結び目の数学

今井　淳

首都大学東京

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot _ _ pix/

目次

- 結び目とその仲間たちと数学
  - 生活の中の結び目、絡み目、組み紐
  - 数学で扱う結び目
  - ２つの結び目が同じとは?
  - 超簡単な歴史

目次

- 結び目とその仲間たちと数学
  - 生活の中の結び目、絡み目、組み紐
  - 数学で扱う結び目
  - ２つの結び目が同じとは？
  - 超簡単な歴史
- 結び目不変量
  - 同値関係と不変量
  - ジョーンズ多項式

目次

- 結び目とその仲間たちと数学
  - 生活の中の結び目、絡み目、組み紐
  - 数学で扱う結び目
  - ２つの結び目が同じとは？
  - 超簡単な歴史
- 結び目不変量
  - 同値関係と不変量
  - ジョーンズ多項式
- 他の分野との係わり
  - 幾何、（３次元）多様体論
  - 生物（ＤＮＡ）、高分子科学

生活の中の結び目（の仲間）

- 実用：

生活の中の結び目（の仲間）

- 実用：船乗り、アウトドア、（西部劇の銀行強盗）

生活の中の結び目（の仲間）

- 実用：船乗り、アウトドア、（西部劇の銀行強盗）
- 装飾用：

生活の中の結び目（の仲間）

- 実用：船乗り、アウトドア、（西部劇の銀行強盗）
- 装飾用：ネクタイ、水引、リボン、紋章、shoulder knot、組み紐

生活の中の結び目（の仲間）

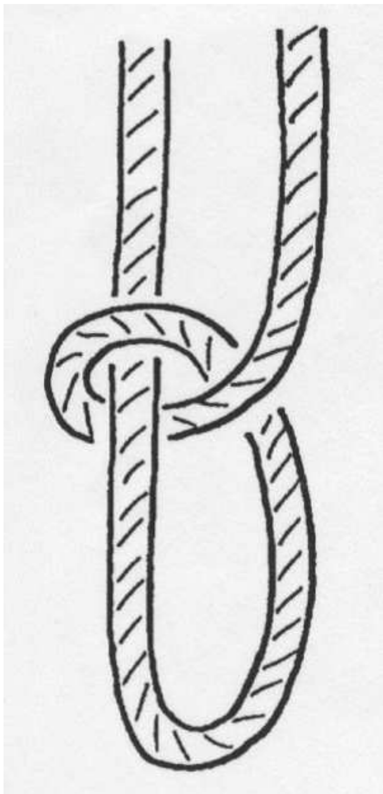
- 実用：船乗り、アウトドア、（西部劇の銀行強盗）
- 装飾用：ネクタイ、水引、リボン、紋章、shoulder knot、組み紐
- 言葉：

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

生活の中の結び目（の仲間）

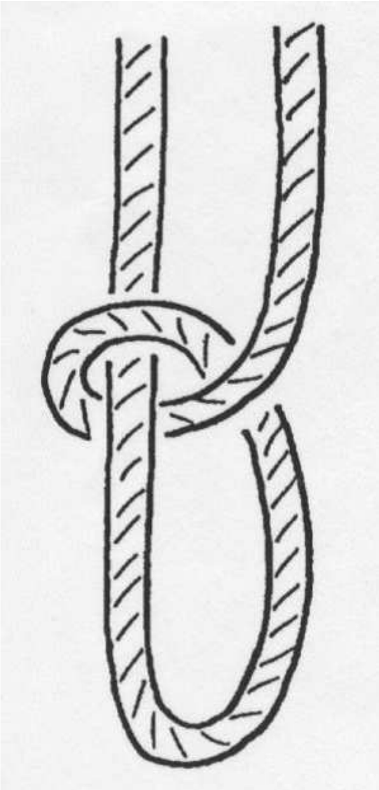
- 実用：船乗り、アウトドア、（西部劇の銀行強盗）
- 装飾用：ネクタイ、水引、リボン、紋章、shoulder knot、組み紐
- 言葉：結びの一番、ノット（船の速さ）、cut the Gordian knot, nodo d’amore

結び目の例〜名前のついた結び目

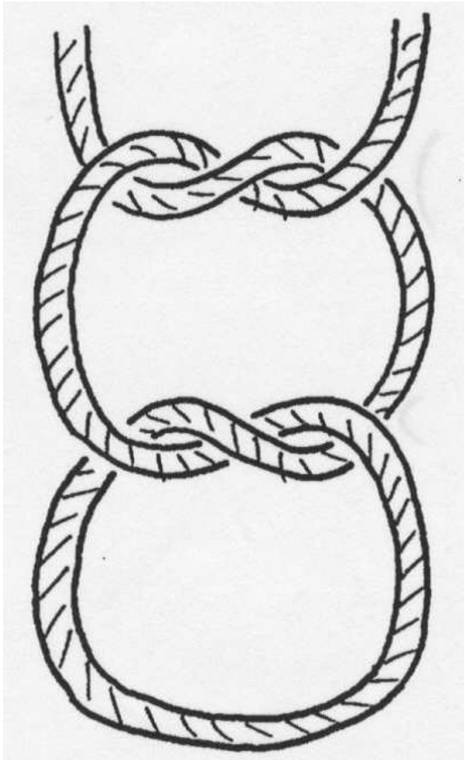


half hitch

結び目の例〜名前のついた結び目

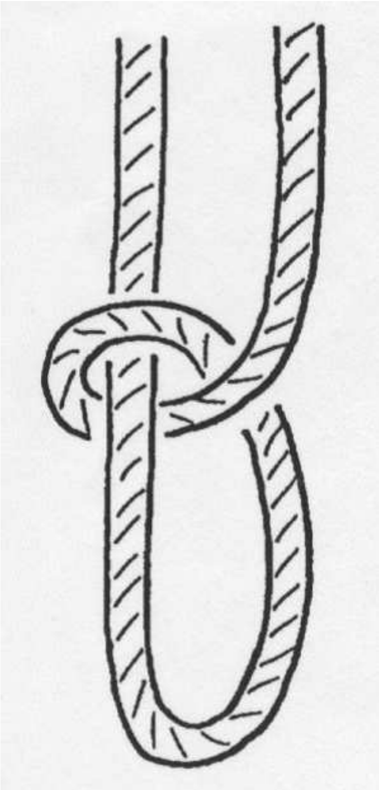


half hitch

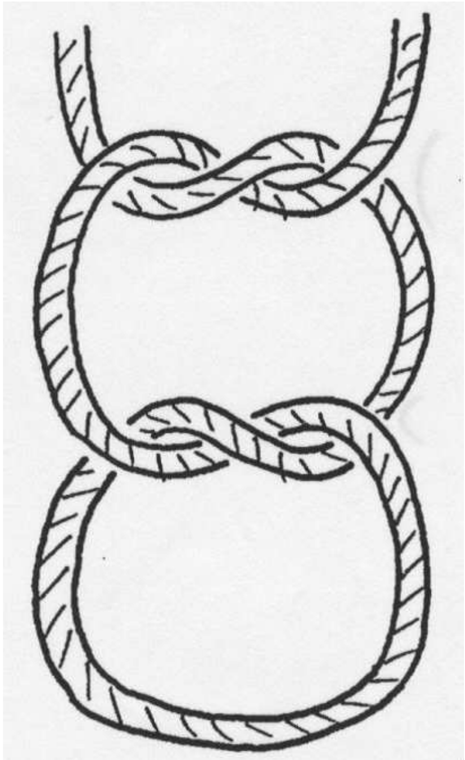


square kont,
reef knot
(ま結び)

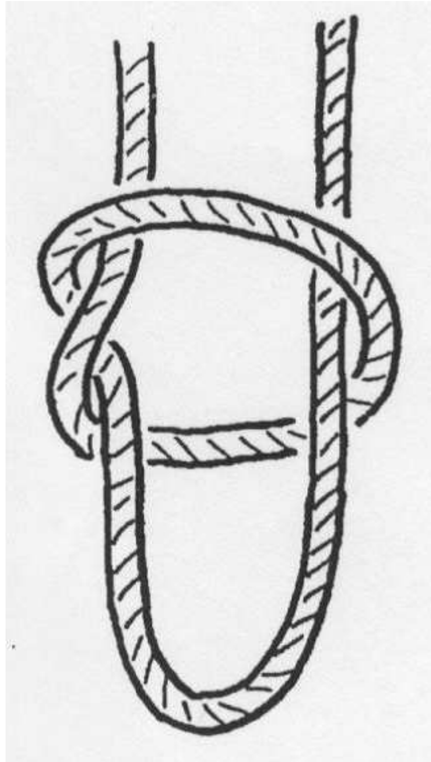
結び目の例〜名前のついた結び目



half hitch

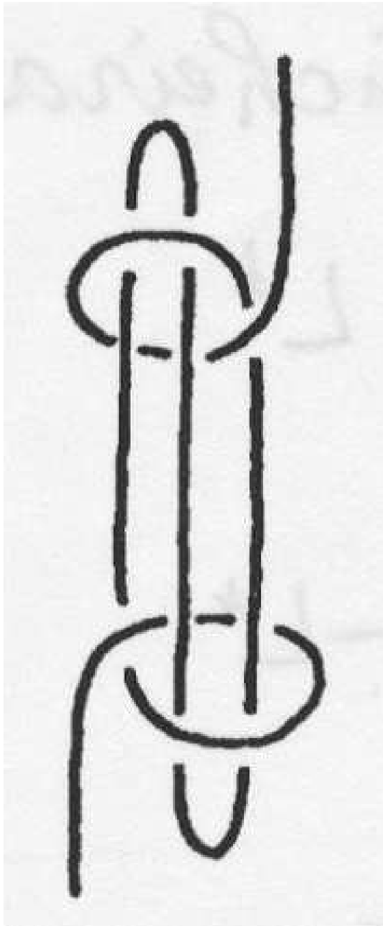


square kont,
reef knot
(ま結び)



