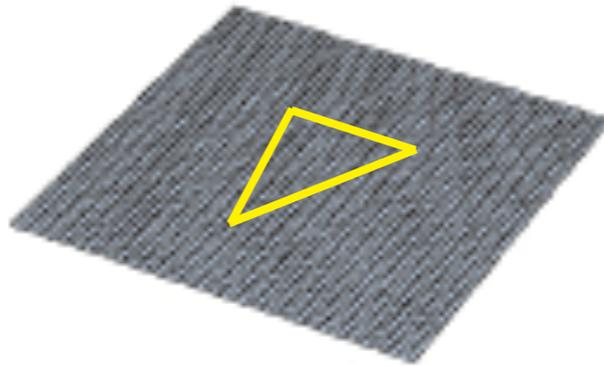
3角形の内角の和 < 180度



$$K < 0$$



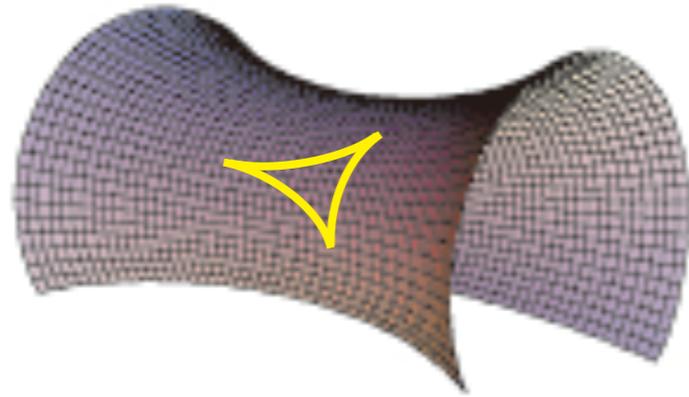
$$K > 0$$



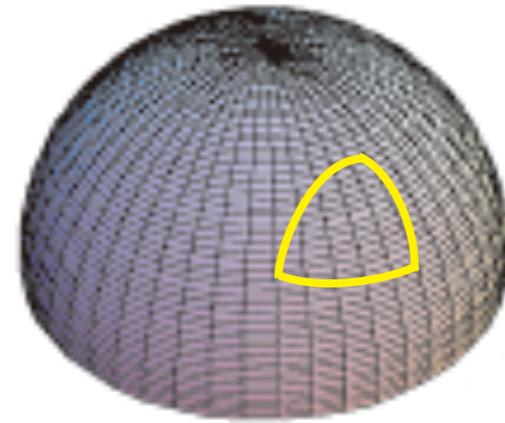
$$K = 0$$

曲面のガウス曲率

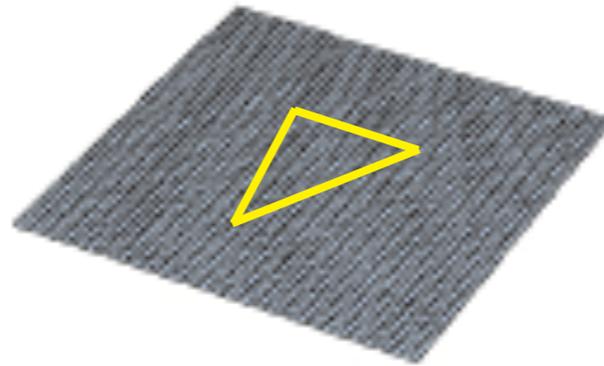
3角形の内角の和 < 180度



$$K < 0$$



$$K > 0$$



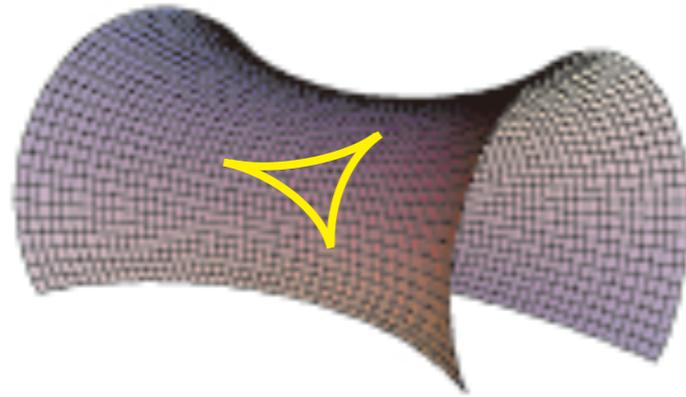
$$K = 0$$

3角形の内角の和 = 180度

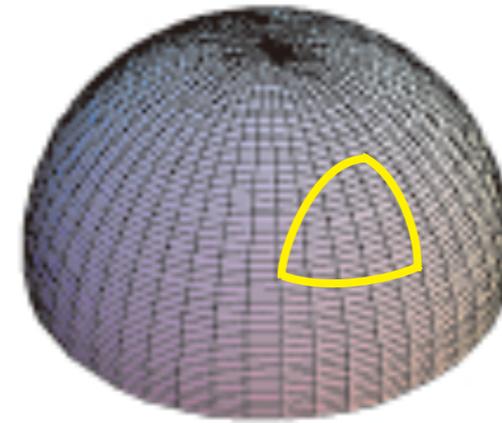
曲面のガウス曲率

3角形の内角の和 < 180 度

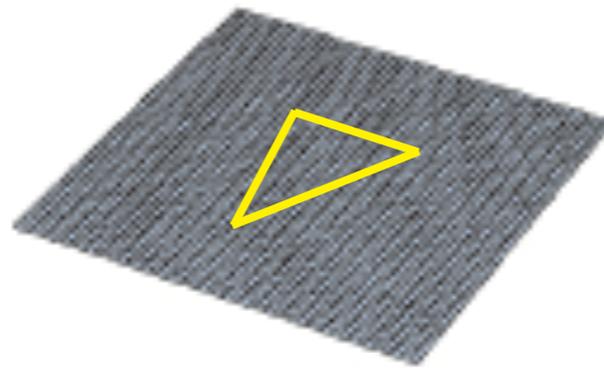
3角形の内角の和 > 180 度



$$K < 0$$



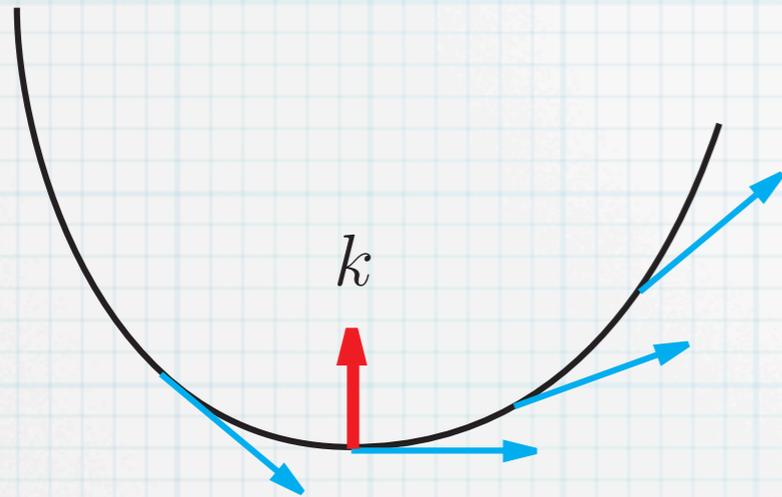
$$K > 0$$



$$K = 0$$

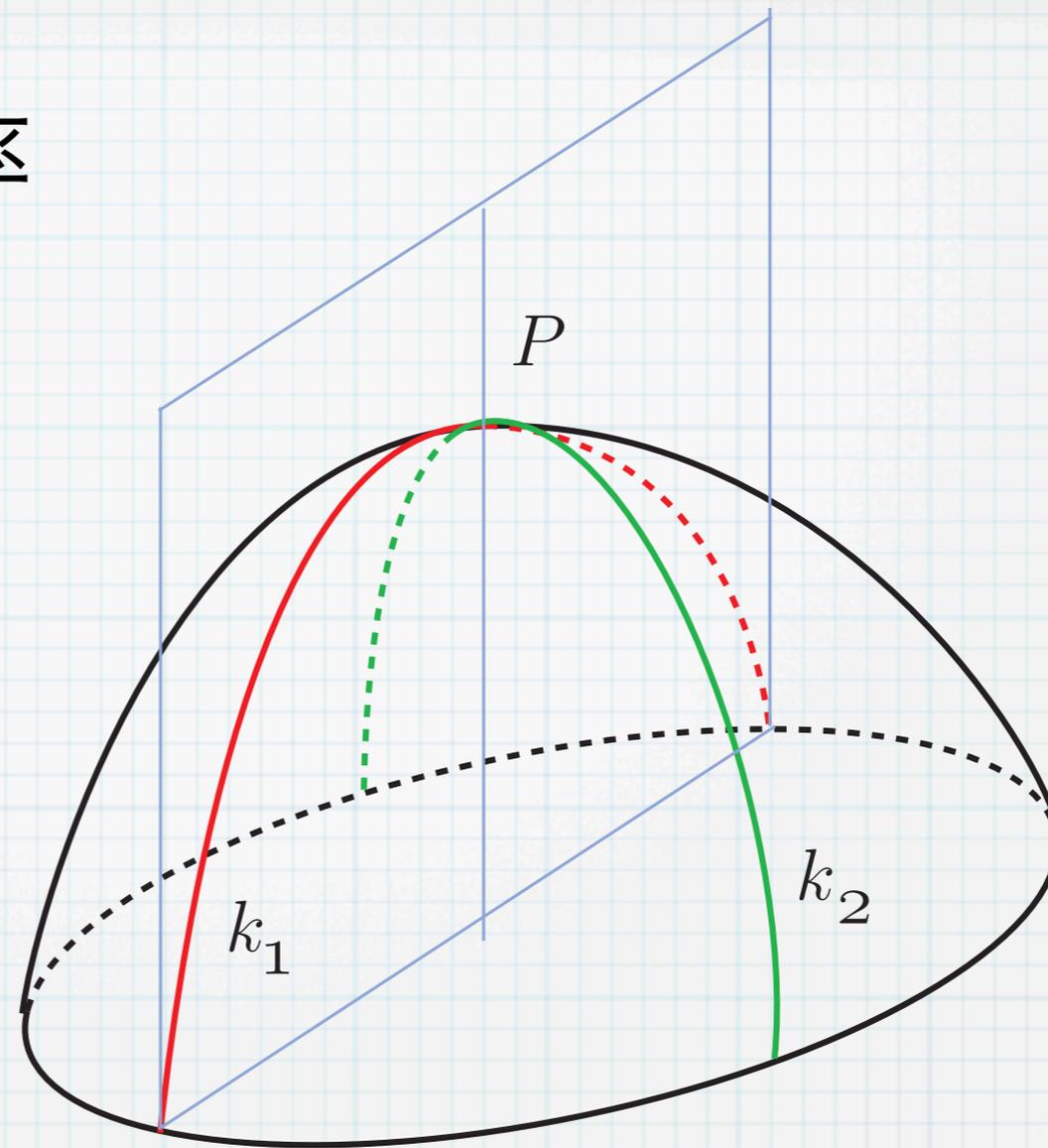
3角形の内角の和 = 180度

ガウス曲率と平均曲率

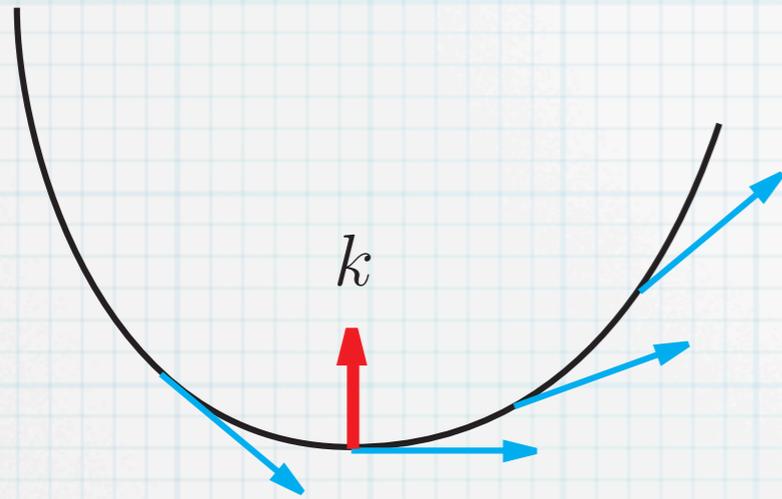


速度 1

曲線の曲率：
加速度の大きさ



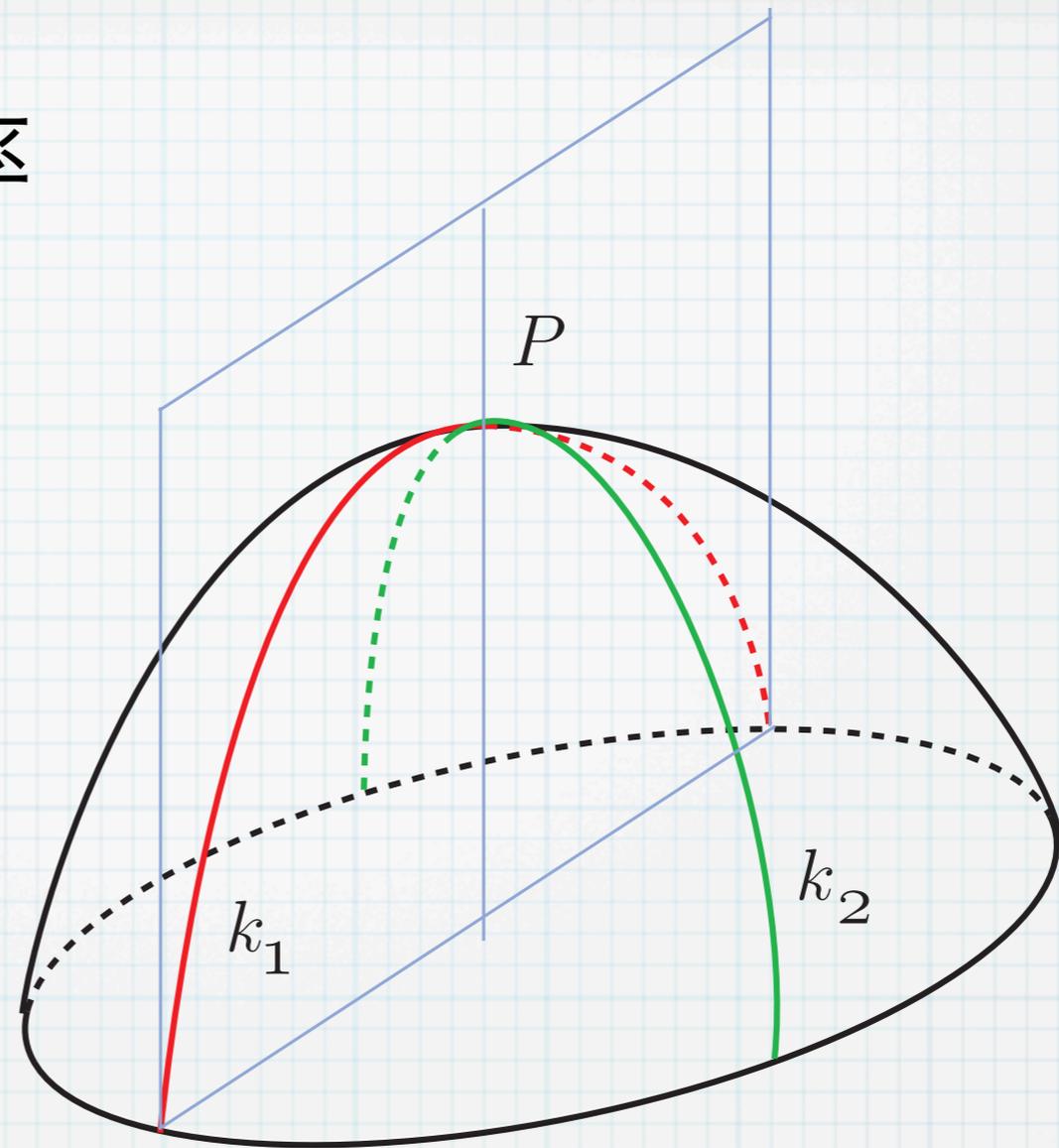
ガウス曲率と平均曲率



速さ 1

曲線の曲率：

加速度の大きさ



k_1, k_2 主曲率

ガウス曲率 $K = k_1 k_2$

平均曲率 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$



トラクトリクスを
らせんに沿って回転



トラクトリクスを
らせんに沿って回転

Dini 曲面 – 負の定曲率曲面

$$x = \frac{\cos u}{\cosh v}$$

$$y = \frac{\sin u}{\cosh v}$$

$$z = v - \tanh v + au$$

$$(0 \leq u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty)$$



トラクトリクスを
らせんに沿って回転

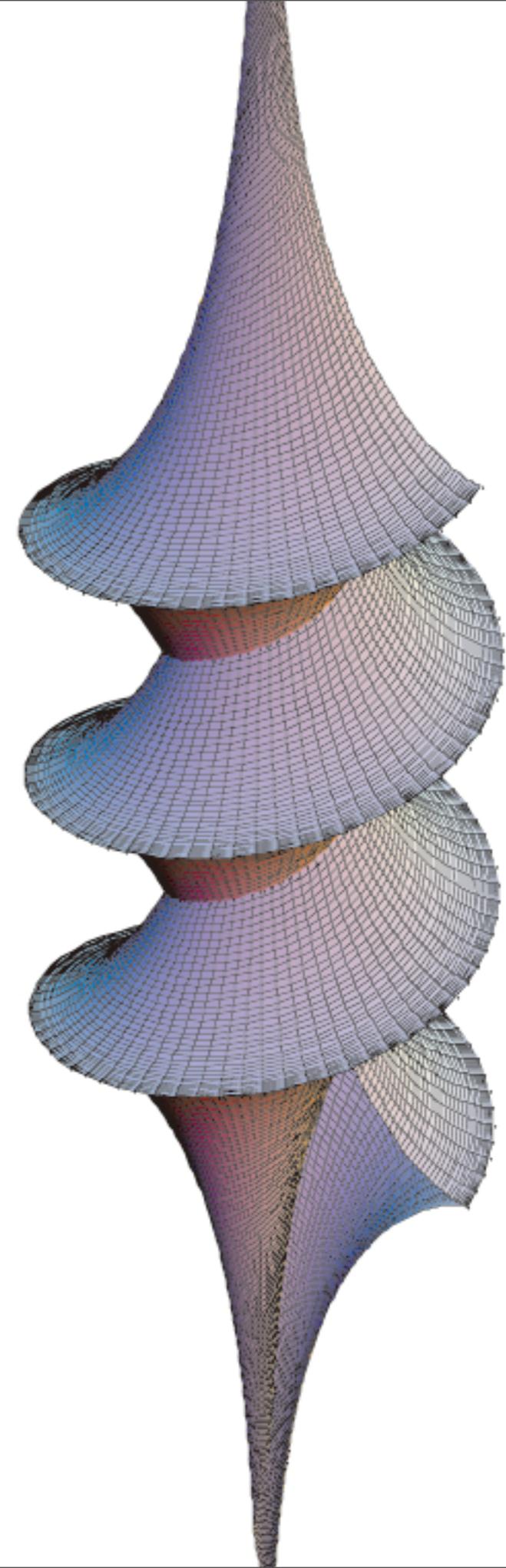
Dini 曲面 – 負の定曲率曲面

$$x = \frac{\cos u}{\cosh v}$$

$$y = \frac{\sin u}{\cosh v}$$

$$z = v - \tanh v + au$$

$$(0 \leq u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty)$$







Kuen 曲面 – 負の定曲率曲面

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$z = \log \tan \frac{v}{2} + a \cos v \quad (0 < v < \pi)$$

$$\varphi = u - \arctan u$$

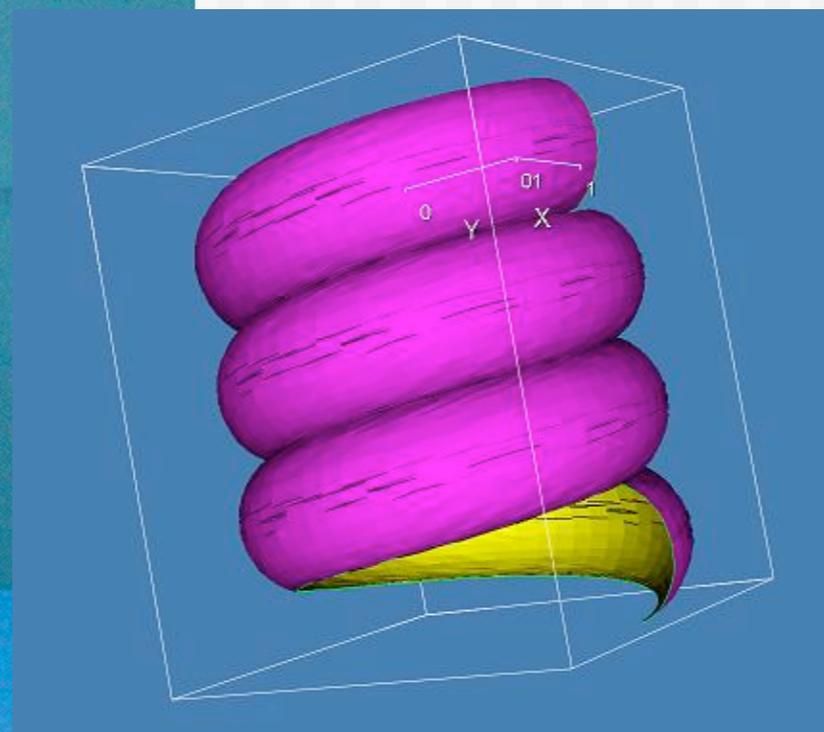
$$a = \frac{2}{1 + u^2 \sin^2 v}, \quad r = a \sqrt{1 + u^2} \sin v$$