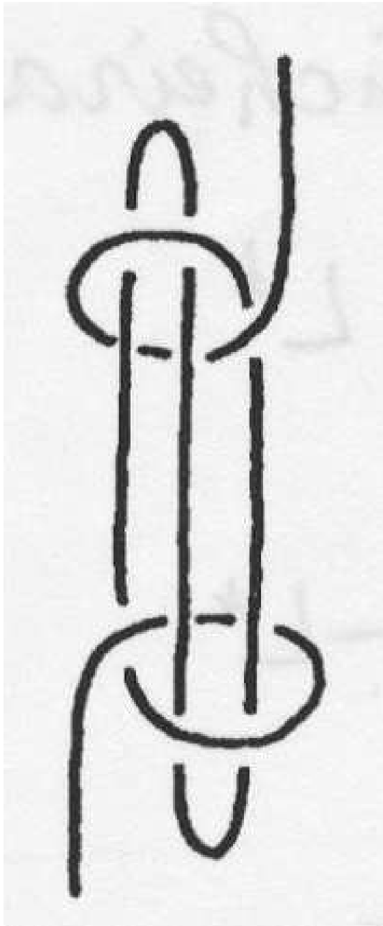
running knot

結び目の例〜実用、および装飾用

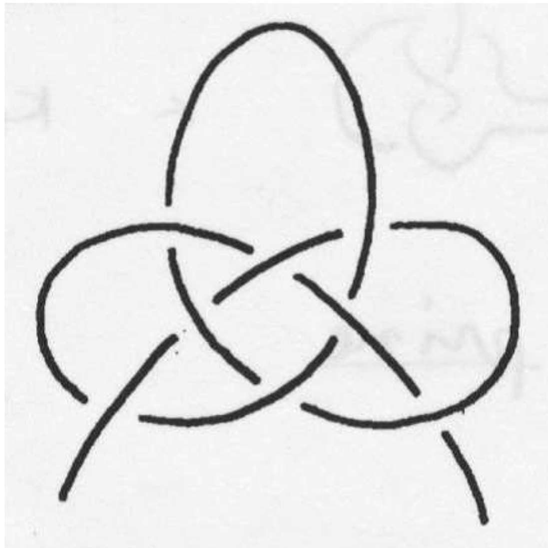


sheep shank

結び目の例～実用、および装飾用

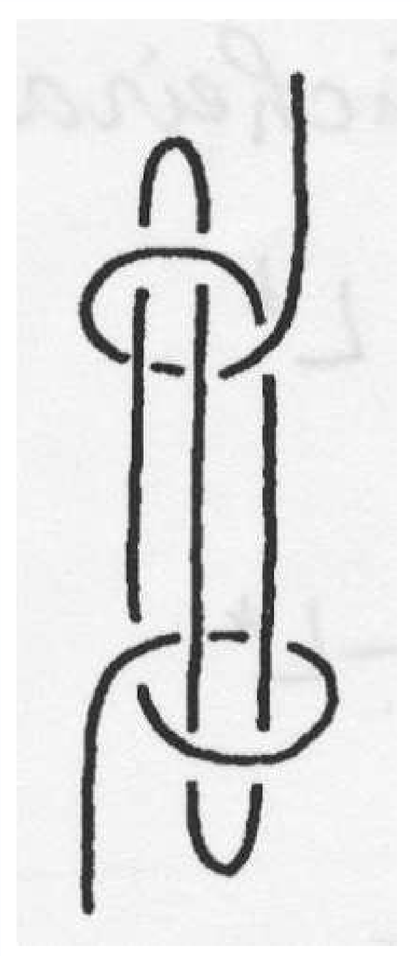


sheep shank

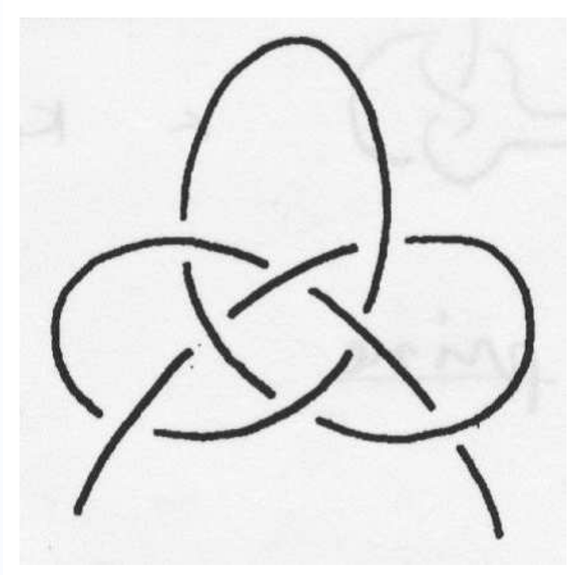


あわび結び

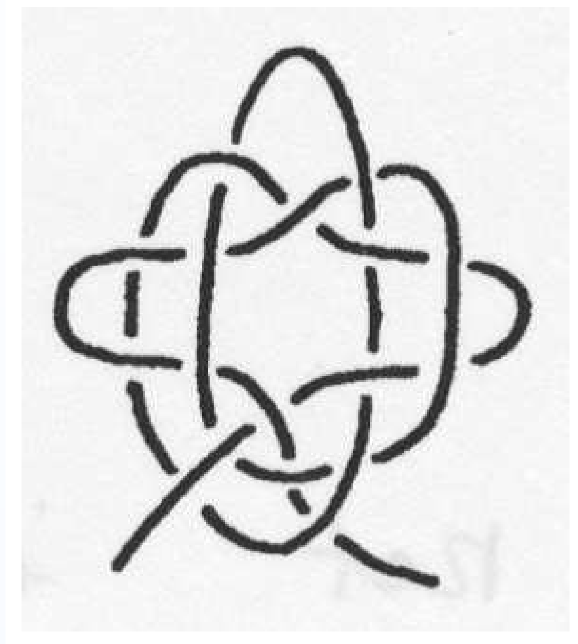
結び目の例〜実用、および装飾用



sheep shank



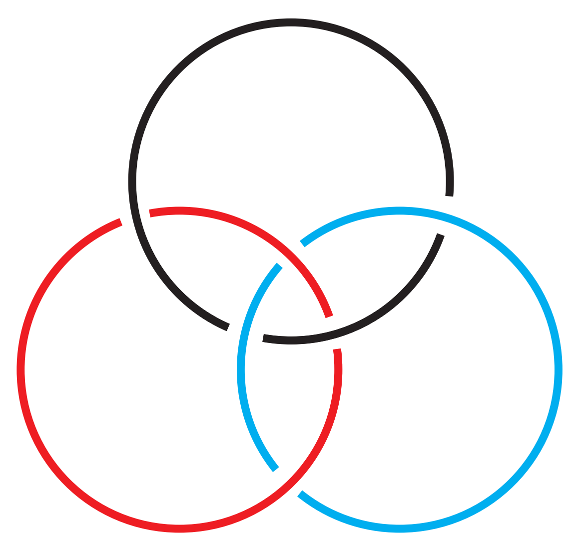
あわび結び



華鬘結び

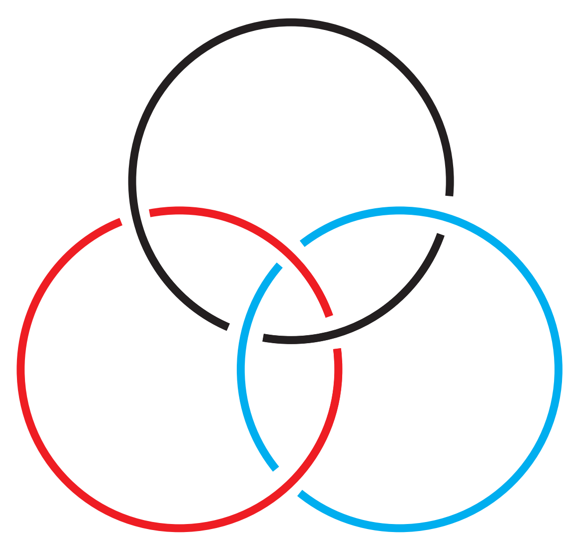
Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