正の定曲率曲面



Sievert曲面

正の定曲率曲面



Sievert曲面

平均曲率が一定の曲面



オンジュロイド

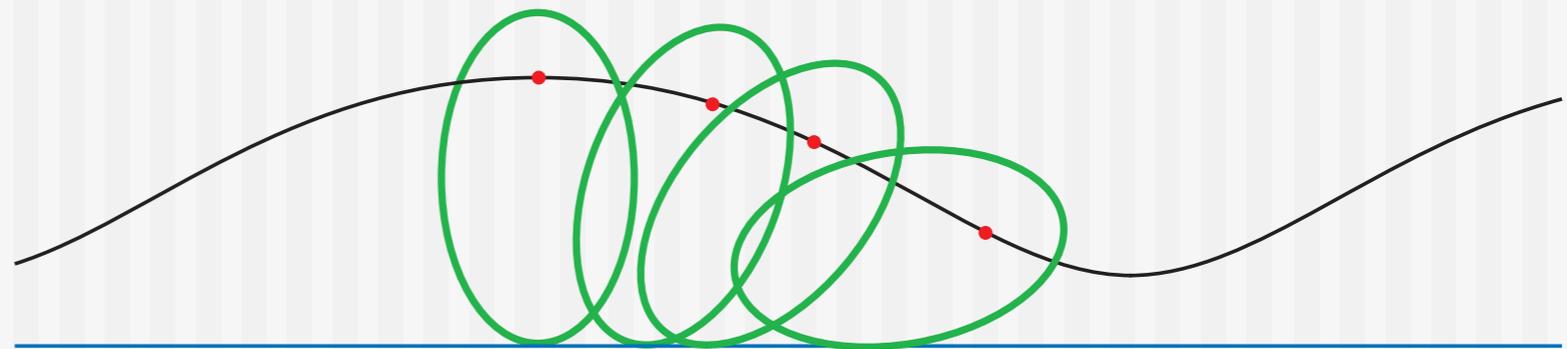
楕円を転がして得られる
曲線の回転面

平均曲率が一定の曲面



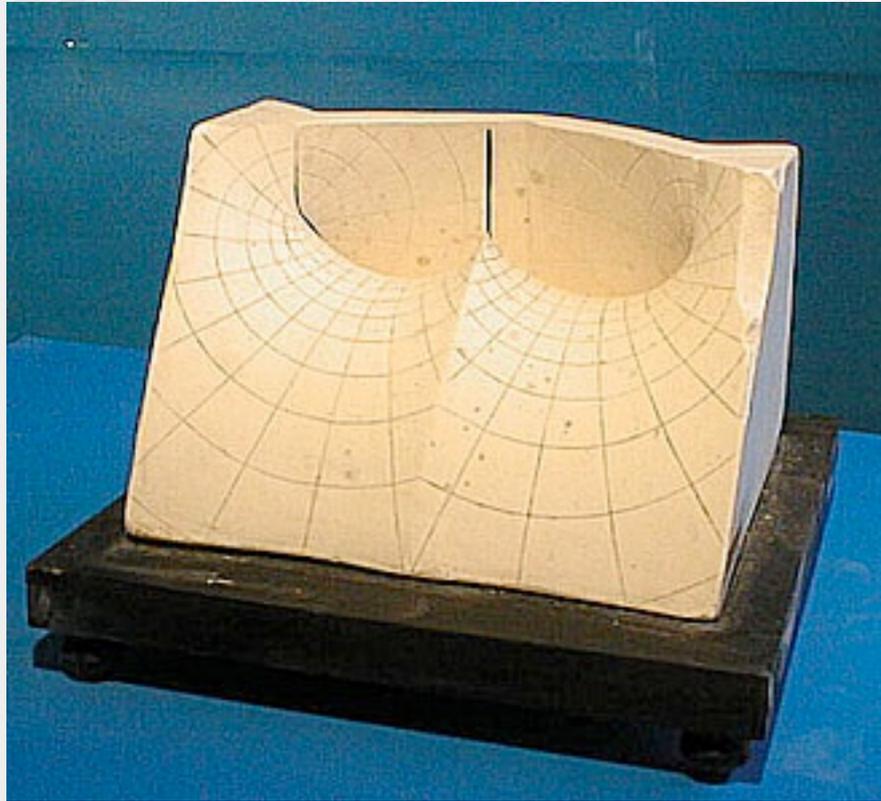
オンジュロイド

楕円を転がして得られる
曲線の回転面



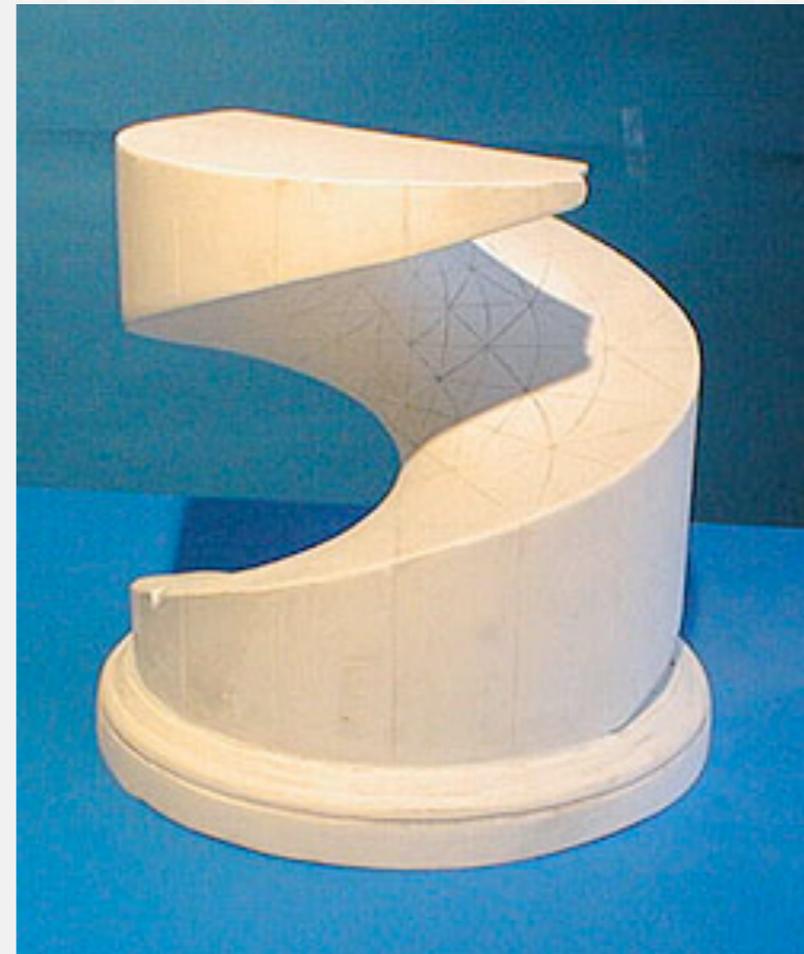
極小曲面

平均曲率 $H=0$



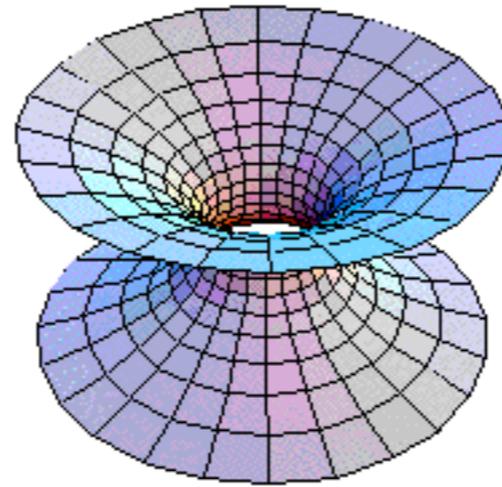
Catalan曲面

カテナノイド



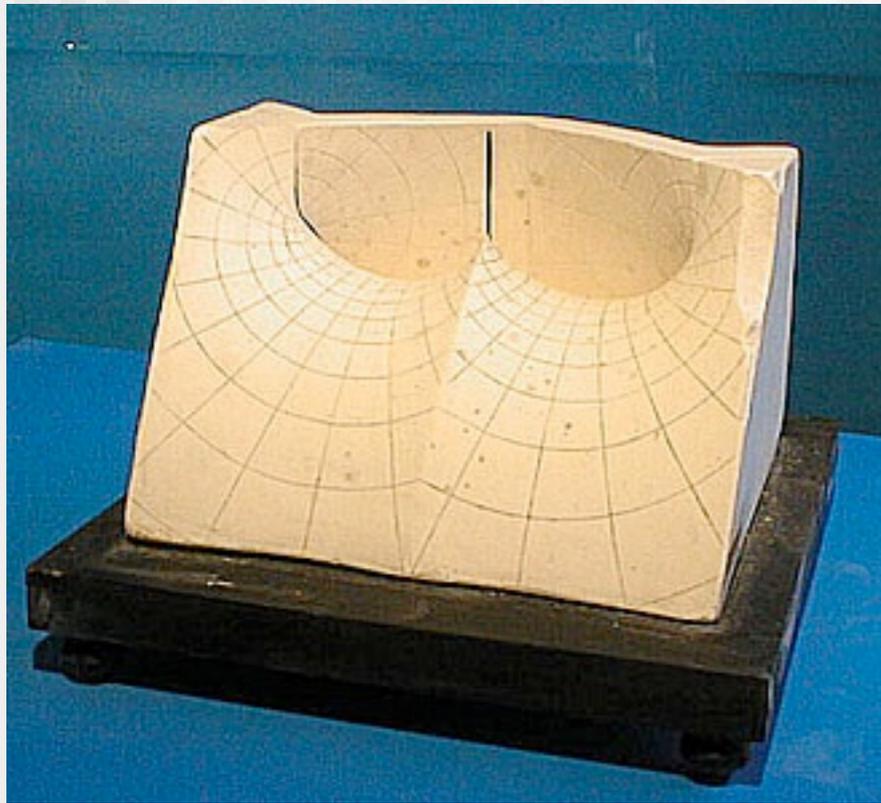
ヘリコイド

極小曲面

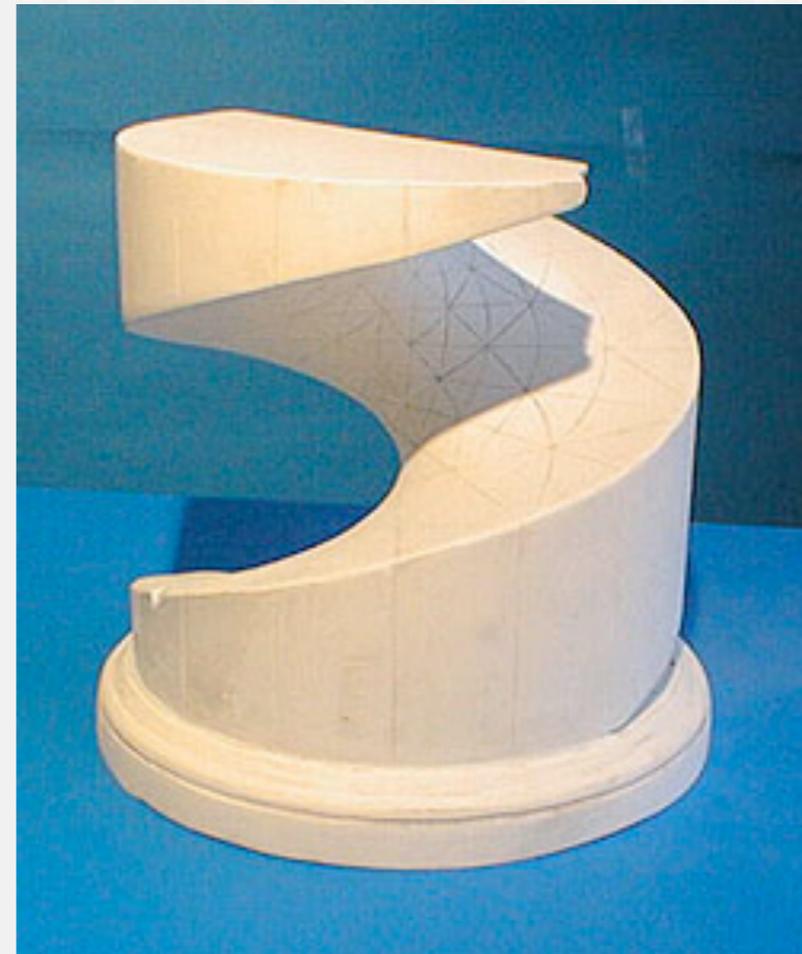


平均曲率 $H=0$

カテナイド

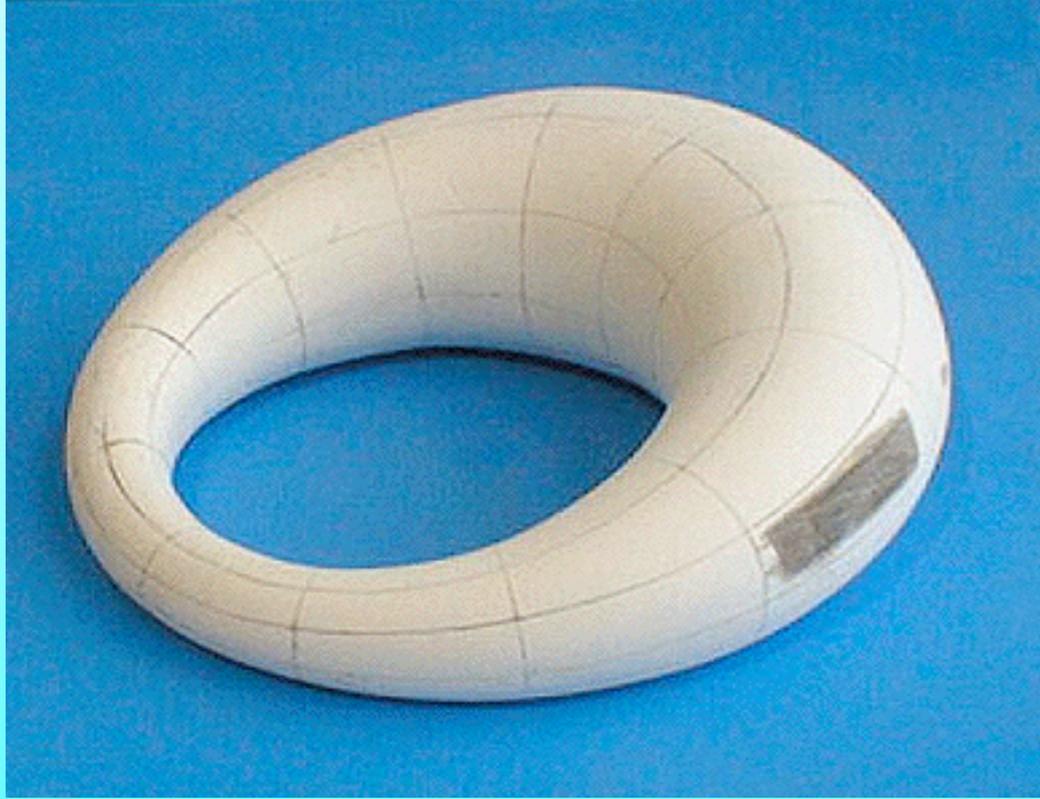


Catalan曲面

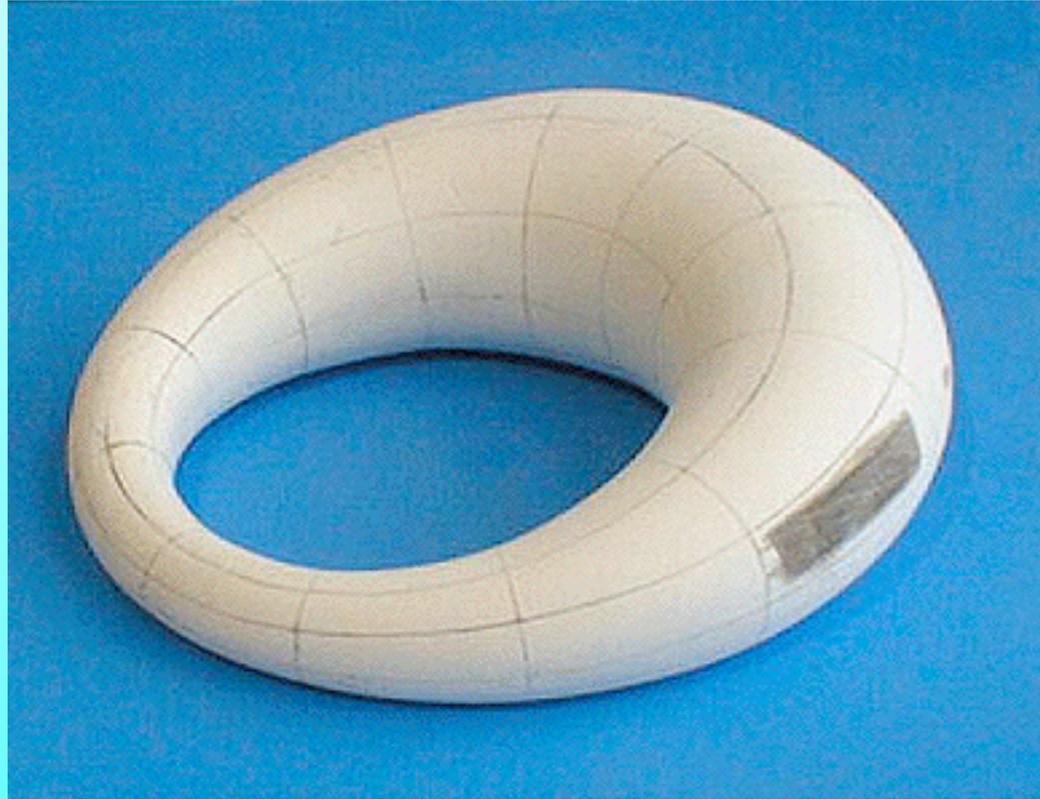


ヘリコイド

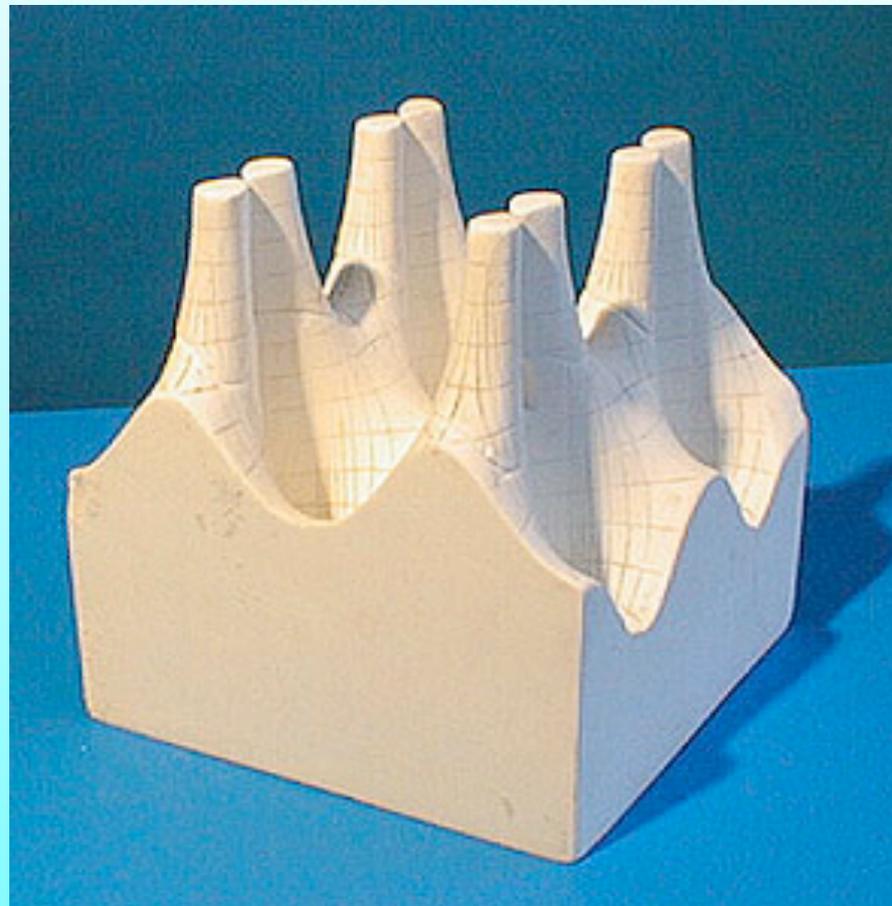
Dupin サイクリッド曲面



Dupin サイクリッド曲面

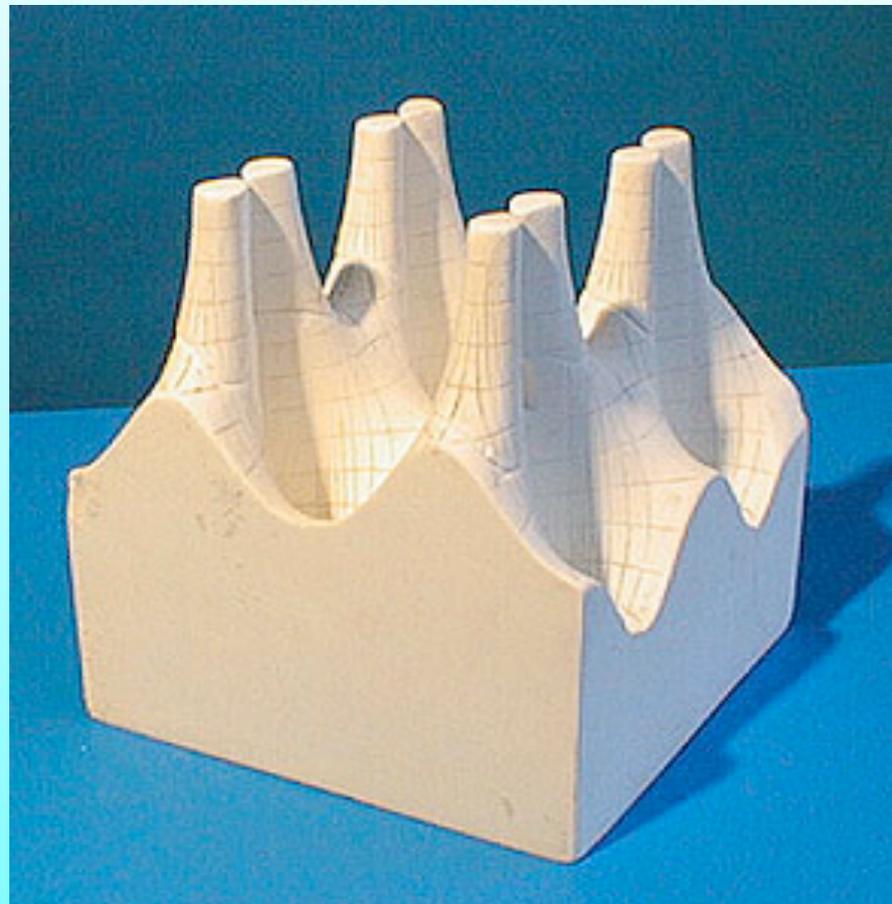


トーラスに球面に関する反転をほどこした曲面。
代数曲面としては4次曲面。
曲率曲線がすべて円となる。



複素関数のグラフ

楕円関数の実数部分

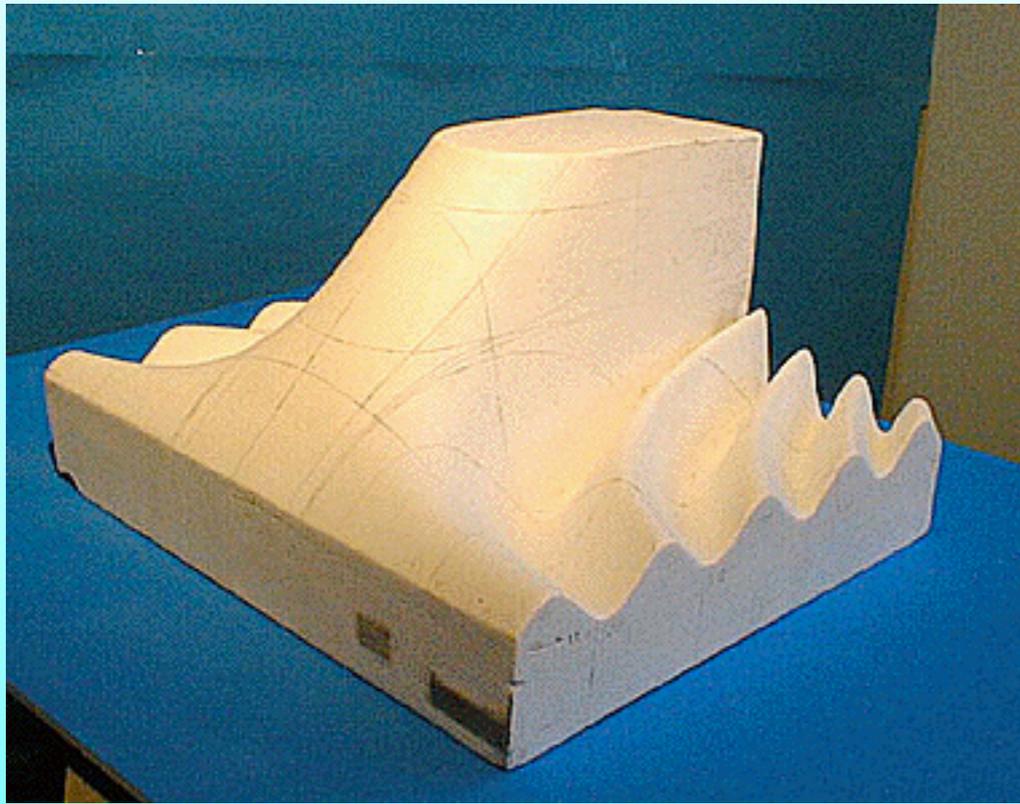


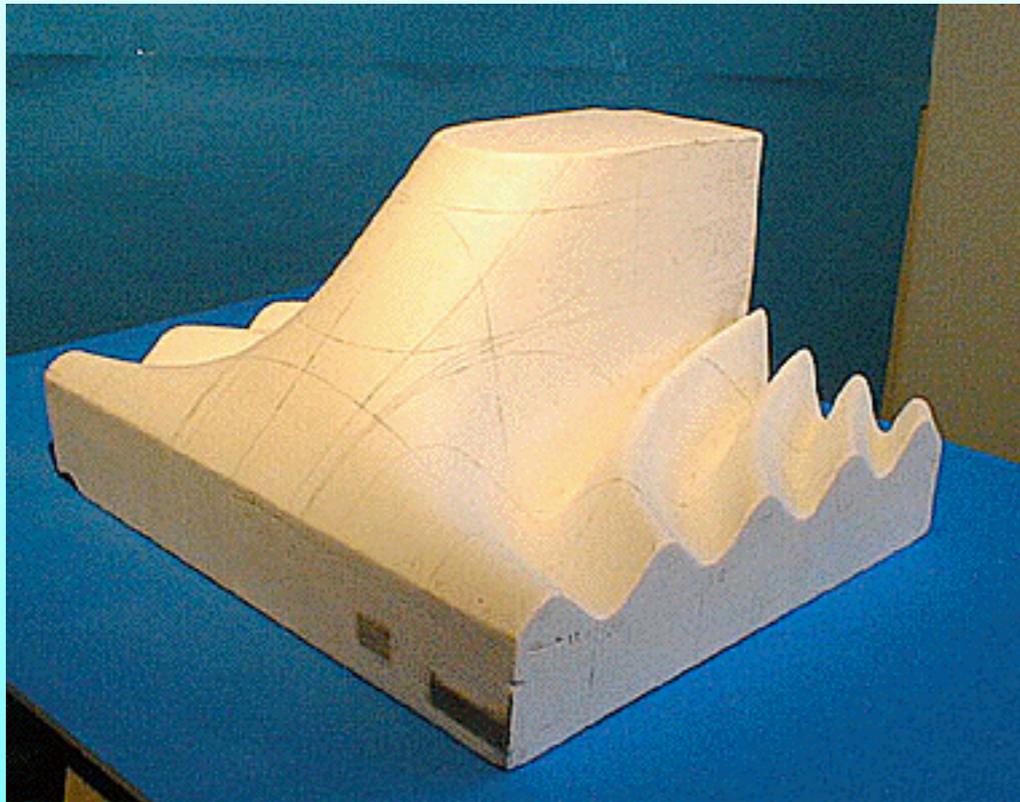
複素関数のグラフ

楕円関数の実数部分

ワイエルシュトラスの \wp 関数

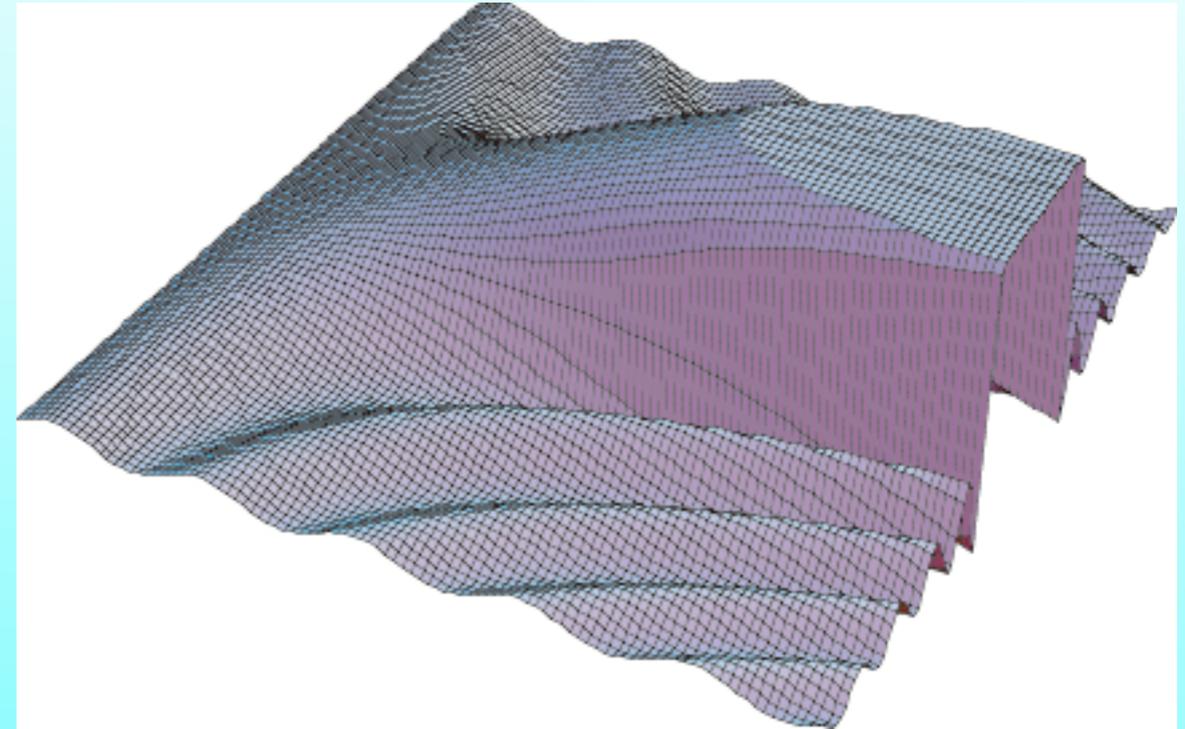
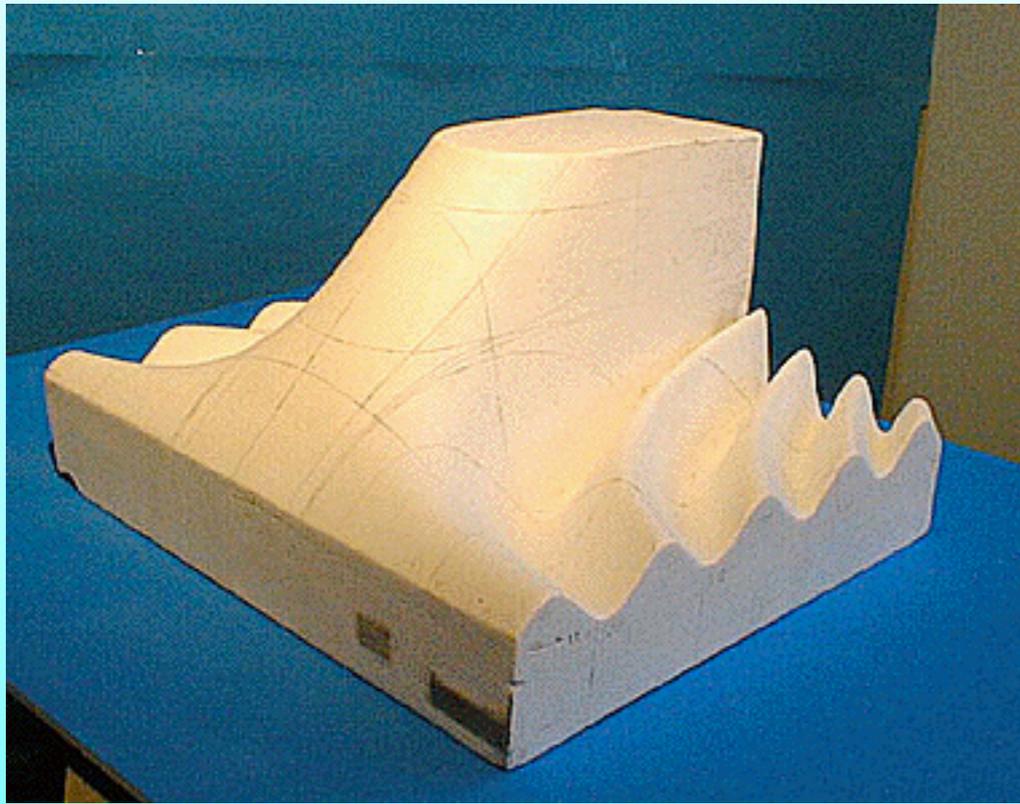
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n \in \mathbf{Z}, (m,n) \neq 0} \left(\frac{1}{(z - m - ni)^2} - \frac{1}{(m + ni)^2} \right)$$





ヤコビの楕円積分

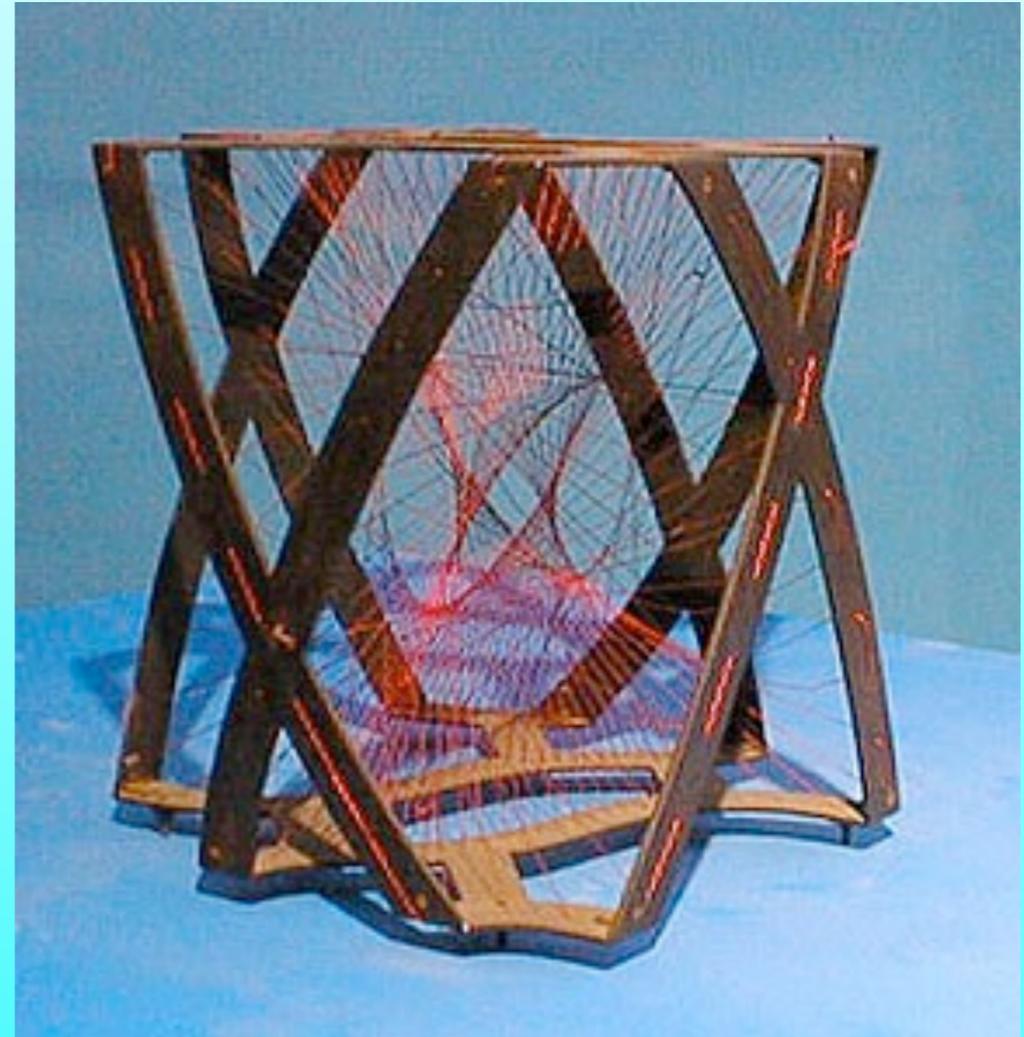
$$u = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$



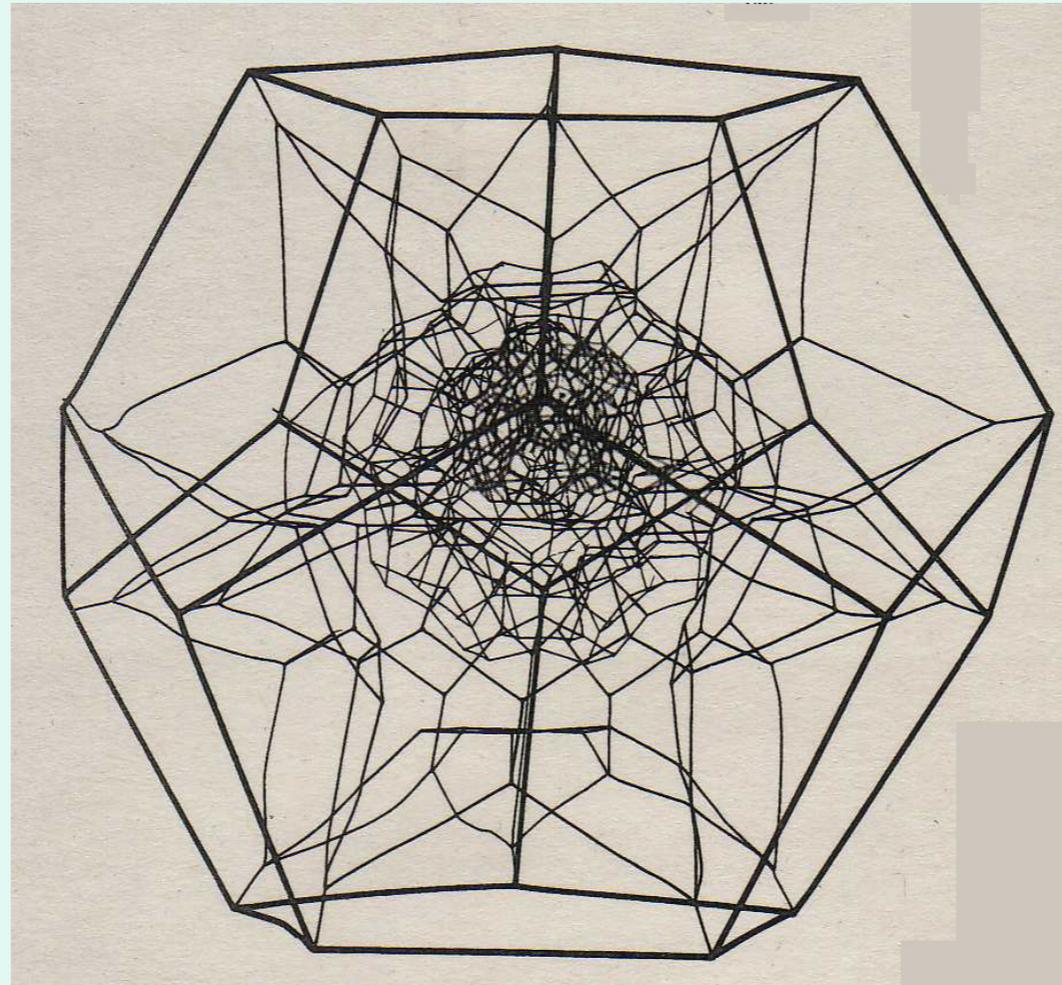
ヤコビの楕円積分

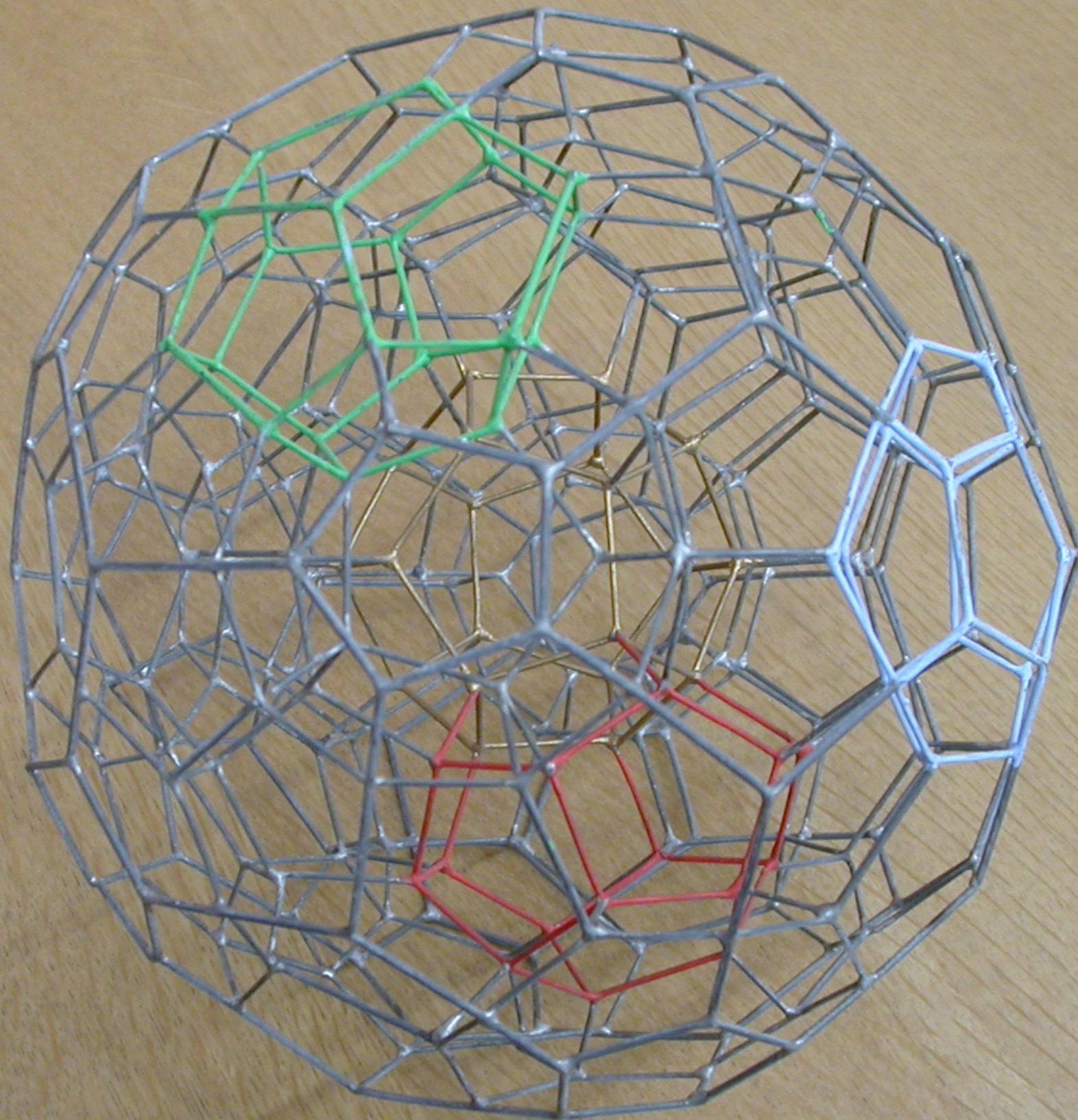
$$u = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

線織面のモデル



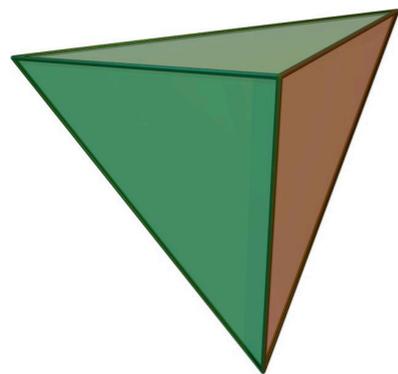
東大数理所蔵の正120胞体の模型



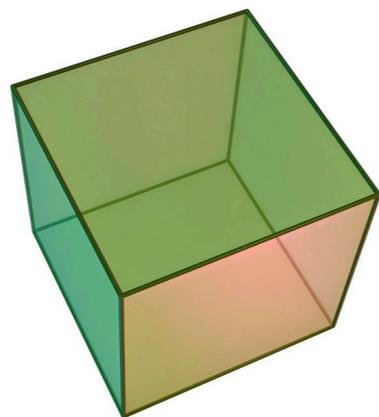


乙部融朗氏による正120胞体の模型

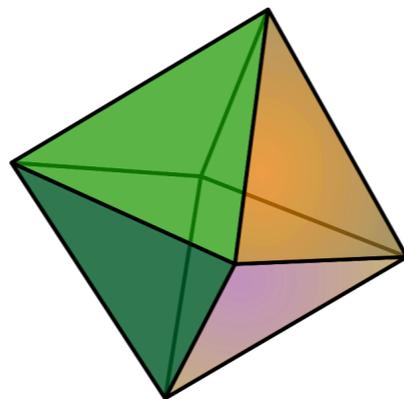
シュレフリー記号



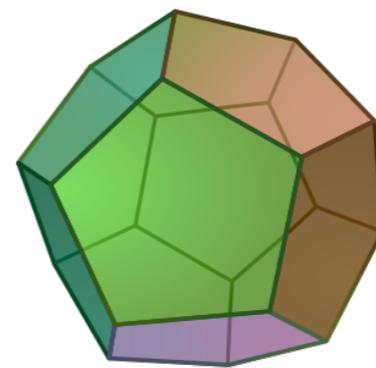
$\{3, 3\}$



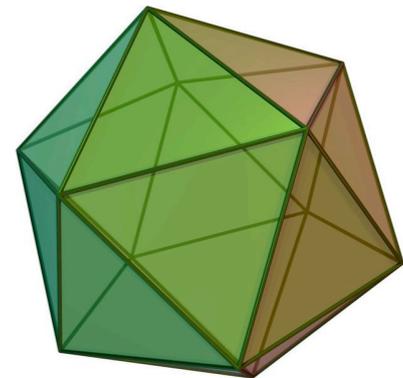
$\{4, 3\}$



$\{3, 4\}$



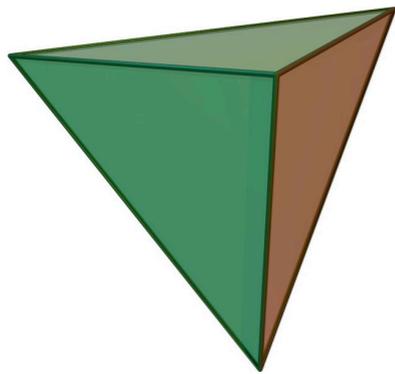
$\{5, 3\}$



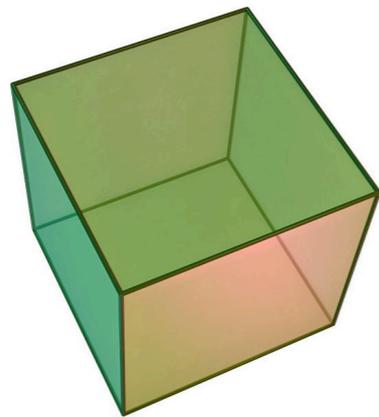
$\{3, 5\}$

シュレフリー記号

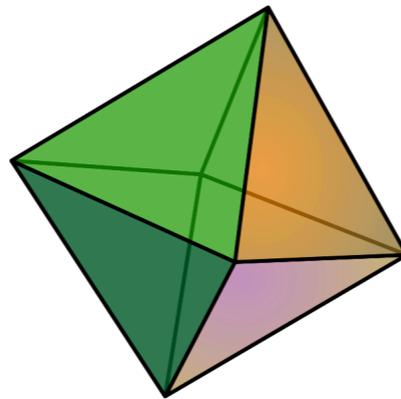
$\{n\}$ 正 n 角形



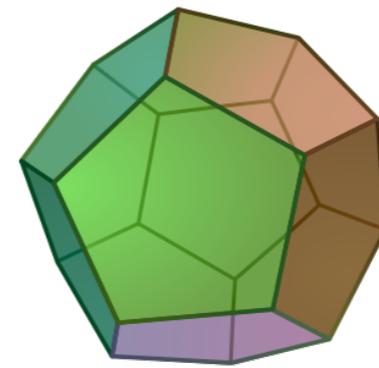
$\{3, 3\}$



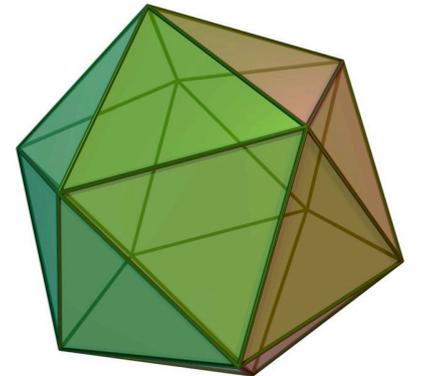
$\{4, 3\}$



$\{3, 4\}$



$\{5, 3\}$

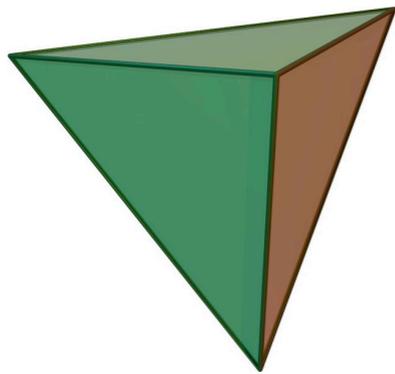


$\{3, 5\}$

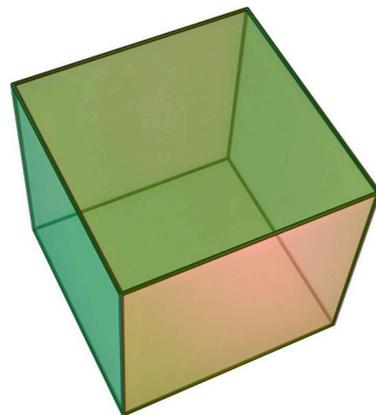
シュレフリー記号

$\{n\}$ 正 n 角形

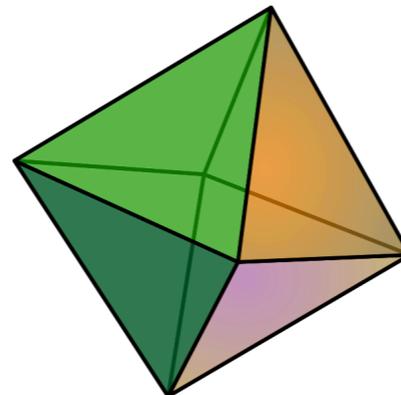
$\{p, q\}$ 正多角形 $\{p\}$ がそれぞれの頂点の



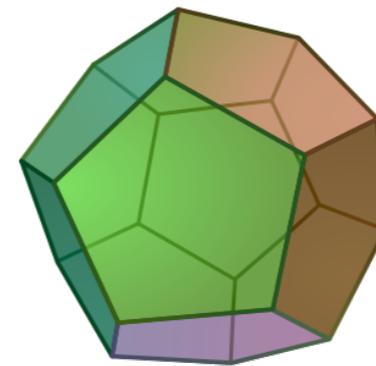
$\{3, 3\}$



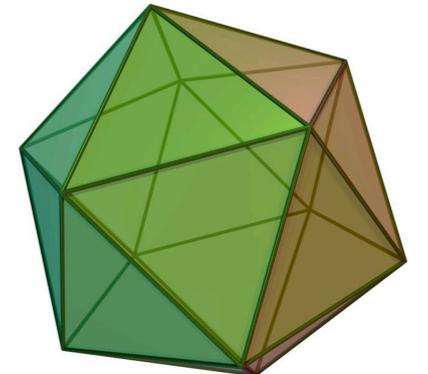
$\{4, 3\}$



$\{3, 4\}$



$\{5, 3\}$

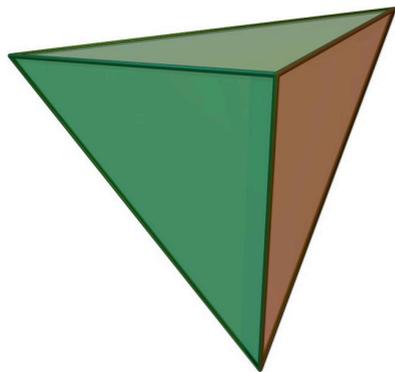


$\{3, 5\}$

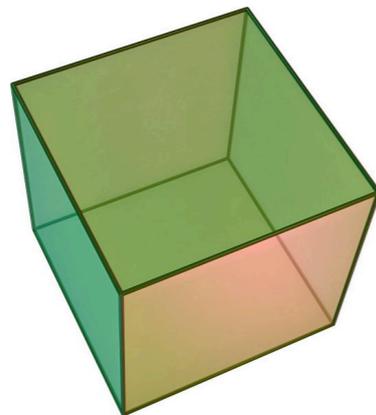
シュレフリー記号

$\{n\}$ 正 n 角形

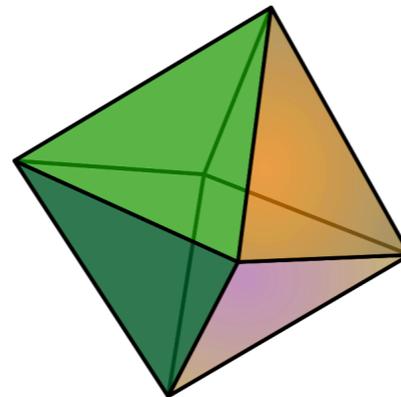
$\{p, q\}$ 正多角形 $\{p\}$ がそれぞれの頂点のまわりに q 個集まる正則分割