結び目の仲間たち

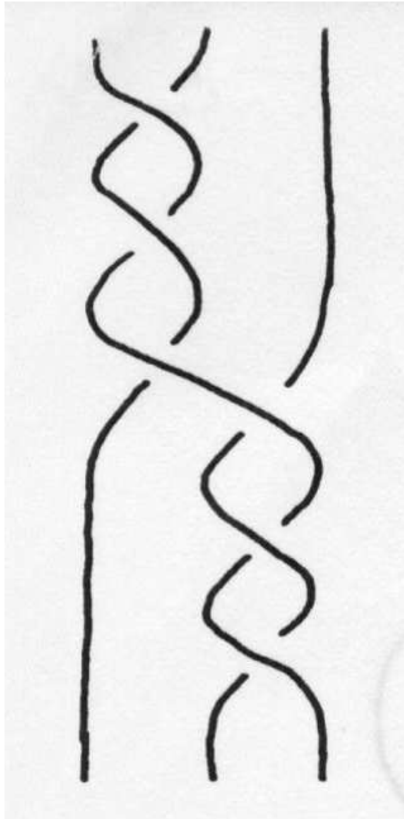


ボロミアン・リンク

結び目の仲間たち

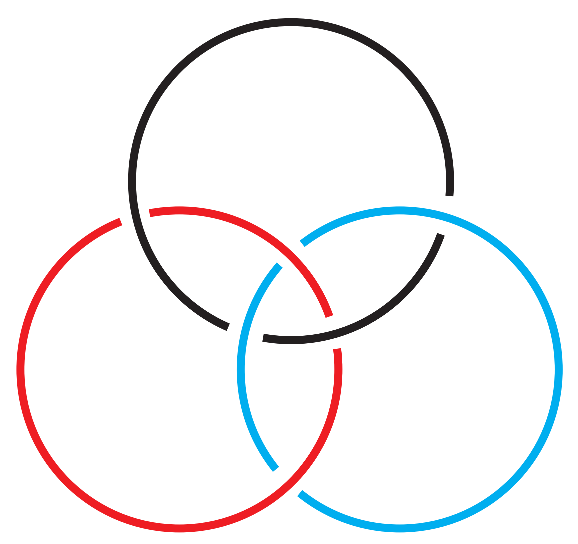


ボロミアン・リンク

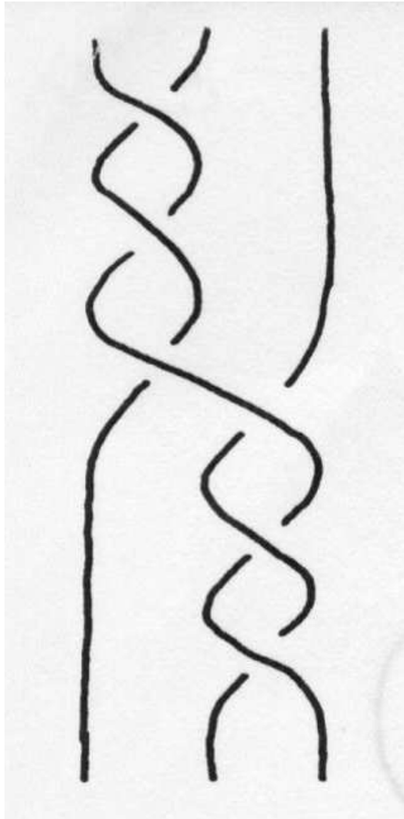


組み紐

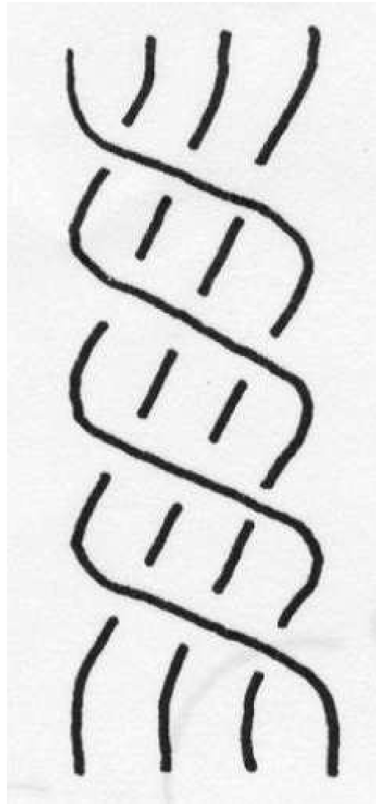
結び目の仲間たち



ボロミアン・リンク

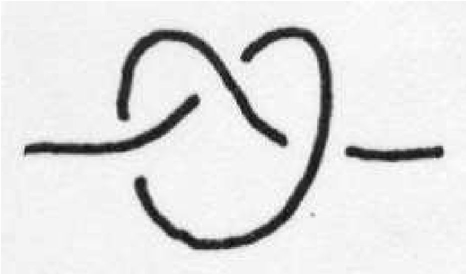


組み紐



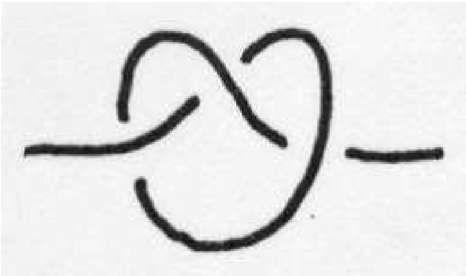
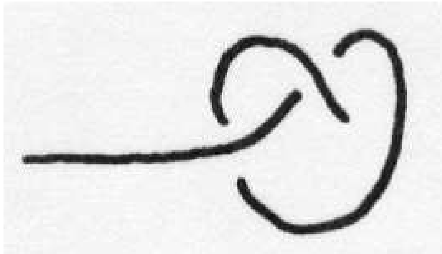
(pure) braid

数学で扱う結び目



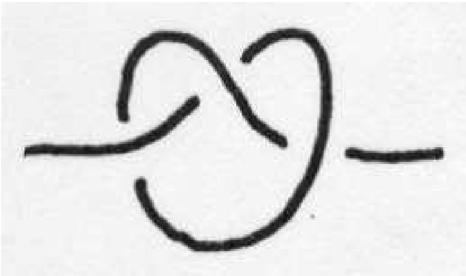
結んでいる

数学で扱う結び目

 ⇒ 

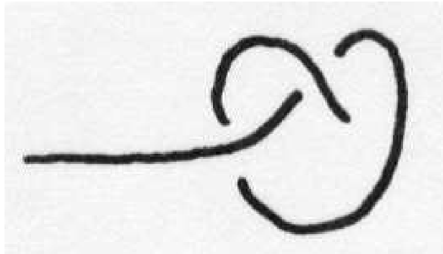
結んでいる　　右端を短くしていく

数学で扱う結び目



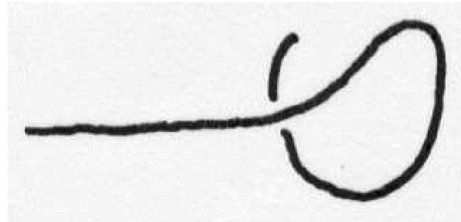
結んでいる

⇒



右端を短くしていく

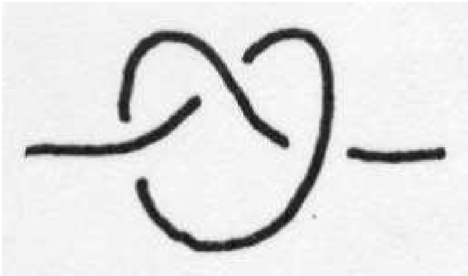
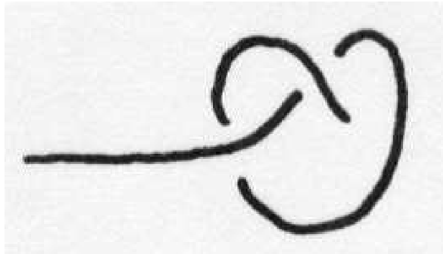
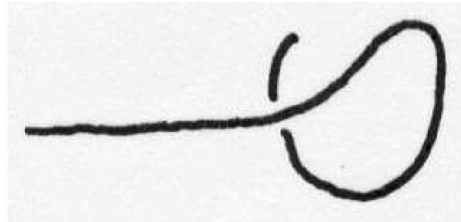
⇒



結んでいない

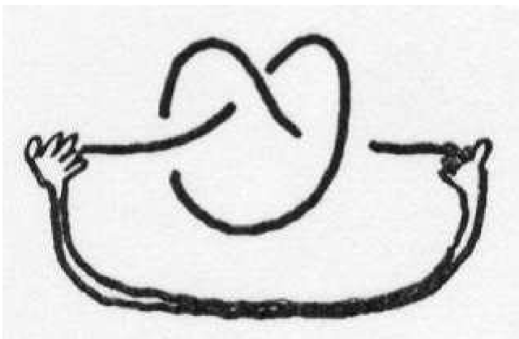
Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

数学で扱う結び目

 ⇒  ⇒ 

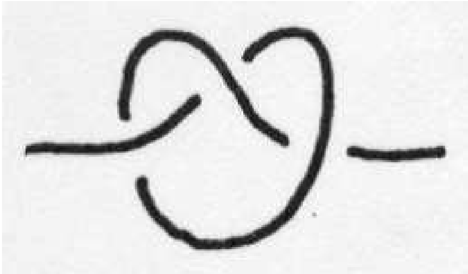
結んでいる　　右端を短くしていく　　結んでいない

- 端点を手に持って離さなければほどけない。

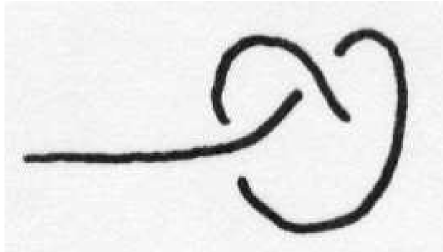


Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot__pix/

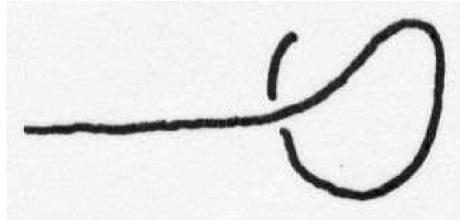
数学で扱う結び目



⇒

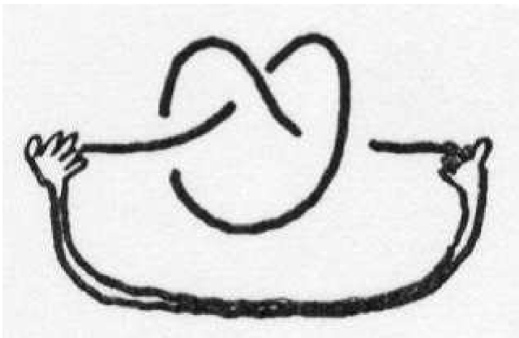


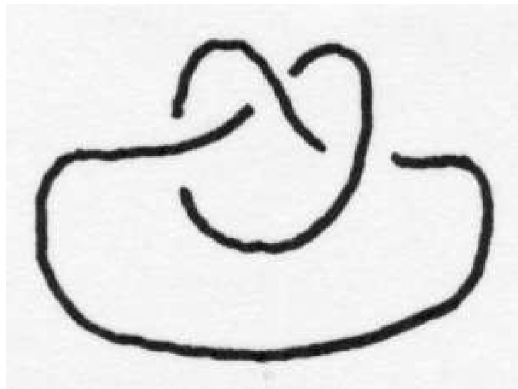
⇒



結んでいる　右端を短くしていく　結んでいない

- 端点を手に持って離さなければほどけない。

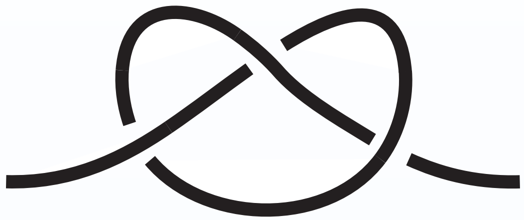




- **定義**　数学で扱う結び目＝３次元空間に、自分自身と交わらないように埋め込まれた円周

簡単な結び目の例

- Trefoil （三葉結び目）

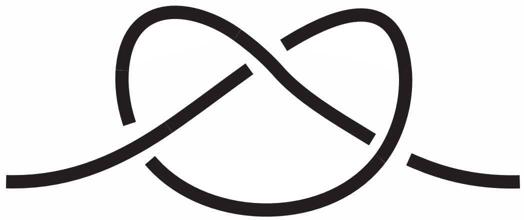


$\Longrightarrow$

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot_pix/

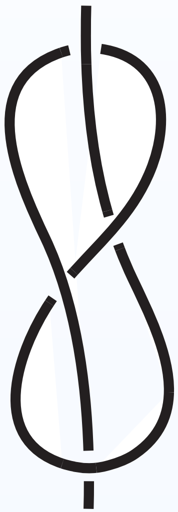
簡単な結び目の例

- Trefoil （三葉結び目）

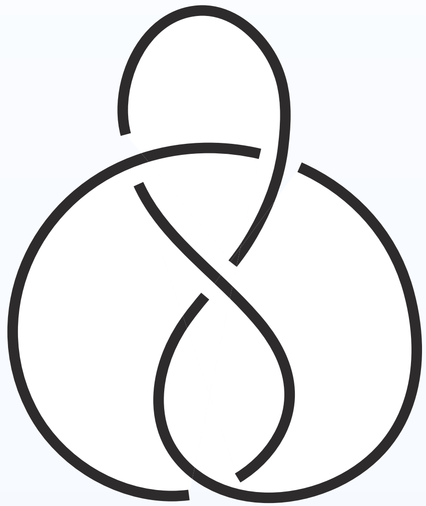


$\Longrightarrow$

- Figure eight （８の字結び目）



$\Longrightarrow$



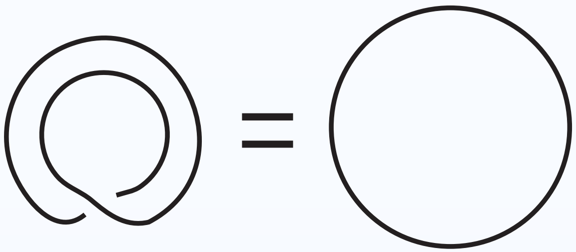
Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot＿pix/

二つの結び目が同じ、とは？

定義 二つの結び目が「同じ」（同型、イソトピック）であるとは、二つがゴム紐でできているとして、ゴム紐を切らずに連続的に変形して、一方を他方に重ね合わせられるようにできること。

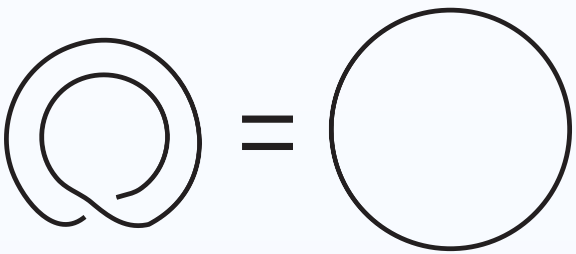
二つの結び目が同じ、とは？

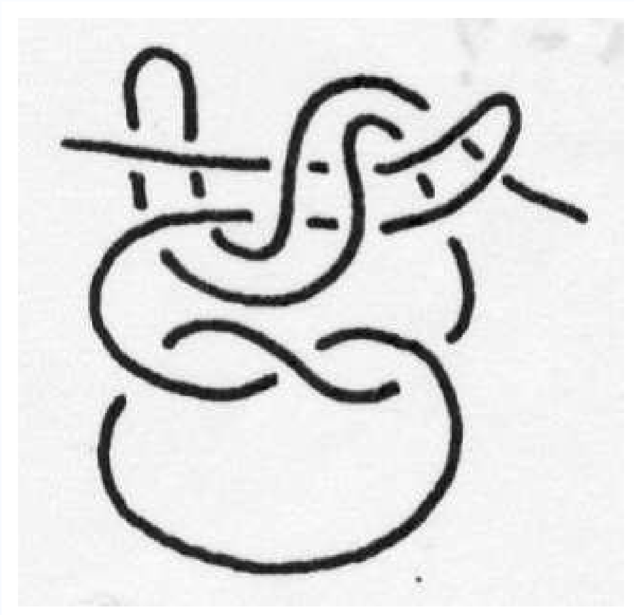
- **定義** 二つの結び目が「同じ」（同型、イソトピック）であるとは、二つがゴム紐でできているとして、ゴム紐を切らずに連続的に変形して、一方を他方に重ね合わせられるようにできること。
- 簡単な例（「自明な結び目」という）



二つの結び目が同じ、とは？

- **定義** 二つの結び目が「同じ」（同型、イソトピック）であるとは、二つがゴム紐でできているとして、ゴム紐を切らずに連続的に変形して、一方を他方に重ね合わせられるようにできること。
- 簡単な例（「自明な結び目」という）