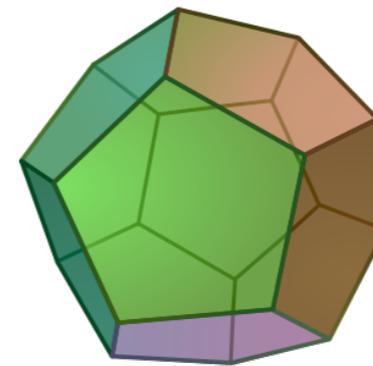
$\{3, 3\}$



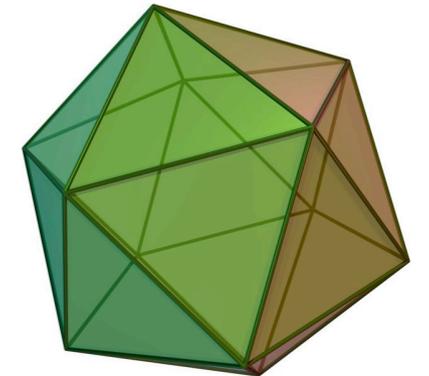
$\{4, 3\}$



$\{3, 4\}$

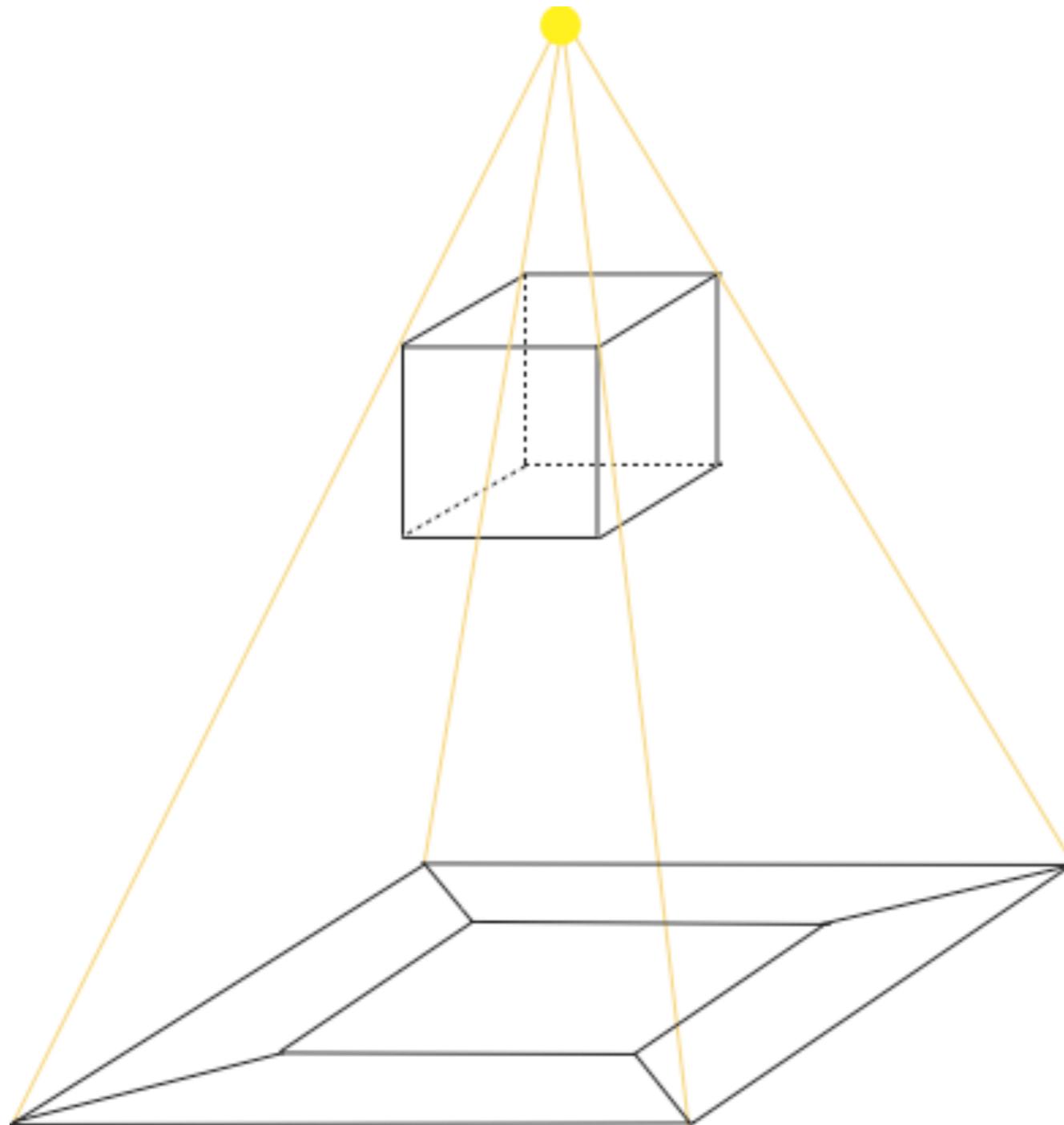


$\{5, 3\}$



$\{3, 5\}$

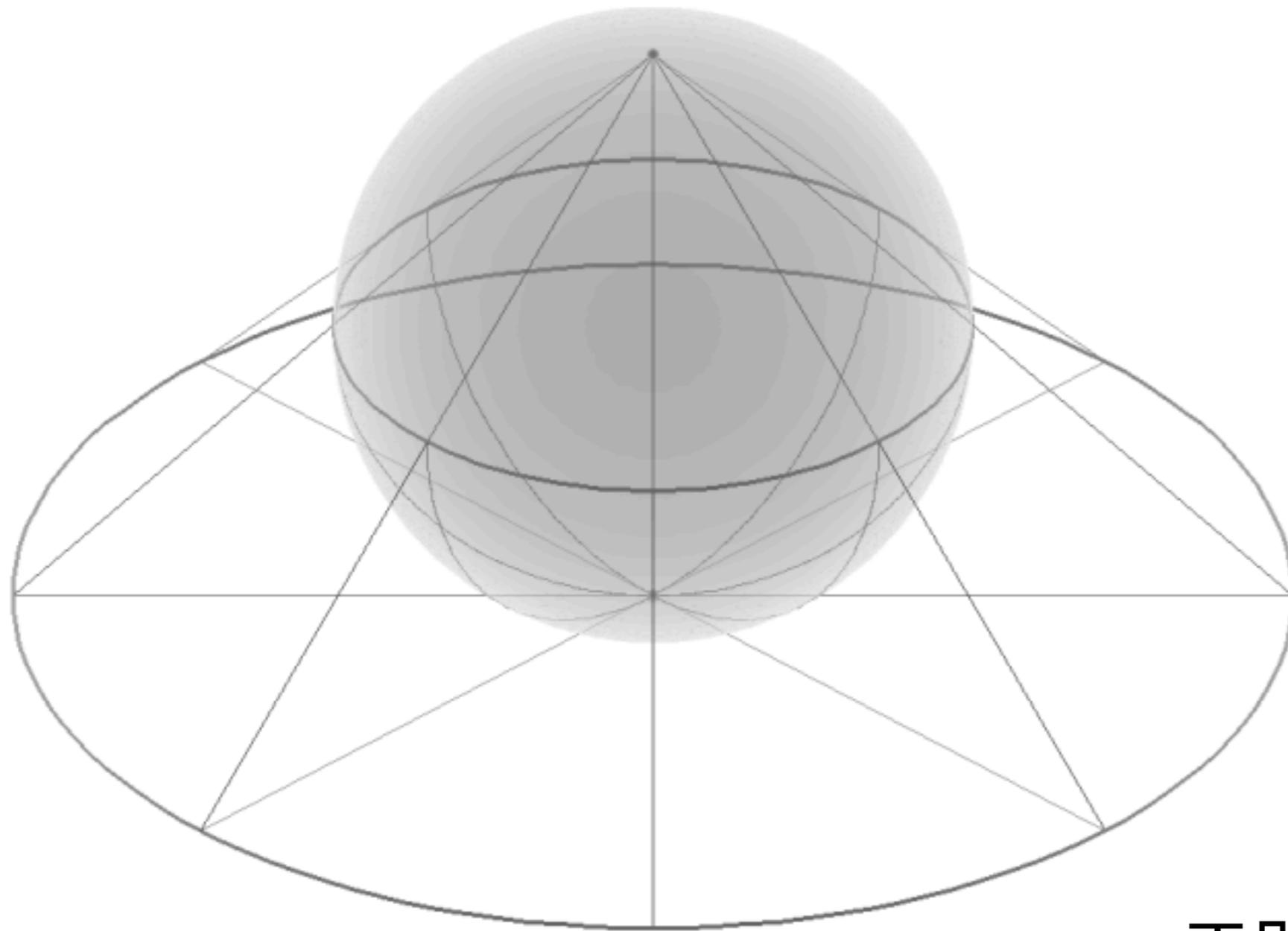
立方体の射影



1点から発する光
による射影.

立方体の1つの面
を取り除いてそこ
から内部を眺めた
像が得られる.

球面の立体射影

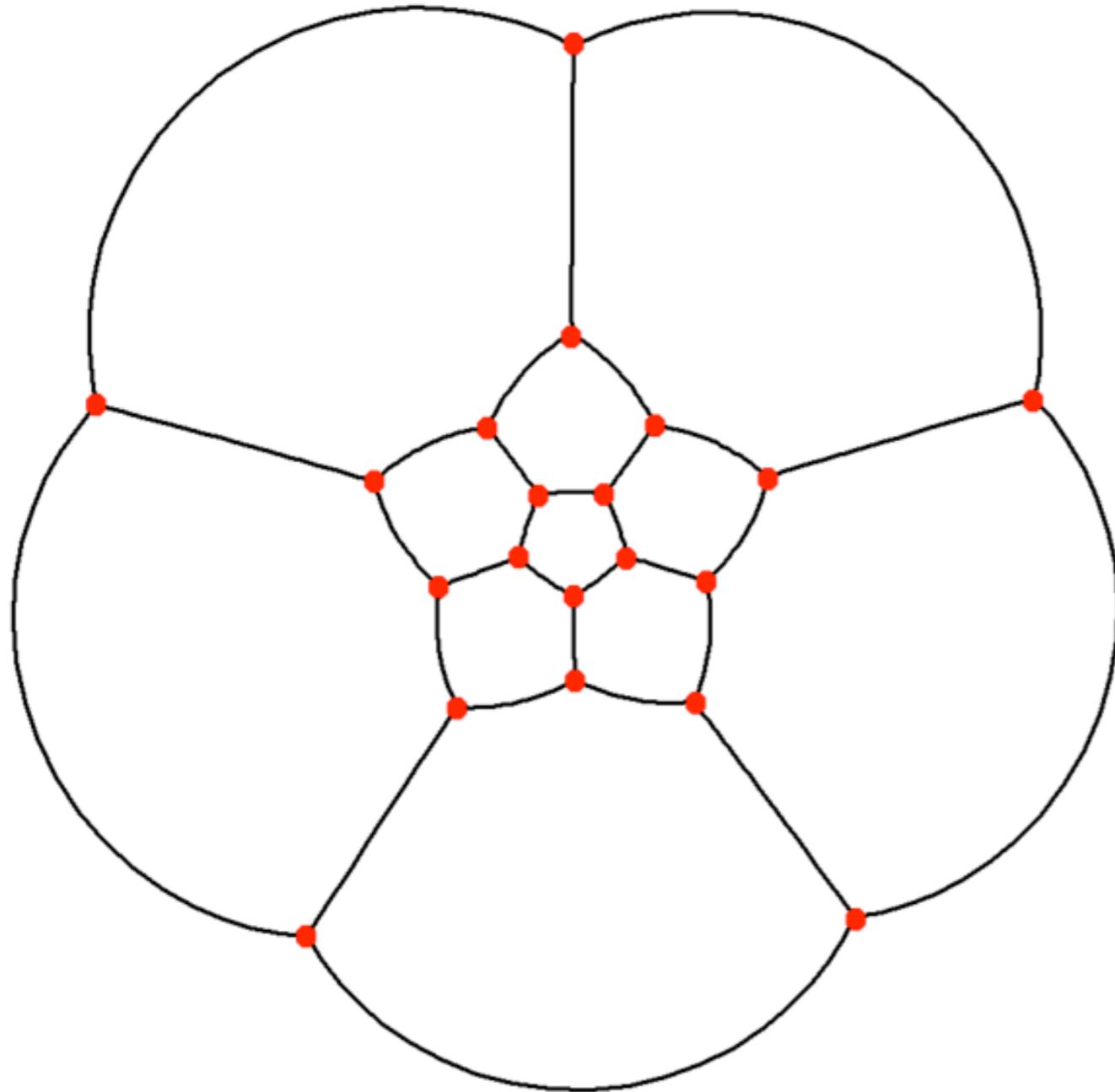


球面の北極点
以外の点は平面
と1対1に対応

球面は平面に
無限遠点をつけ
加えたものとみな
せる。

正則分割の立体射影

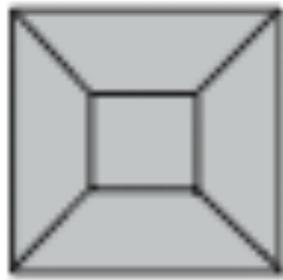
正12面体の立体射影



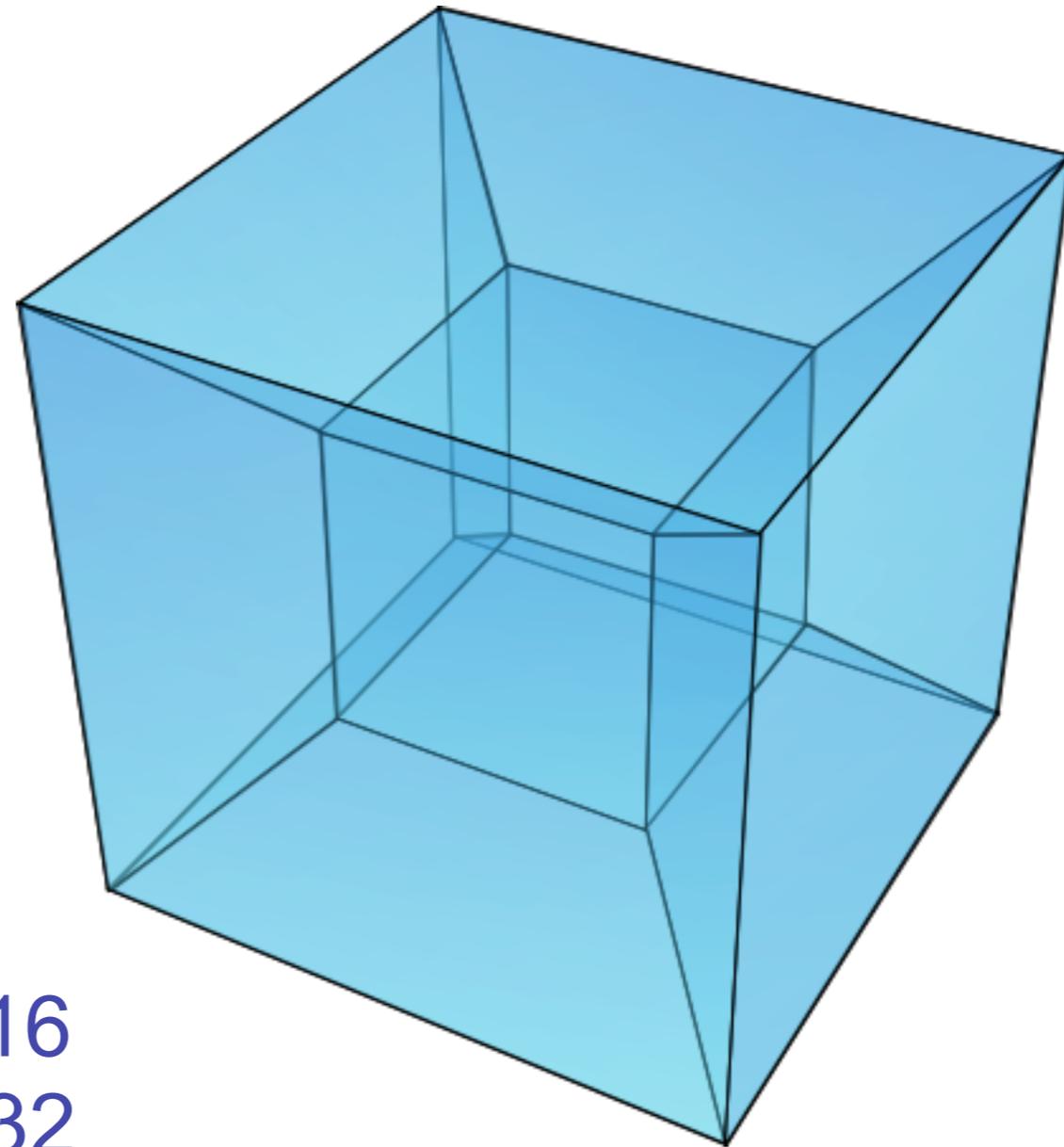
平面の12個の領域
への分割.

外側の領域も無限遠点
を加えて, 正12面体の
1つの面に対応.