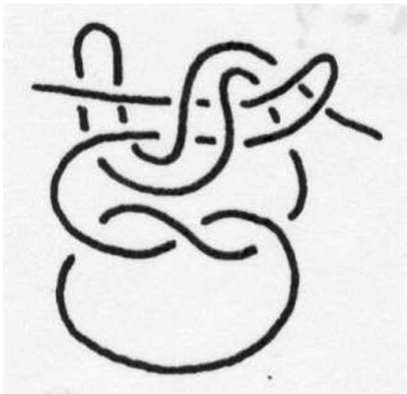


- 蝶結び目は何と同じ？

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_ pix/

蝶結びはなにか？

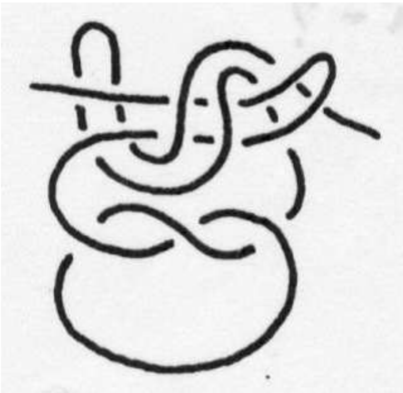
- 蝶結びの変形

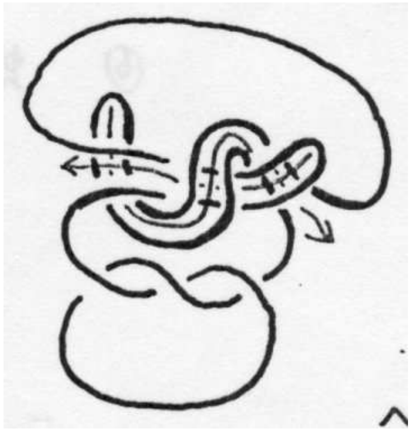


Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

蝶結びはなにか？

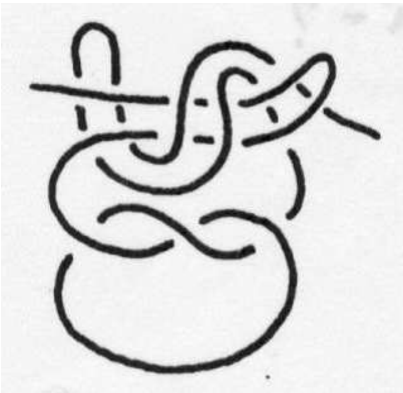
- 蝶結びの変形

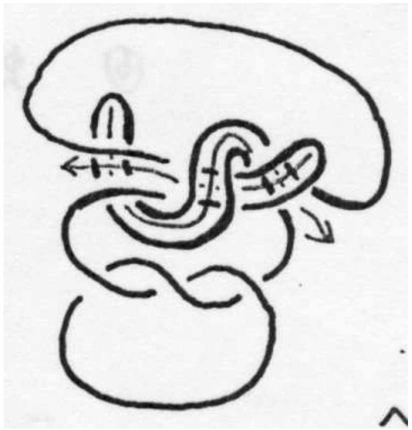


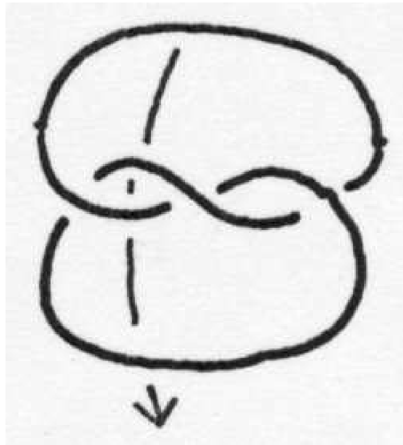


蝶結びはなにか？

- 蝶結びの変形

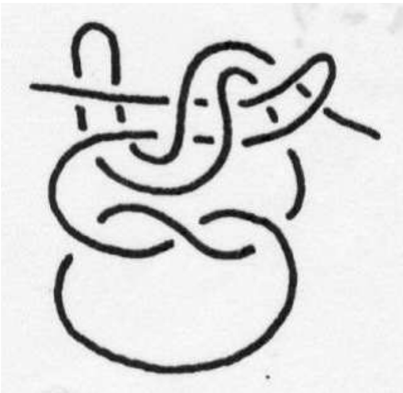


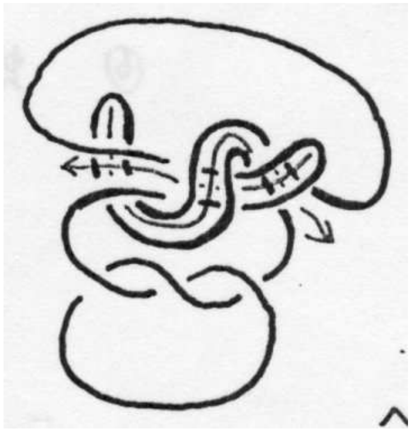


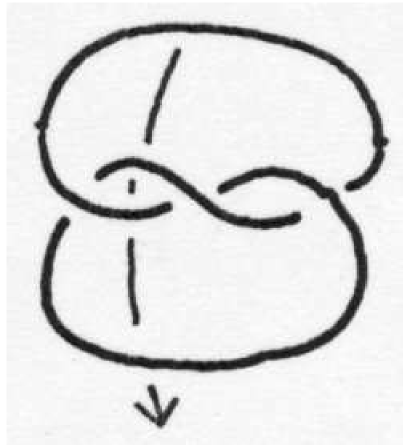


蝶結びはなにか？

- 蝶結びの変形

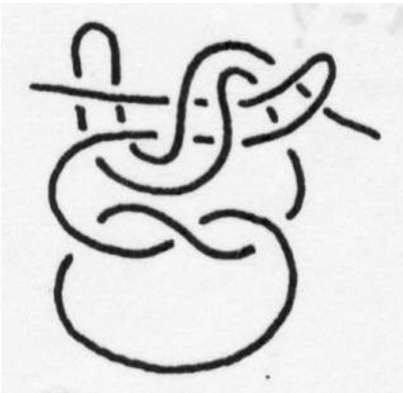


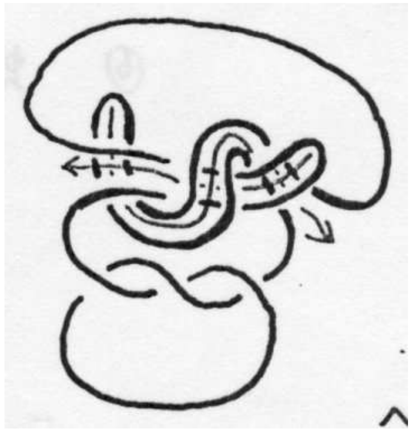


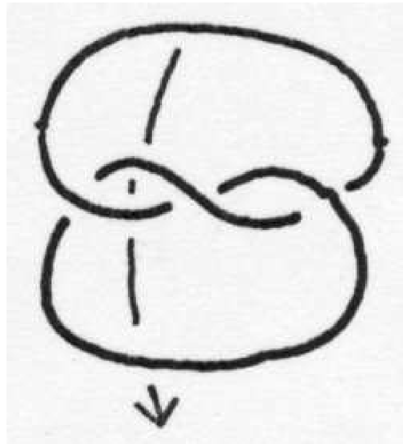


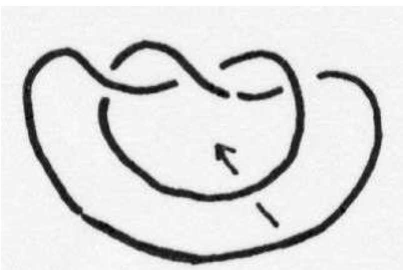
蝶結びはなにか？

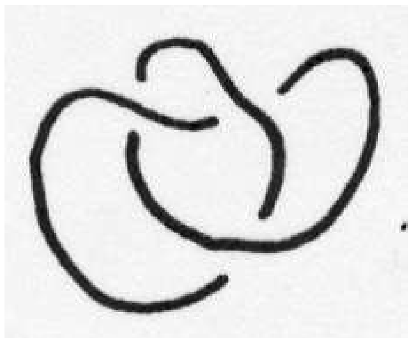
- 蝶結びの変形











Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot_pix/

蝶結びはなにか？

- 蝶結びの変形

- 蝶結び＝ひとえ結び

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot_pix/

結び目の研究超略歴〜物理から

- ガウス (1777 – 1855)

１０マルク札

結び目の研究超略歴〜物理から

- ガウス (1777 – 1855)

１０マルク札

100 マルク札のクララ・シューマン

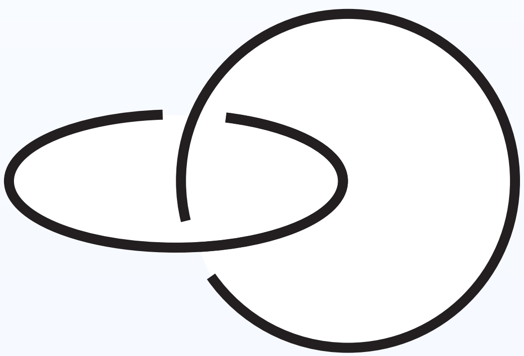
結び目の研究超略歴～物理から

- ガウス (1777 – 1855)

１０マルク札

100 マルク札のクララ・シューマン

- 絡み目の絡み数の積分表示を与えた。（電磁気学）



ビオ・サバールの法則
Hopf リンクで (±)1

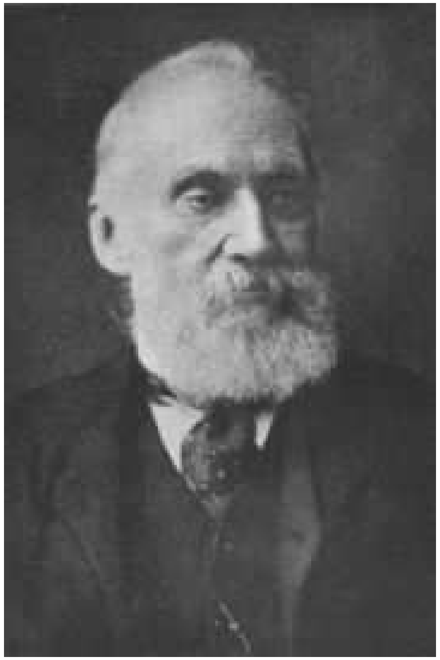
Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot_pix/

結び目の研究超略歴〜物理から

- ガウスの弟子のリスティング

結び目の研究超略歴〜物理から

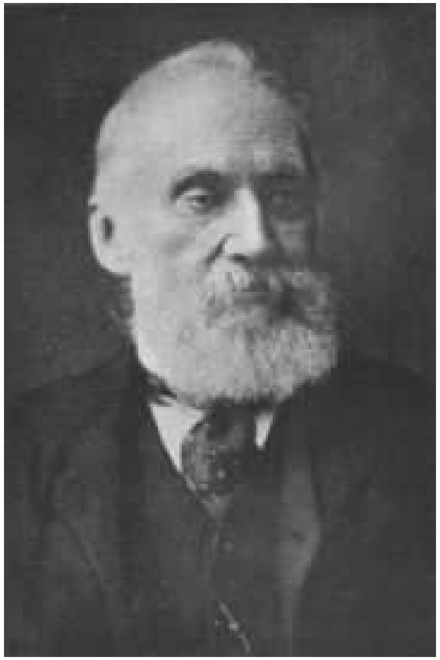
- ガウスの弟子のリスティング
- ケルヴィン卿（ウィリアム・トムソン）(1824 – 1907)
  渦原子論 (1867)：原子＝エーテルの渦輪



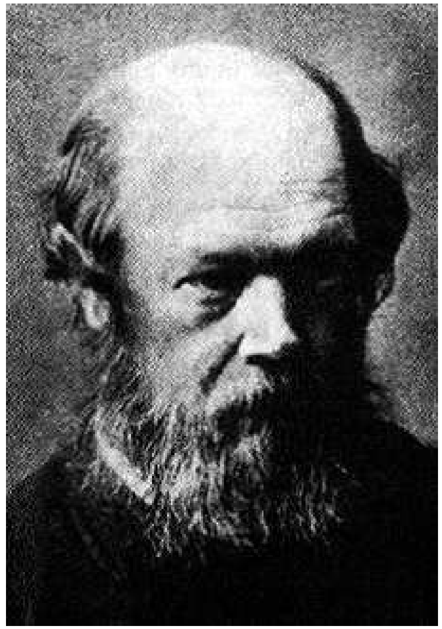
ケルヴィン卿

結び目の研究超略歴〜物理から

- ガウスの弟子のリスティング
- ケルヴィン卿（ウィリアム・トムソン）(1824 – 1907)
  渦原子論 (1867)：原子＝エーテルの渦輪



ケルヴィン卿



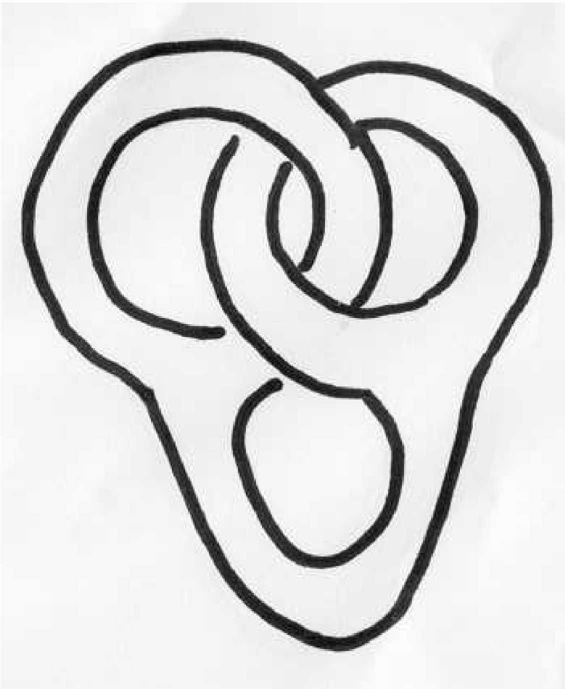
Ｐ．Ｇ．テイト

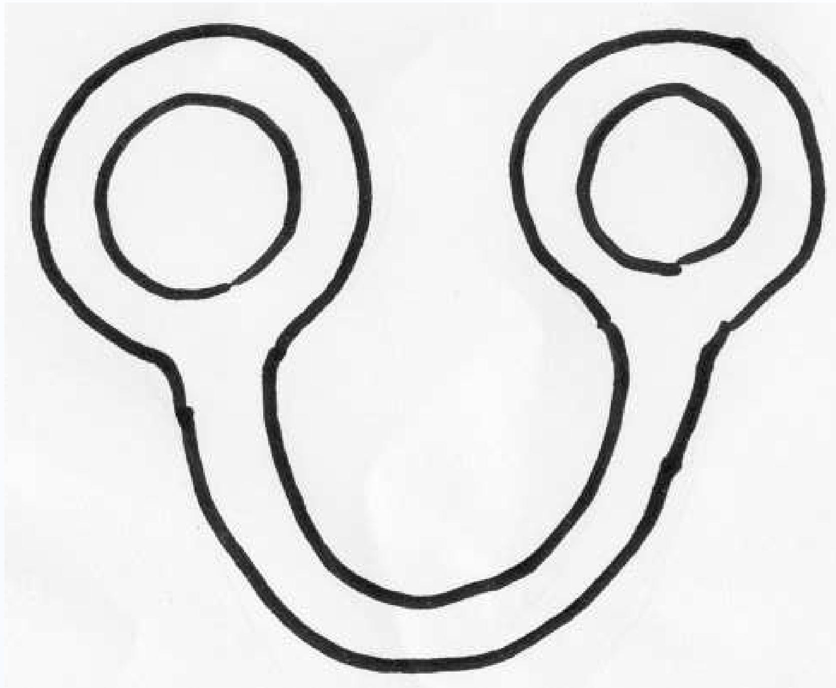
- Ｐ．Ｇ．テイト (1831 – 1901) 結び目の一覧表

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

Intermezzo～ルパン III 世

- 粘土で絡み合ったハンドカフ（手錠）を作りました（左図）。粘土を切ったりしないで、連続的に変形しただけで、右図のように二つの輪っかを外せるでしょうか。





結び目の研究超略歴〜コテコテ編

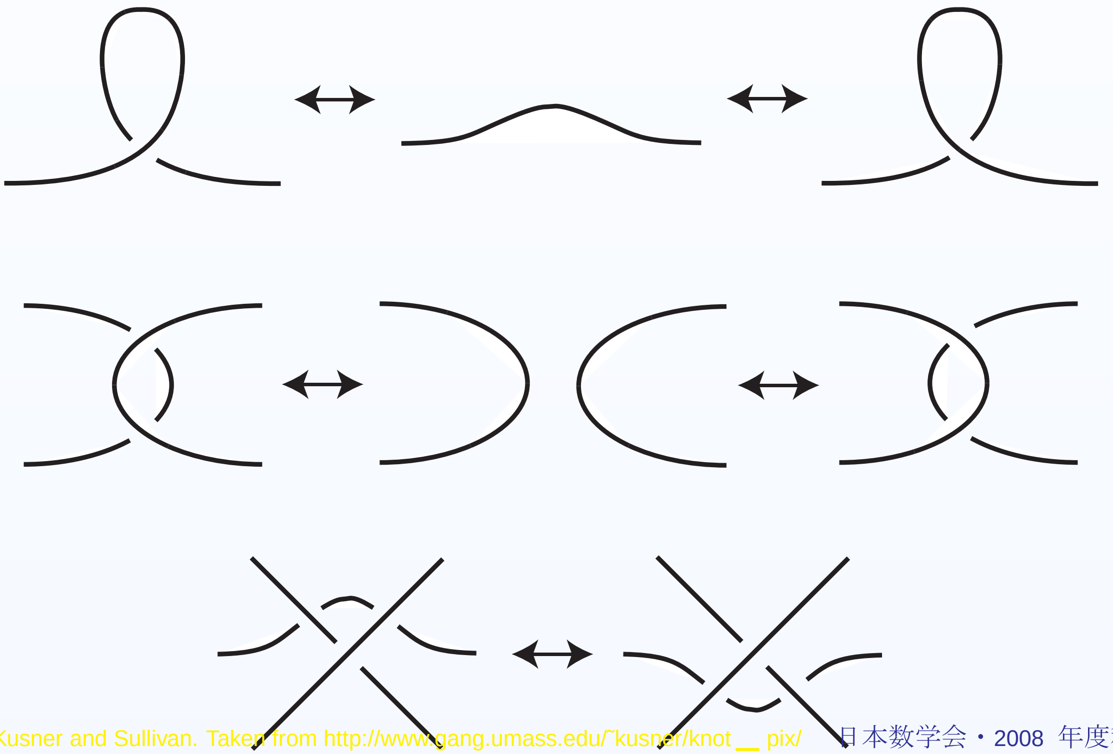
- アレクサンダー (1888 – 1971) ：
アレクサンダー多項式　（結び目不変量）(1920's)

結び目の研究超略歴〜コテコテ編

- アレクサンダー (1888 – 1971) ：
  アレクサンダー多項式　（結び目不変量）(1920’s)
- ライデマイスター (1893 – 1971) :
  ２つの結び目図式が同じ結び目を表わす

結び目の研究超略歴〜コテコテ編

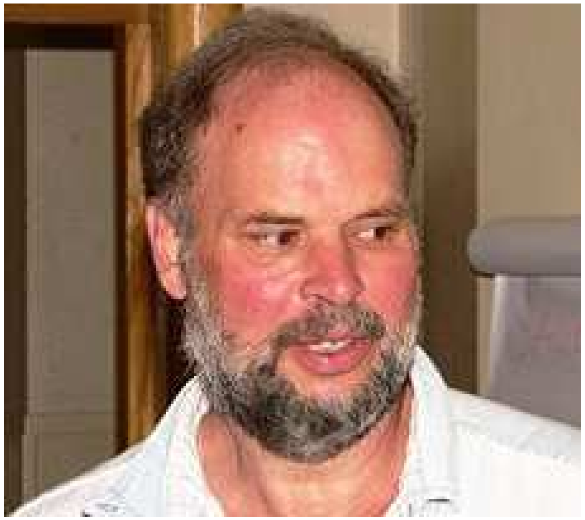
- アレクサンダー (1888 – 1971)：
  アレクサンダー多項式　（結び目不変量）(1920's)
- ライデマイスター (1893 – 1971)：
  ２つの結び目図式が同じ結び目を表わす
  $\Longleftrightarrow$ 本質的に次の局所変形を有限回施すと移りあう
  (Reidemeister moves (1932))



Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_ pix/

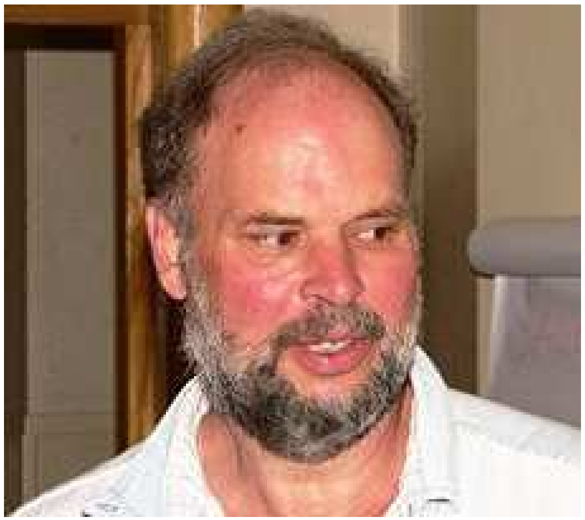
結び目の研究超略歴〜ブレイクスルー

- ヴォーン・ジョーンズ (1952 –) 作用素環論



結び目の研究超略歴〜ブレイクスルー

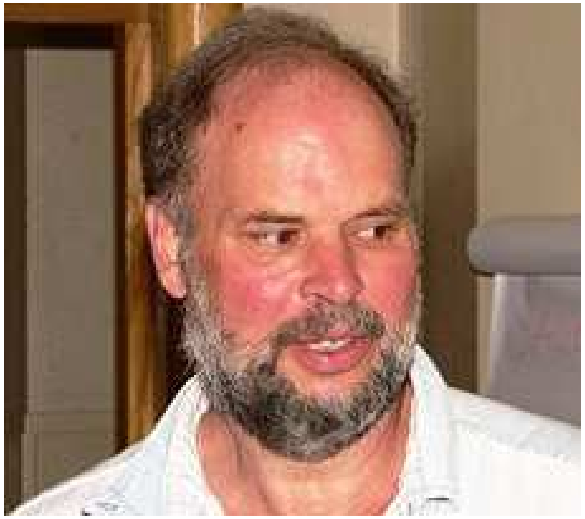
- ヴォーン・ジョーンズ (1952 –) 作用素環論



- ジョーンズ多項式（結び目不変量）

結び目の研究超略歴〜ブレイクスルー

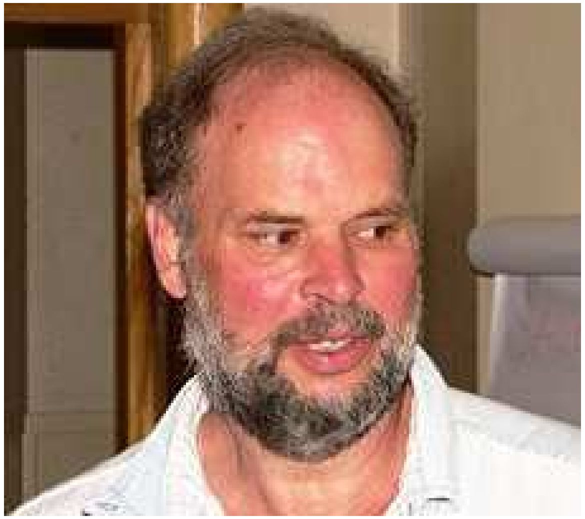
- ヴォーン・ジョーンズ (1952 –) 作用素環論



- 〜 組み紐群 $\rightsquigarrow$ ジョーンズ多項式（結び目不変量）

結び目の研究超略歴〜ブレイクスルー

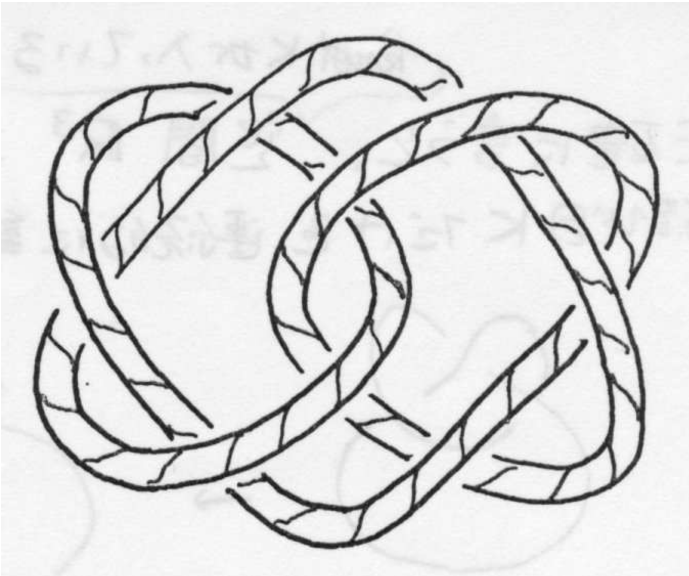
- ヴォーン・ジョーンズ (1952 –) 作用素環論



- 〜 組み紐群 $\rightsquigarrow$ ジョーンズ多項式（結び目不変量）
- **フィールズ賞受賞!** (1990)