4次元立方体(hypercube)



立方体の射影図



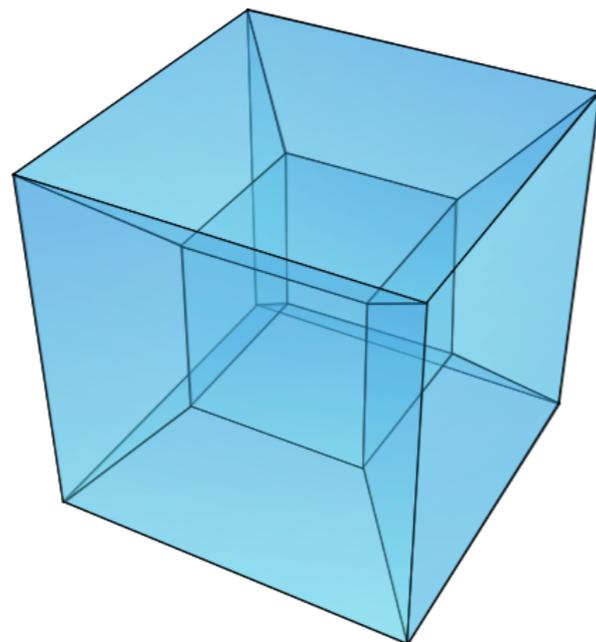
0-セル(頂点)	16
1-セル(辺)	32
2-セル(面)	24
3-セル	8

4次元空間の正多面体のシュレフリー記号

シュレフリー記号 $\{p, q, r\}$

正多面体 $\{p, q\}$ が辺のまわりに r 個集まる.

各頂点のまわりの2次元球面による切り口の分割のタイプが $\{q, r\}$.



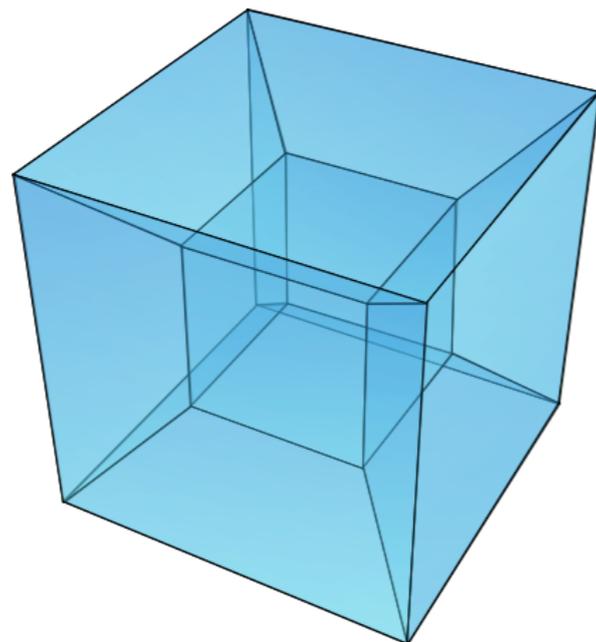
空間の分割: 正多胞体

4次元空間の正多面体のシュレフリー記号

シュレフリー記号 $\{p, q, r\}$

正多面体 $\{p, q\}$ が辺のまわりに r 個集まる.

各頂点のまわりの2次元球面による切り口の分割のタイプが $\{q, r\}$.



空間の分割: 正多胞体

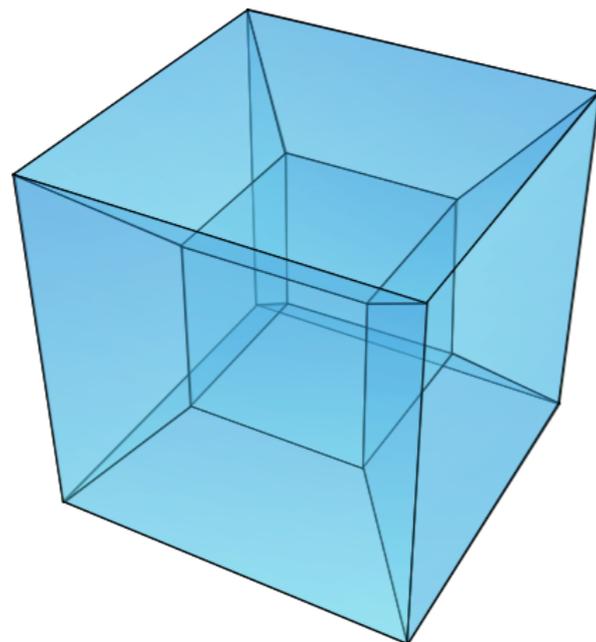
正8胞体 (hypercube)

4次元空間の正多面体のシュレフリー記号

シュレフリー記号 $\{p, q, r\}$

正多面体 $\{p, q\}$ が辺のまわりに r 個集まる.

各頂点のまわりの2次元球面による切り口の分割のタイプが $\{q, r\}$.

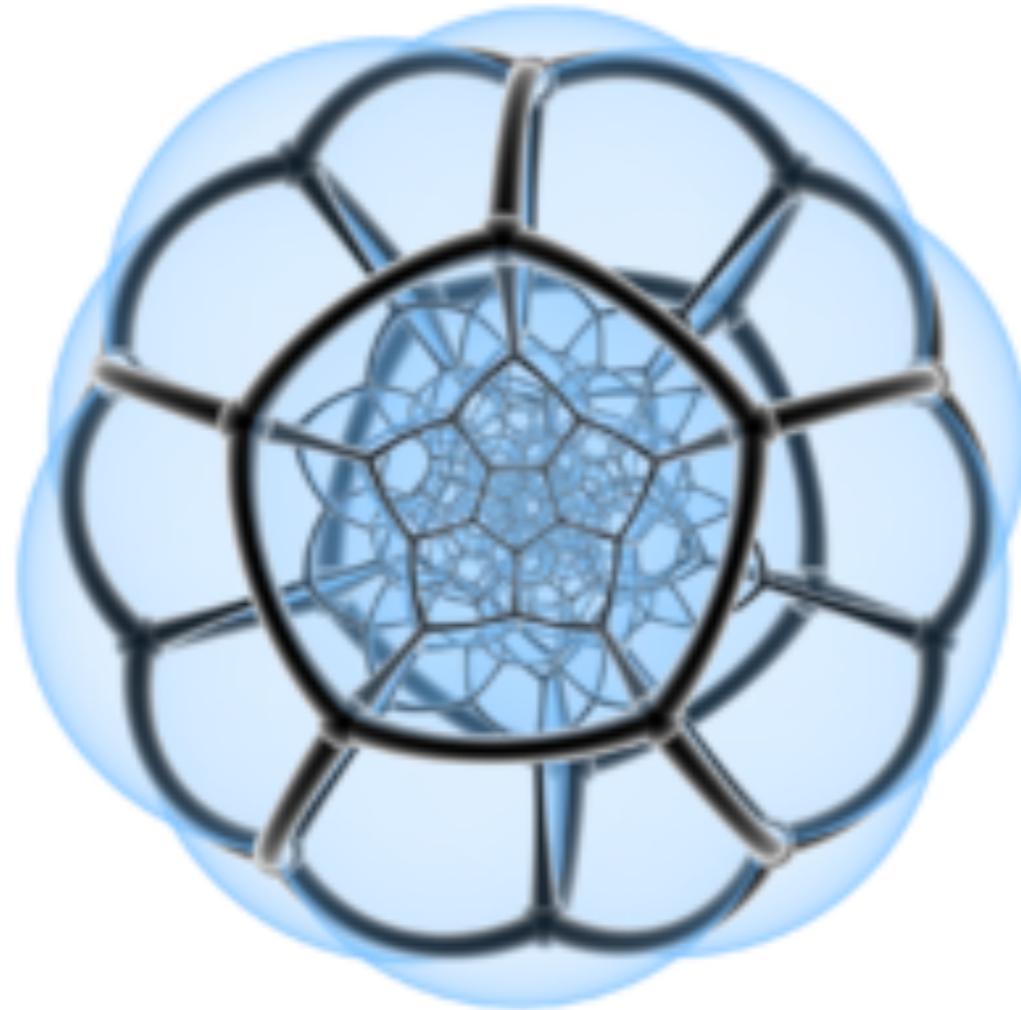


空間の分割: 正多胞体

正8胞体 (hypercube)

$\{4, 3, 3\}$

正120胞体の立体射影



3次元ユークリッド空間の120個の領域による分割を与える.

3次元球面の120個のセルによる正則分割.

4次元空間の正多面体(regular polytope)の分類

	シュレフリー記号	3-セル	頂点数
正5胞体	{3, 3, 3}	正4面体	5
正8胞体	{4, 3, 3}	立方体	16
正16胞体	{3, 3, 4}	正4面体	8
正24胞体	{3, 4, 3}	正8面体	24
正120胞体	{5, 3, 3}	正12面体	600
正600胞体	{3, 3, 5}	正4面体	120

シュレフリーにより19世紀半ばに示された。



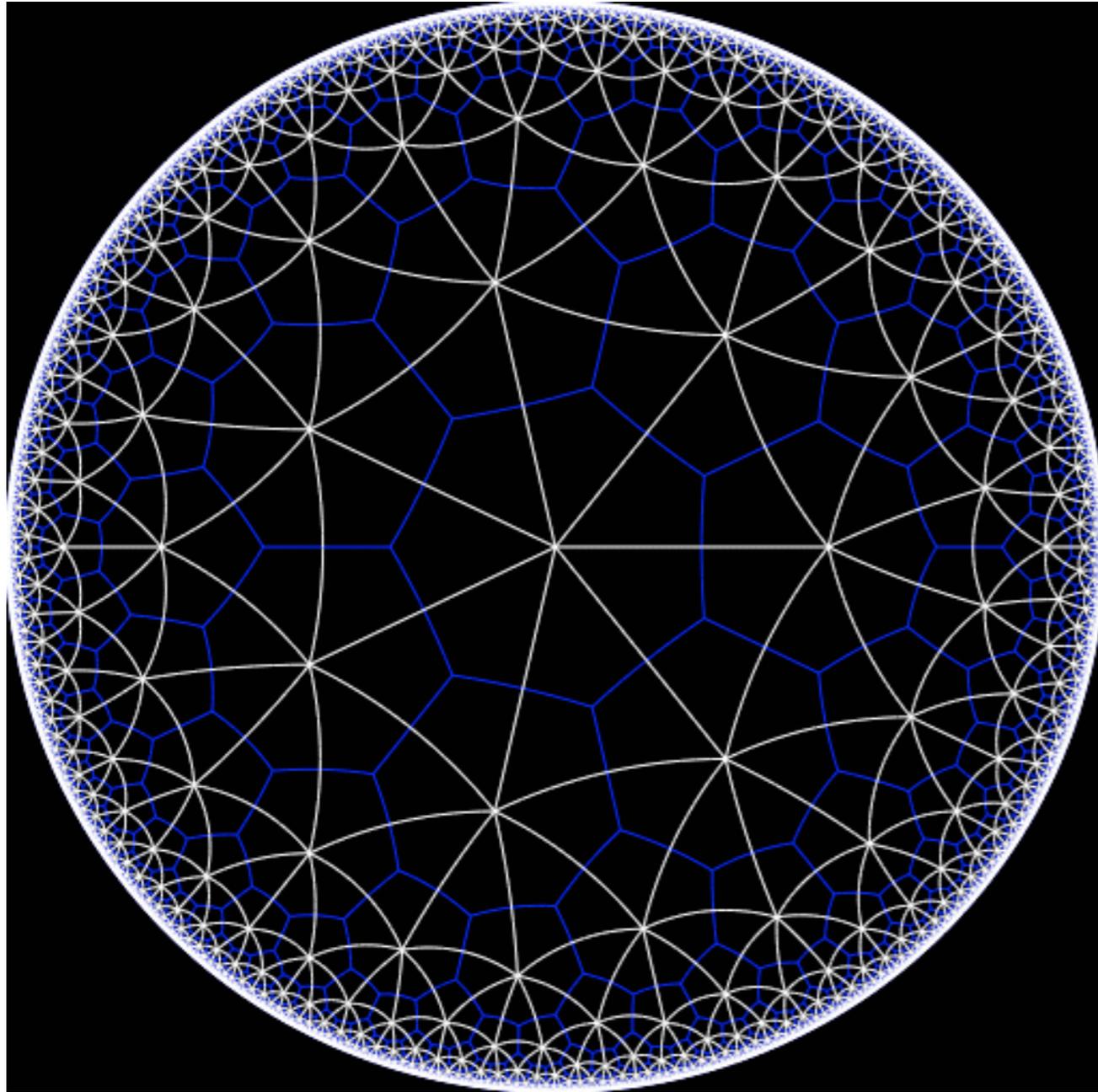
Ludwig Schläfli (1814 - 1895)

Theorie der vielfachen
Kontinuität 1850 - 52

Riemann : Hypothesen welche der
Geometrie zu Grunde liegen 1854

双曲幾何のモデル

ポアンカレ円板 (双曲平面)

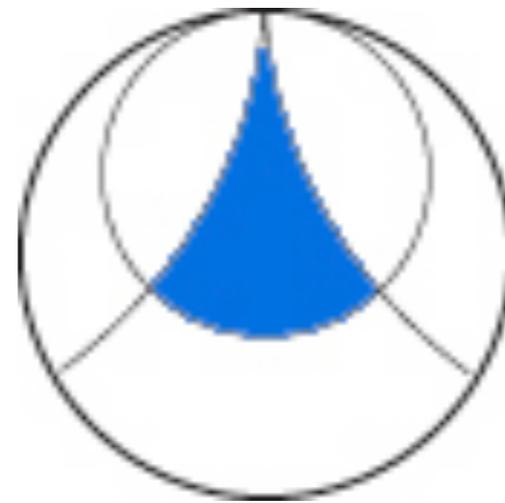
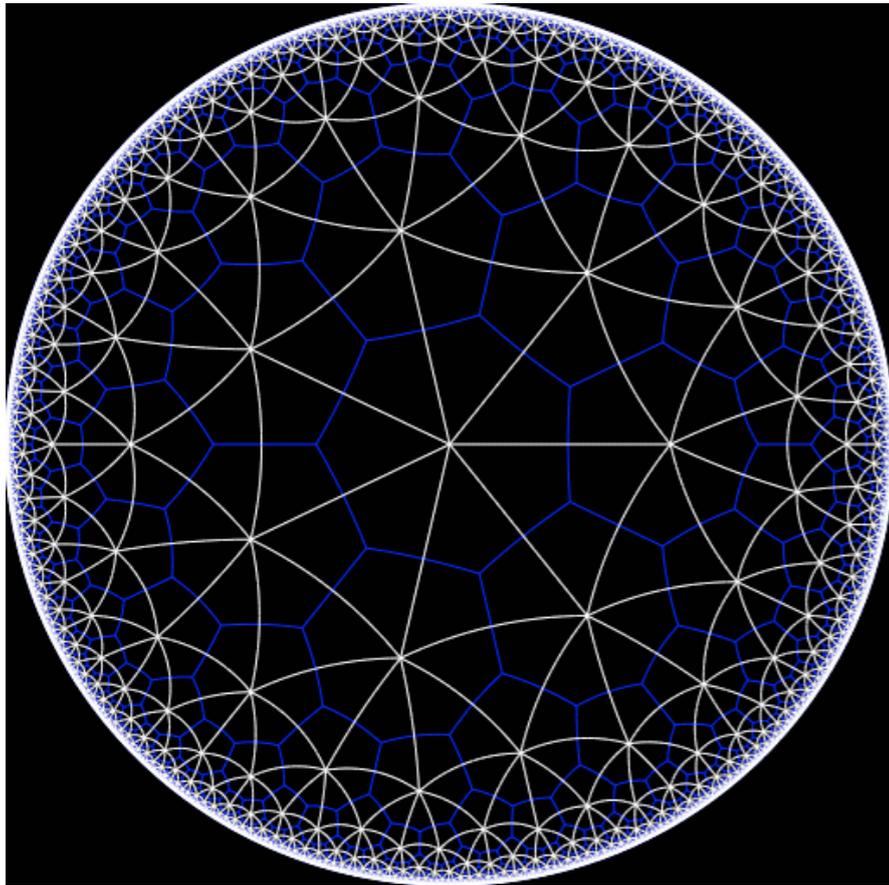


測地線は無限遠の円周と
直交する円弧

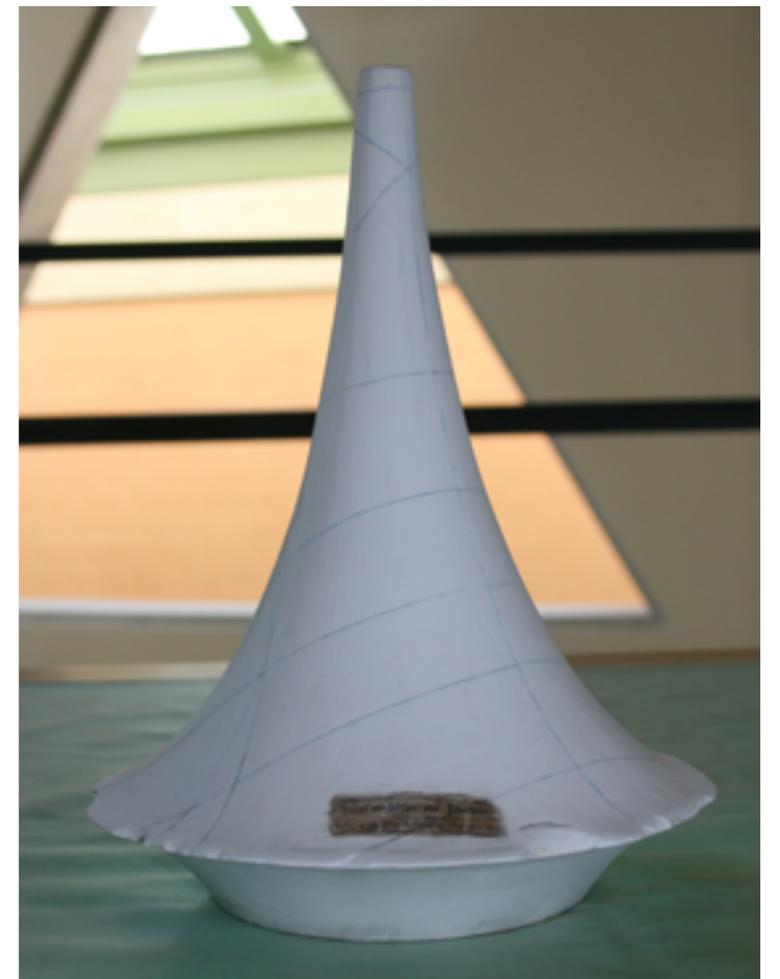
三角形の内角の和は
180度より小さい

非ユークリッド幾何のモデル

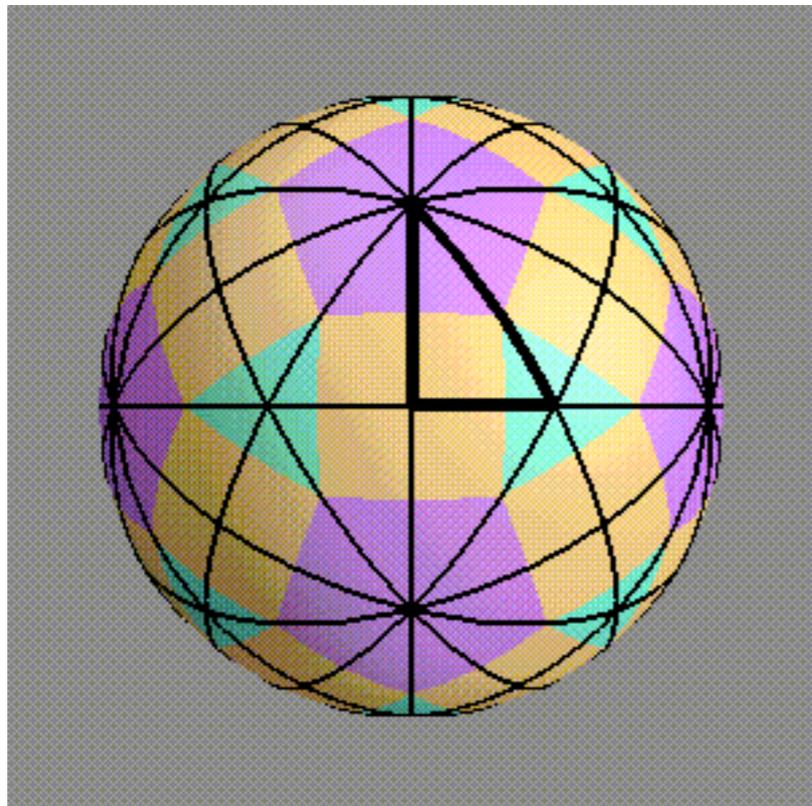
擬球と双曲平面



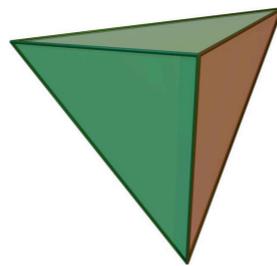
擬球の展開図を双曲平面上
に表すことができる。



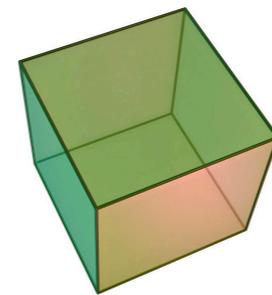
球面の正則分割(タイルばり)



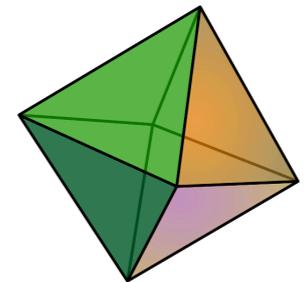
合同な正多角形が各頂点
のまわりに同じ個数集まっ
ている。



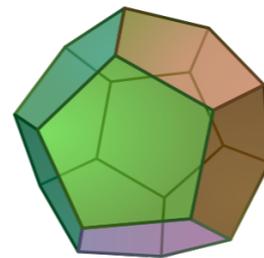
$\{3, 3\}$



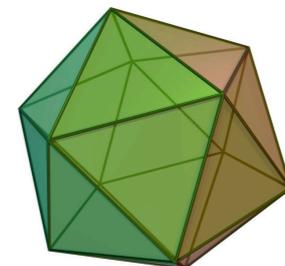
$\{4, 3\}$



$\{3, 4\}$

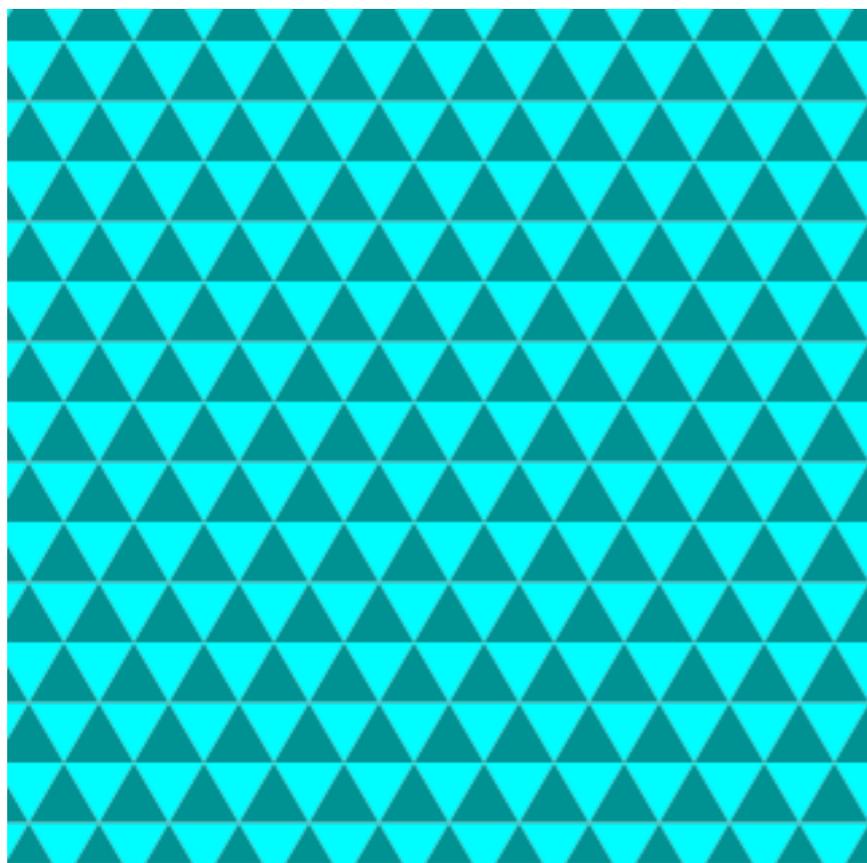


$\{5, 3\}$

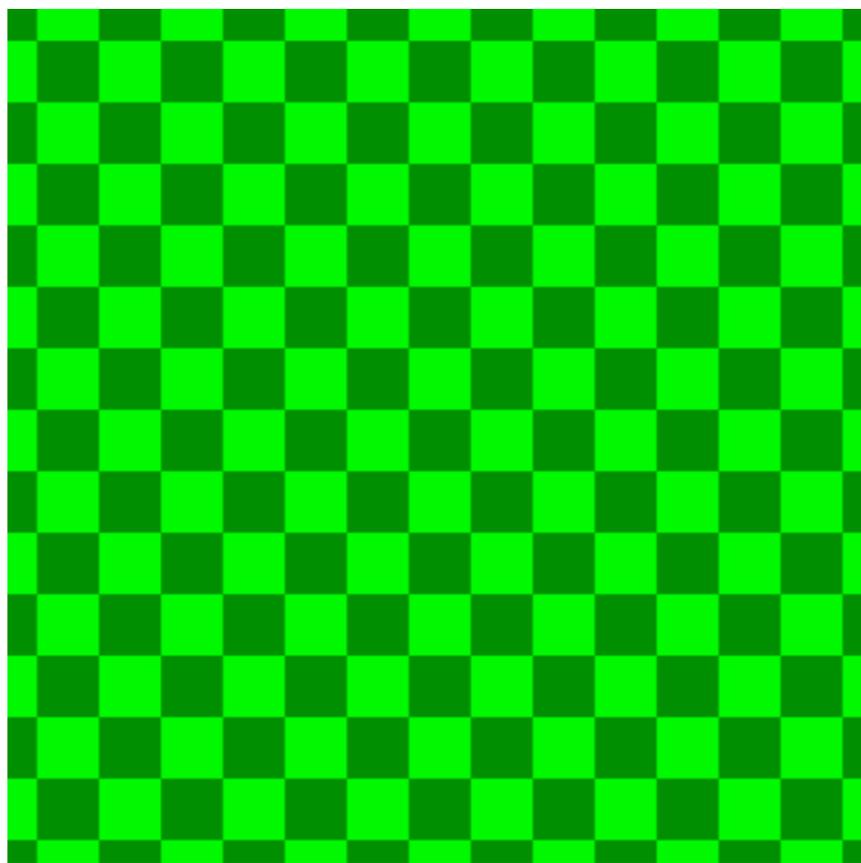


$\{3, 5\}$

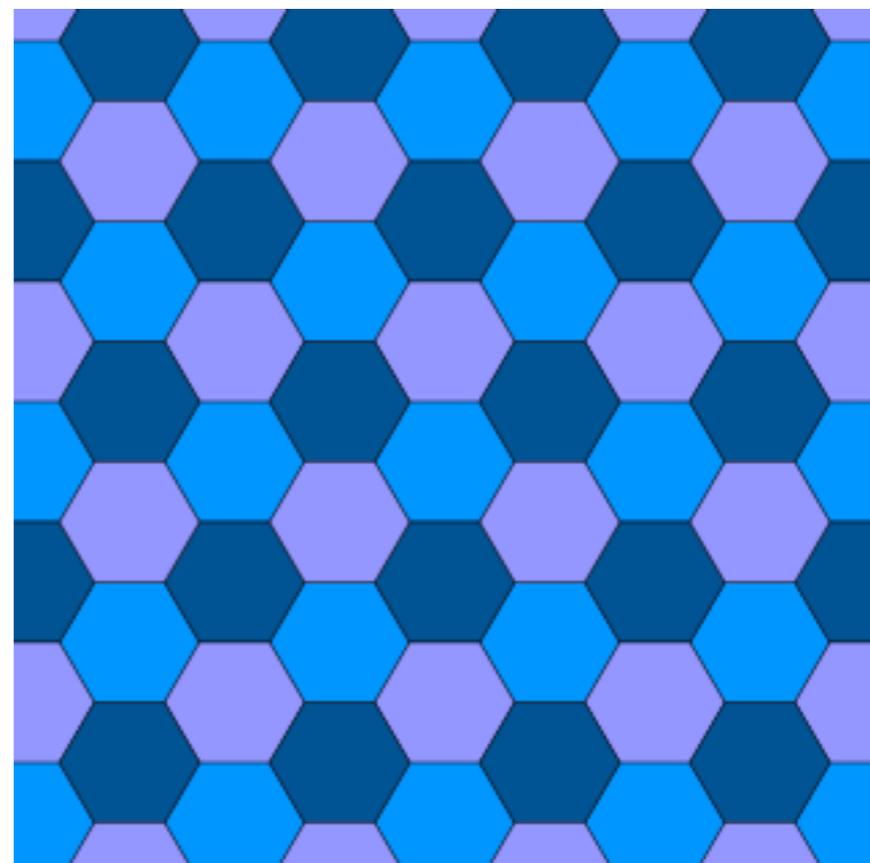
ユークリッド平面の正則分割 (タイルばり)