結び目不変量〜その愛は本物か？

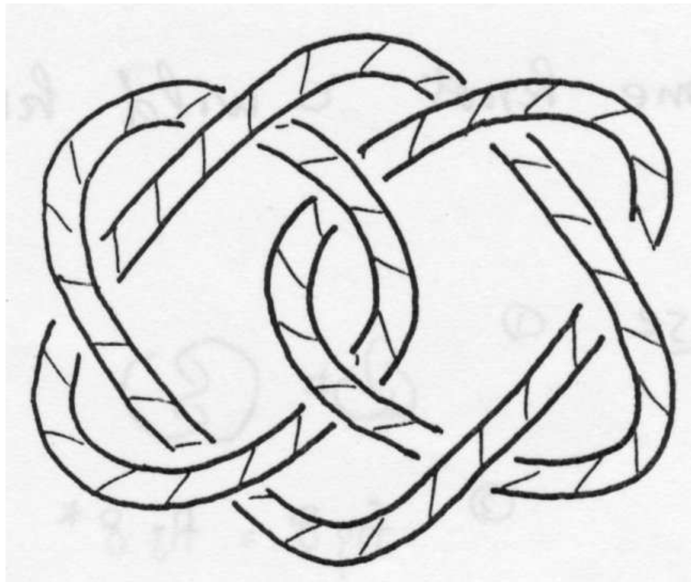
問題 真実の愛の結び目と偽りの愛の結び目は違うのか？



真実の愛の結び目

結び目不変量〜その愛は本物か？

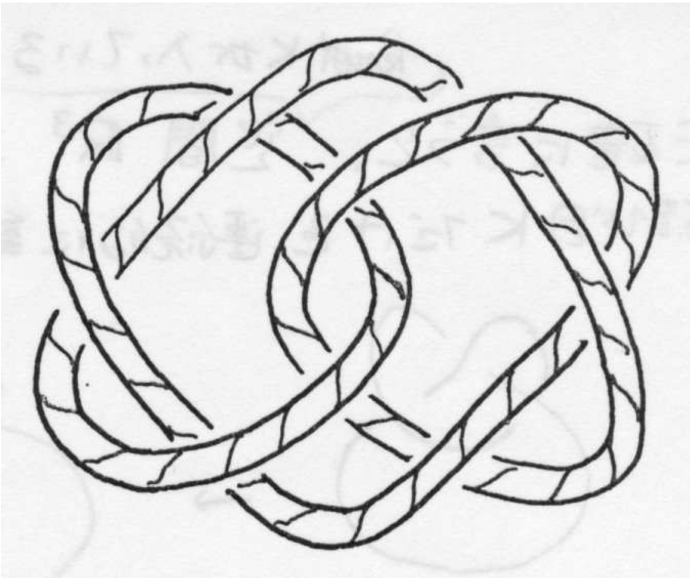
- **問題** 真実の愛の結び目と偽りの愛の結び目は違うのか？



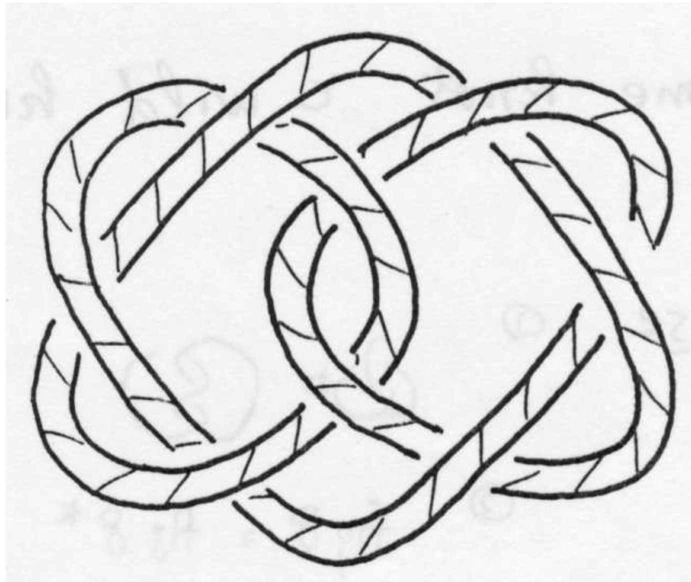
偽りの愛の結び目

結び目不変量〜その愛は本物か？

問題 真実の愛の結び目と偽りの愛の結び目は違うのか？



真実の愛の結び目

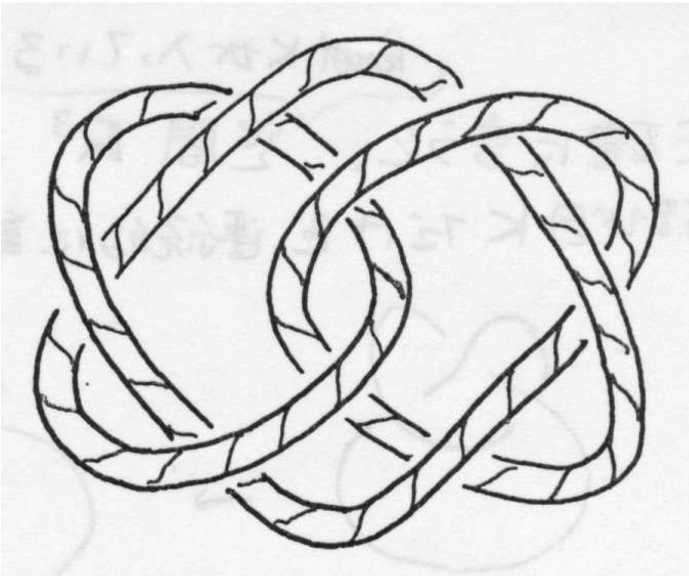


偽りの愛の結び目

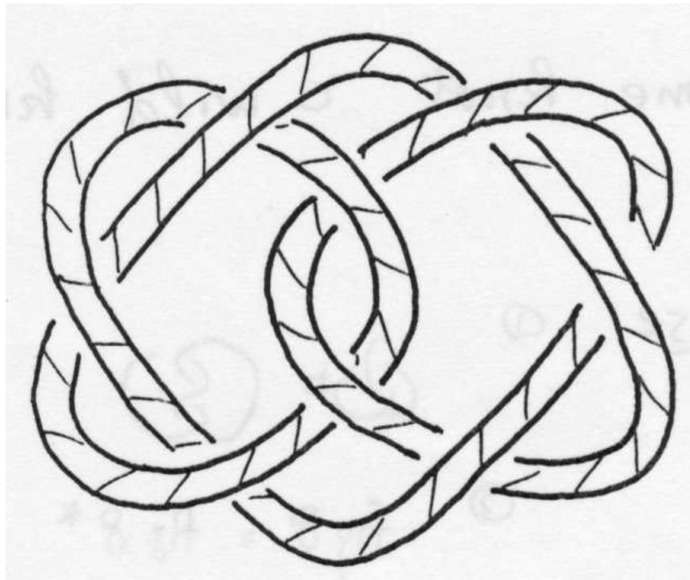
Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

結び目不変量〜その愛は本物か？

- **問題** 真実の愛の結び目と偽りの愛の結び目は違うのか？



真実の愛の結び目



偽りの愛の結び目

- **問題** この二つは果たして本当に違うのか？

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot_pix/

結び目が同じかどうかの判定

- 復習：２つの結び目図式の表わす結び目が同じ
$\Leftrightarrow$ ライデマイスター・ムーブを何回かすれば移りあう

結び目が同じかどうかの判定

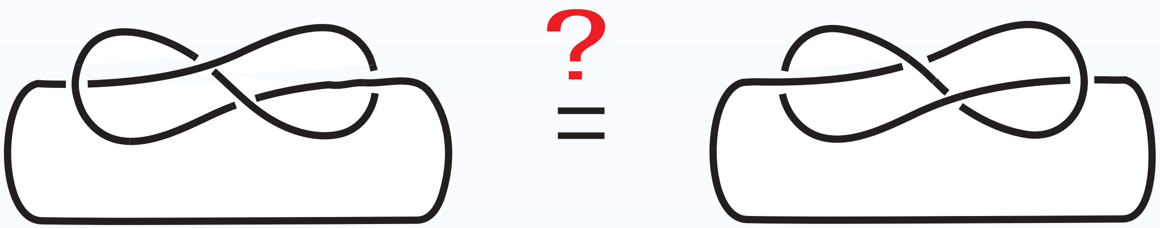
- 復習：２つの結び目図式の表わす結び目が同じ
$\Leftrightarrow$ ライデマイスター・ムーブを何回かすれば移りあう
- このアルゴリズムはない

結び目が同じかどうかの判定

- 復習：２つの結び目図式の表わす結び目が同じ
$\Leftrightarrow$ ライデマイスター・ムーブを何回かすれば移りあう
- このアルゴリズムはない
- 同じことを証明するには、実際に変形して見せればよい。