$\{3, 6\}$

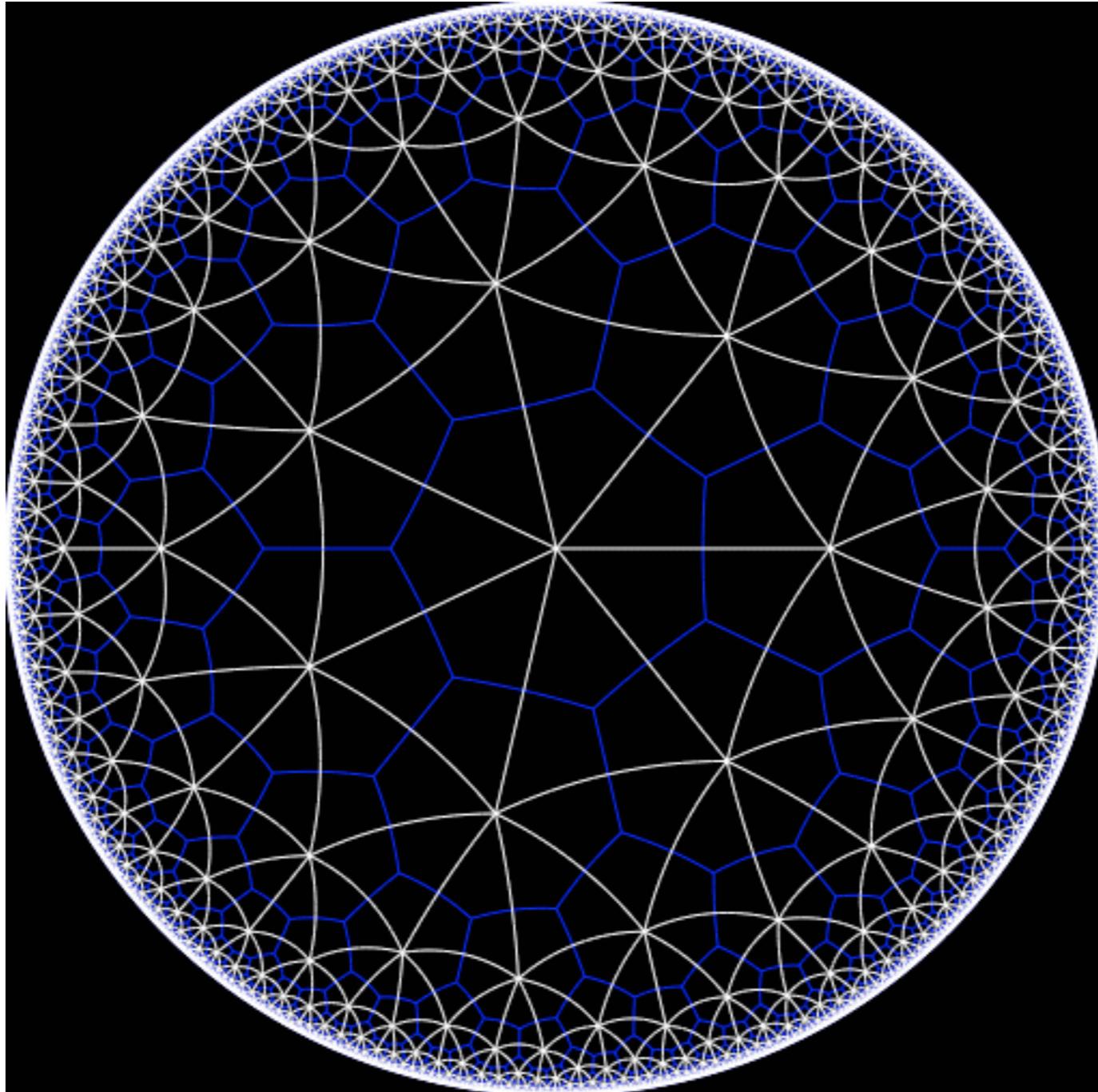


$\{4, 4\}$

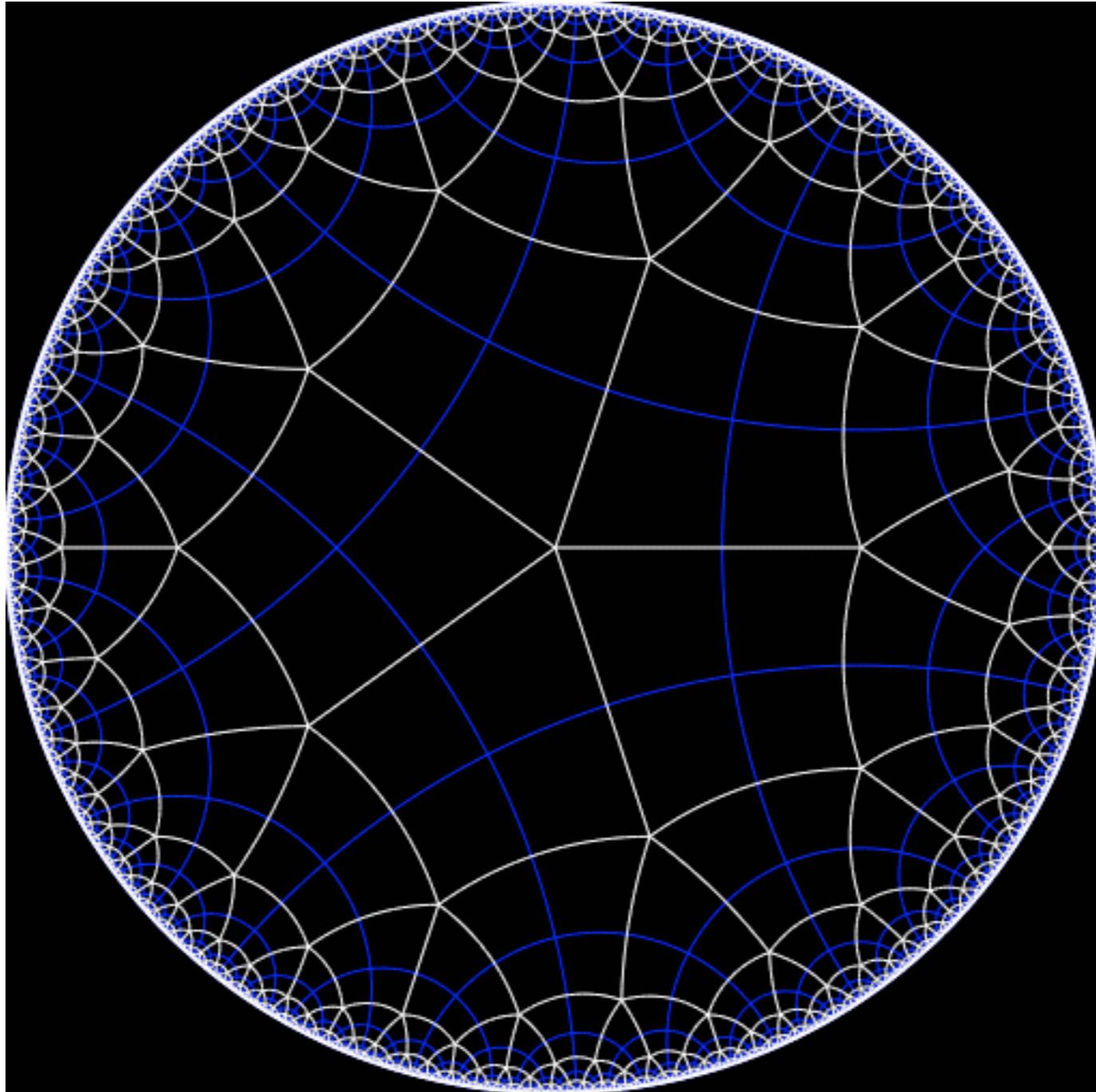


$\{6, 3\}$

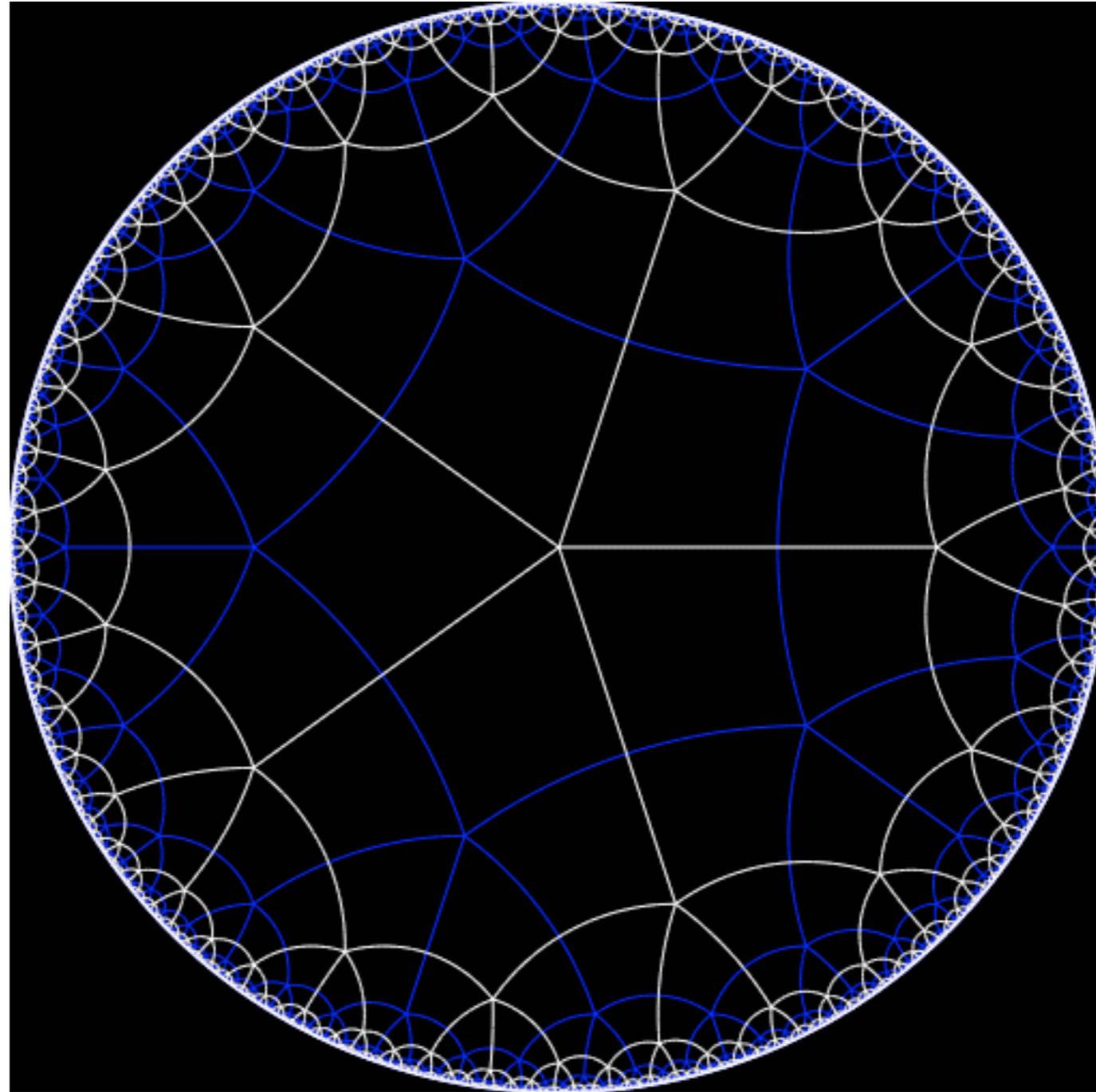
双曲平面のタイルばり $\{3,7\}$ 型



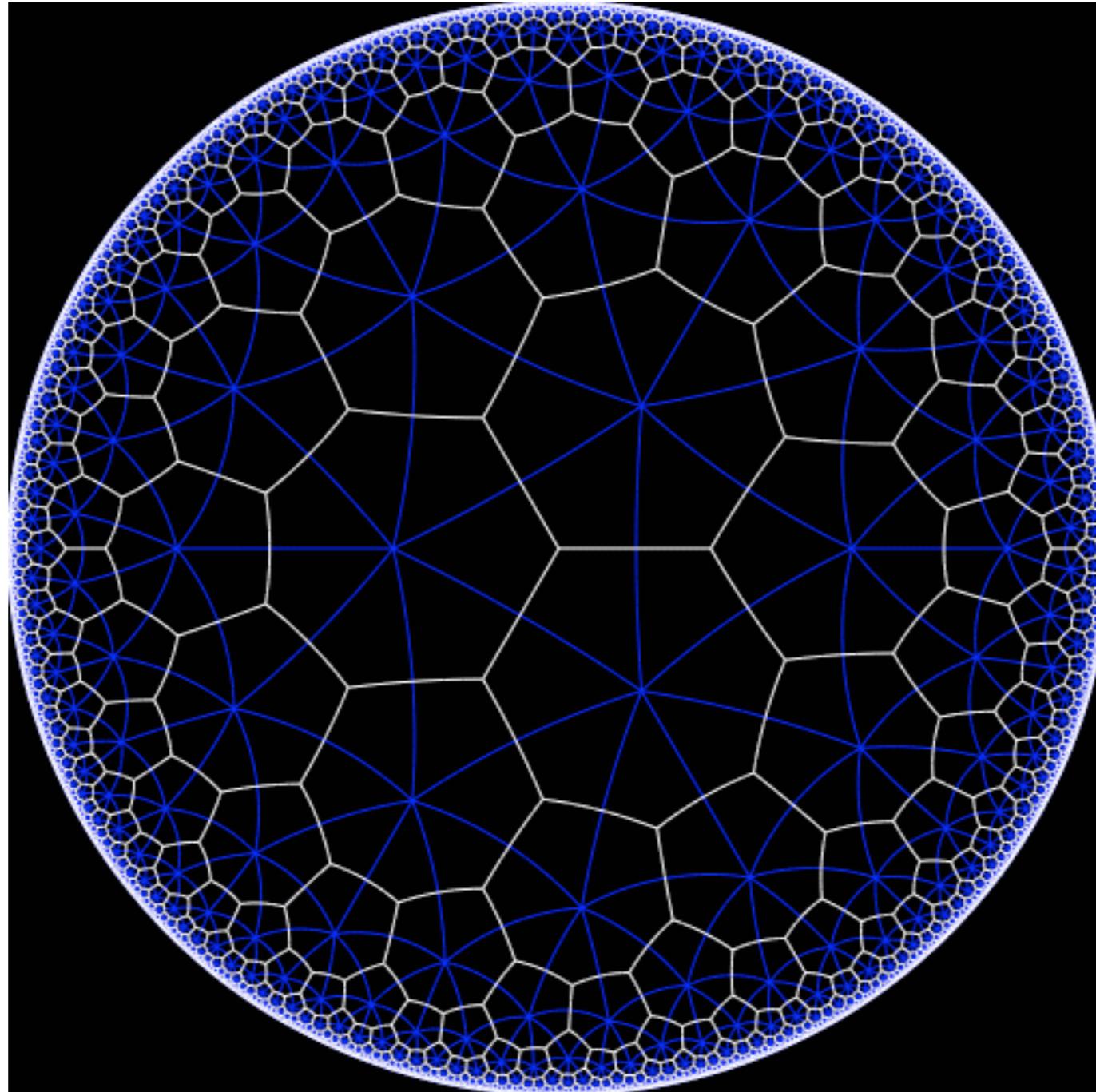
双曲平面のタイルばり {4,5}型



双曲平面のタイルばり $\{5, 5\}$ 型



双曲平面のタイルばり $\{7, 3\}$ 型



タイプ $\{p, q\}$ のタイルばり

ユークリッド平面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

球面

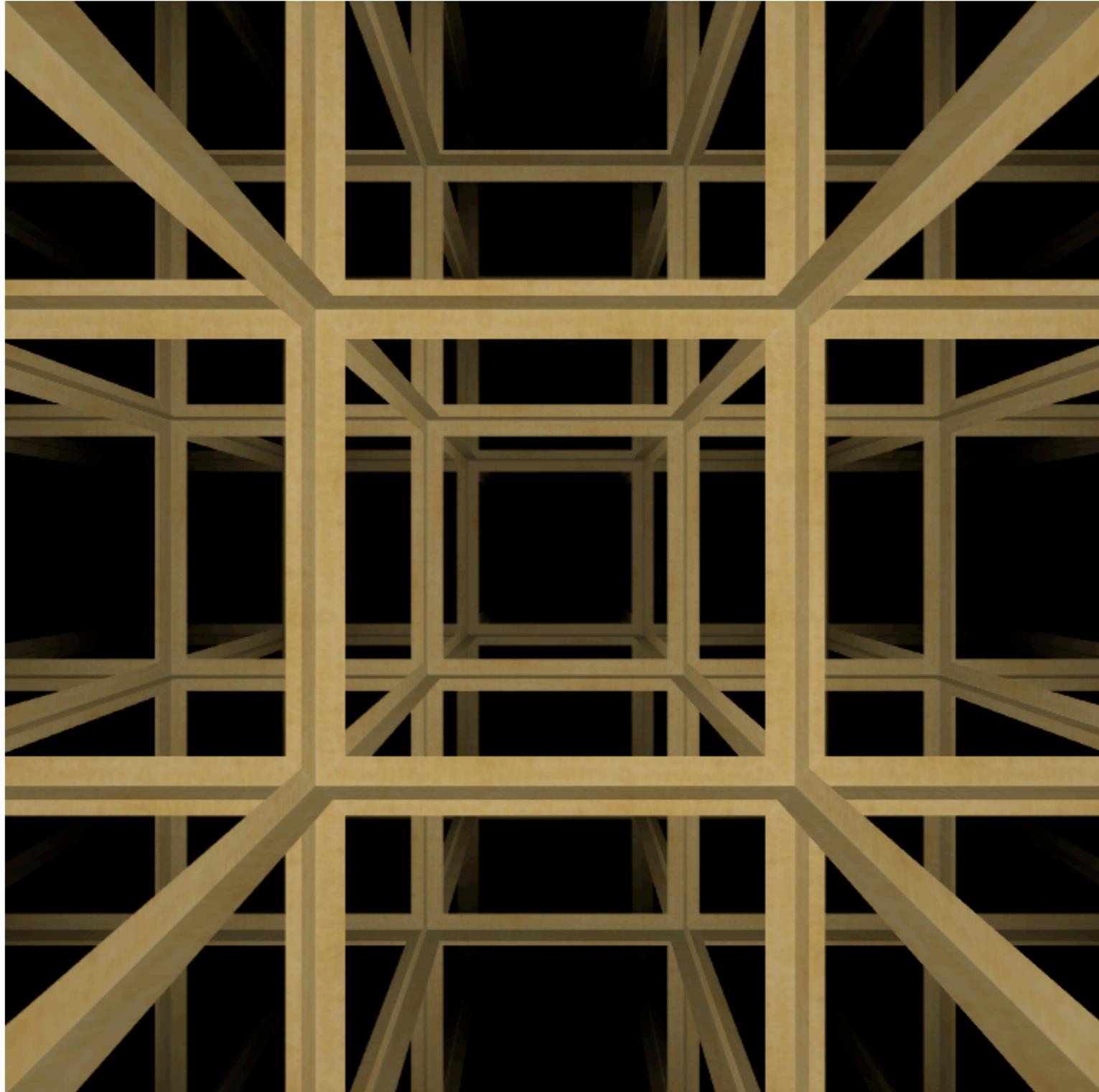
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

双曲平面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$$

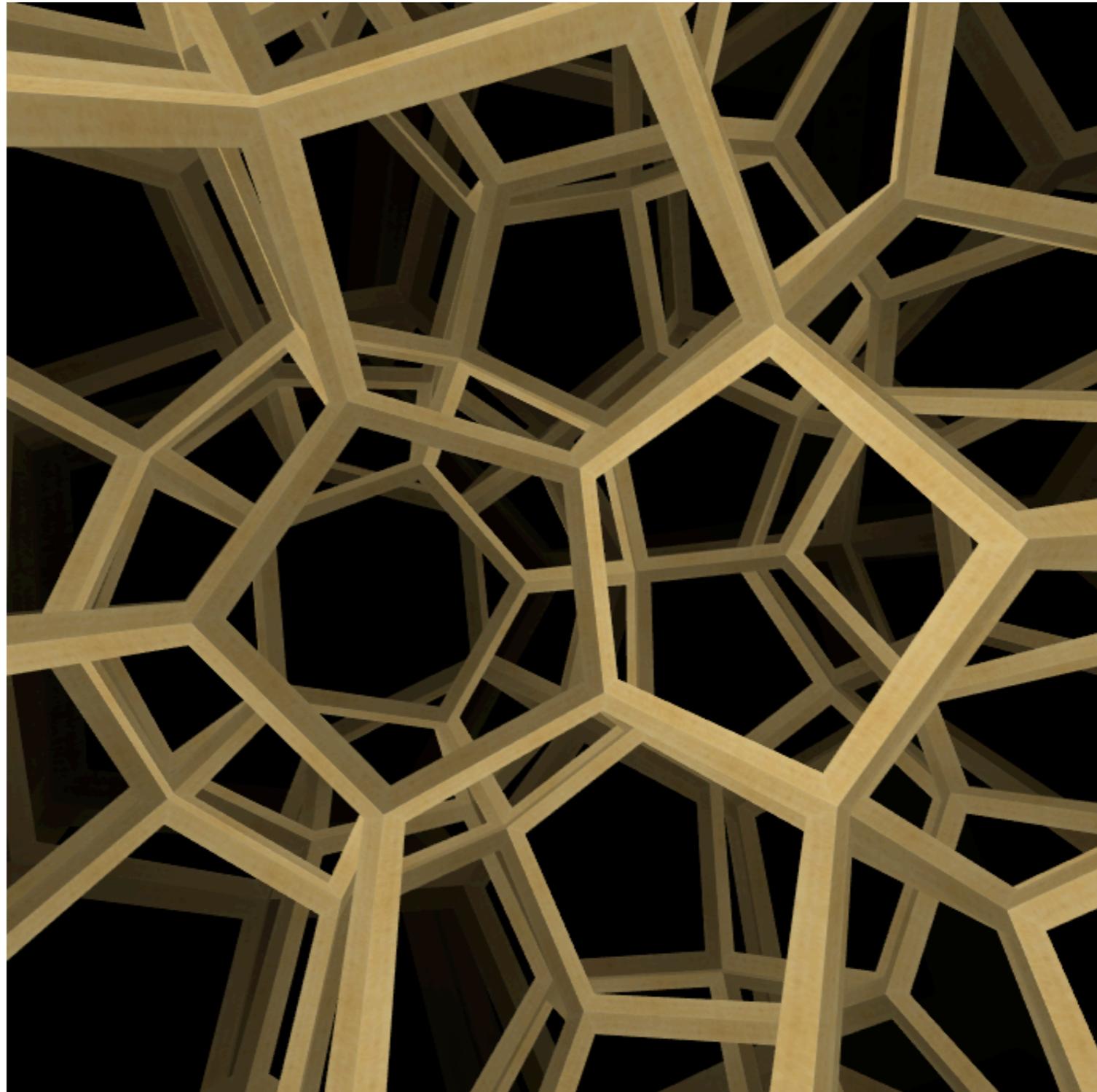
ユークリッド空間の正則分割

$\{4, 3, 4\}$



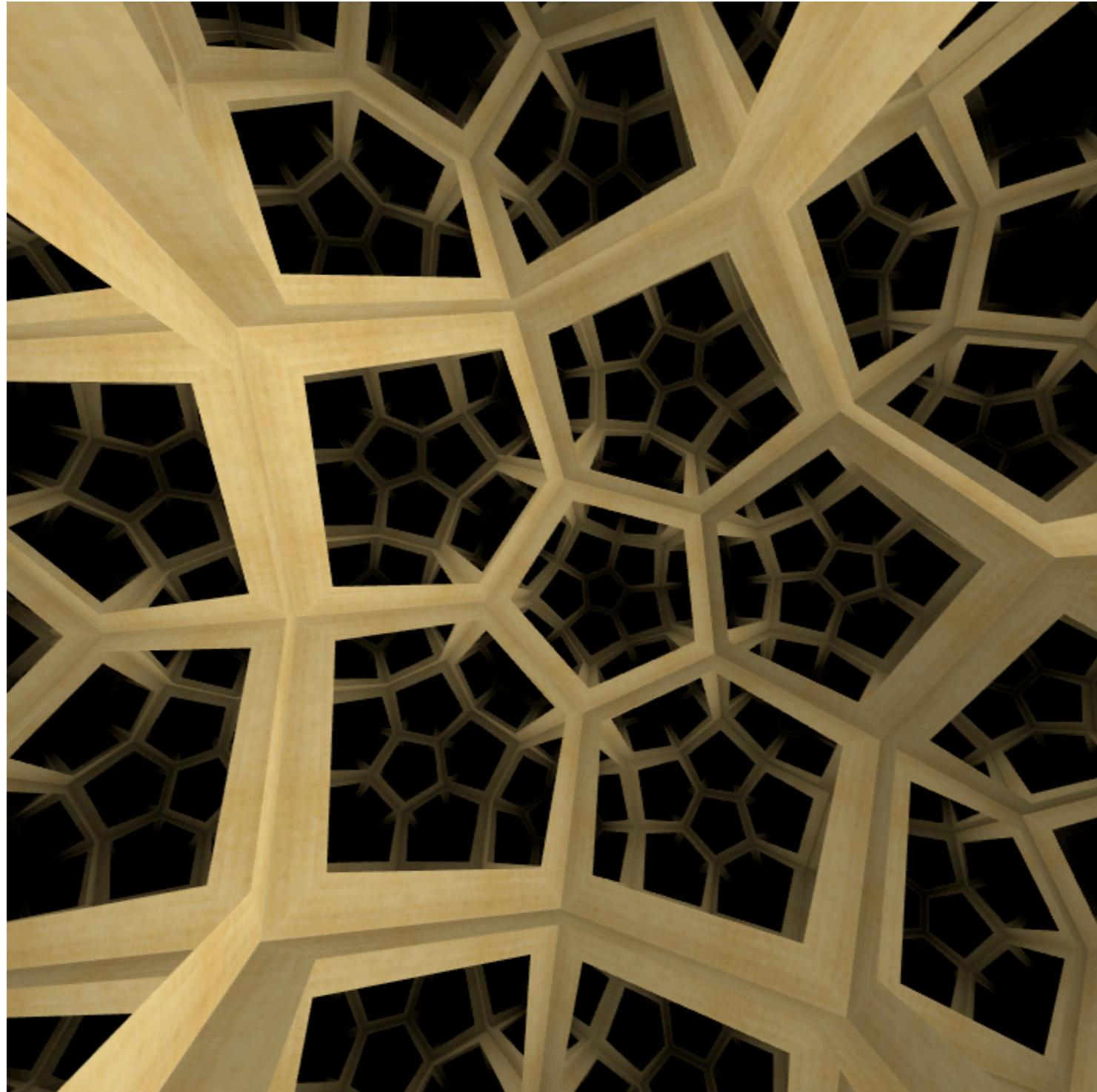
3次元球面の正則分割(120胞)

$\{5, 3, 3\}$



3次元双曲空間の分割

$\{5, 3, 4\}$



現代の技術による模型の制作



Clebsch曲面



Dini 曲面の制作

協力 ヤマダ精機