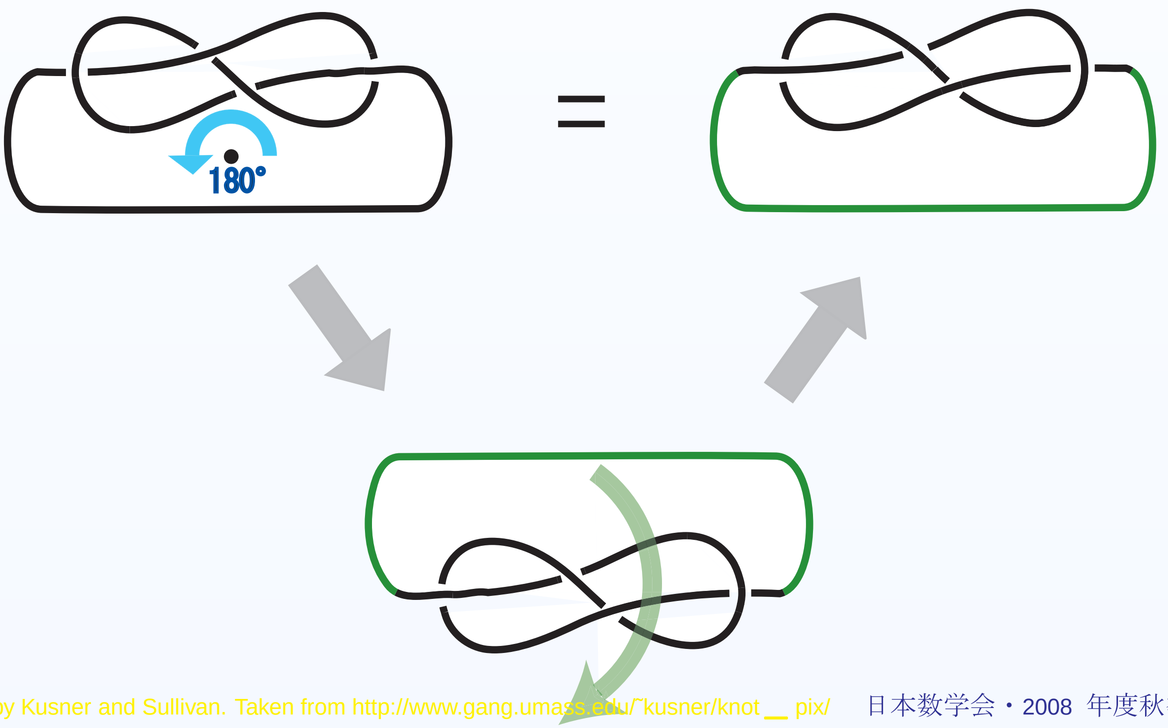
結び目が同じかどうかの判定

- 復習：２つの結び目図式の表わす結び目が同じ
⇔ ライデマイスター・ムーブを何回かすれば移りあう
- このアルゴリズムはない
- 同じことを証明するには、実際に変形して見せればよい。（簡単とは限らない）
- ８の字結び目＝その鏡像 ？



結び目が同じかどうかの判定

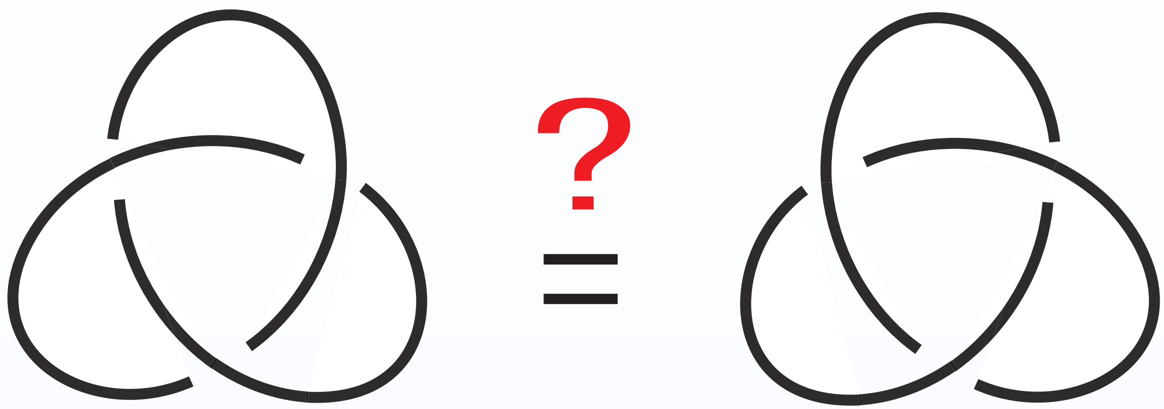
- 復習：２つの結び目図式の表わす結び目が同じ
⇔ ライデマイスター・ムーブを何回かすれば移りあう
- このアルゴリズムはない
- 同じことを証明するには、実際に変形して見せればよい。（簡単とは限らない）
- ８の字結び目＝その鏡像！



Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

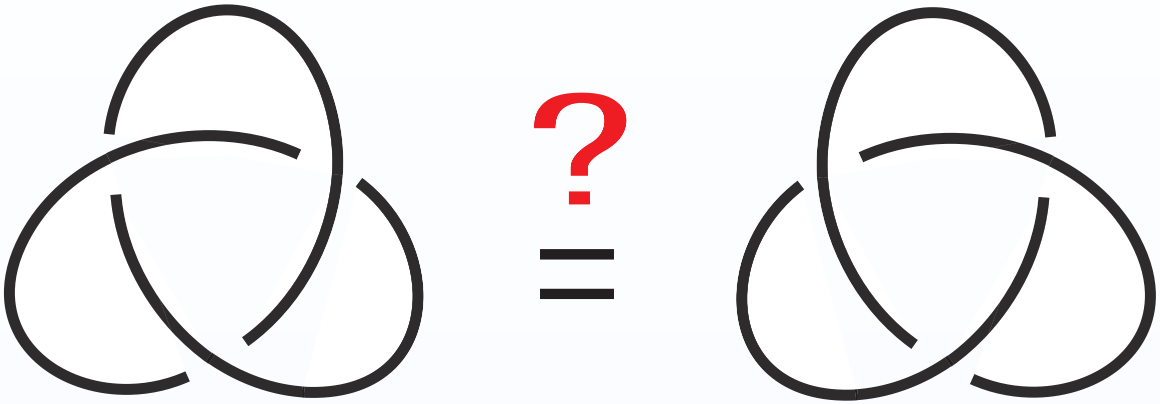
結び目が同じかどうかの判定

- ひとえ結び目＝その鏡像？



結び目が同じかどうかの判定

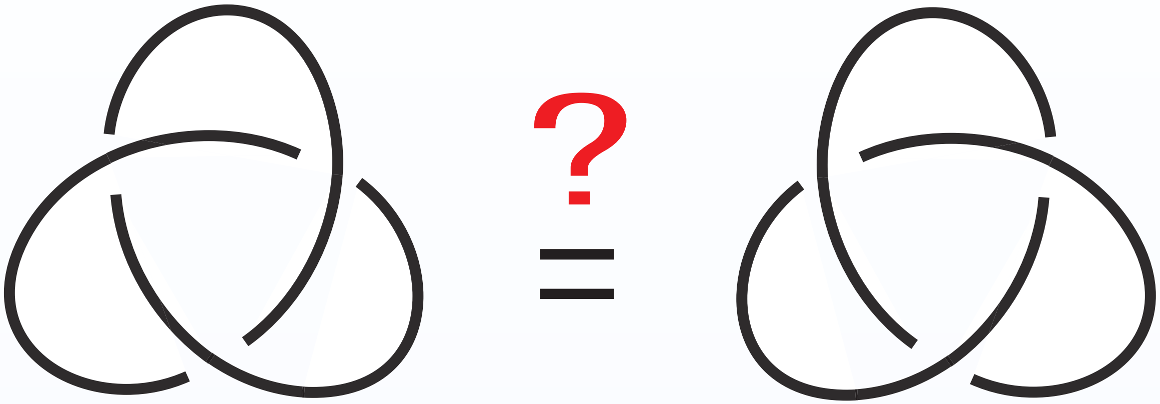
- ひとえ結び目＝その鏡像？



- いくらやってもできないからといって、２つが異なる、とは言えない。

結び目が同じかどうかの判定

- ひとえ結び目＝その鏡像？

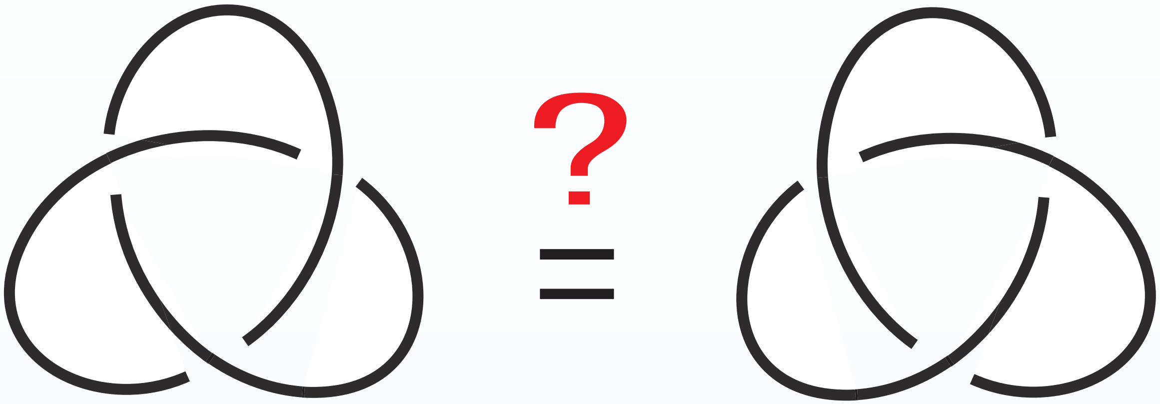


- いくらやってもできないからといって、２つが異なる、とは言えない。
- 異なるものが異なることを示す道具：**（結び目）不変量**

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot_pix/

結び目が同じかどうかの判定

- ひとえ結び目＝その鏡像？



- いくらやってもできないからといって、２つが異なる、とは言えない。
- 異なるものが異なることを示す道具：**（結び目）不変量**
- 不変量とは、
  {結び目} → ある集合（例：{数}、{多項式}、群）
  なる写像で、同じ結び目には同じ値を対応させるもの。

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot__pix/

不変量とは

- 対象となる集合T、「同じ」であるという関係$\sim$、ある集合S、TからSへの写像fで、「同じ」ものの行く先が等しいもの：$a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$。

不変量とは

- 対象となる集合T、「同じ」であるという関係$\sim$、ある集合S、TからSへの写像fで、「同じ」ものの行く先が等しいもの：$a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$。
- 対偶をとると$f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \not\sim b$

不変量とは

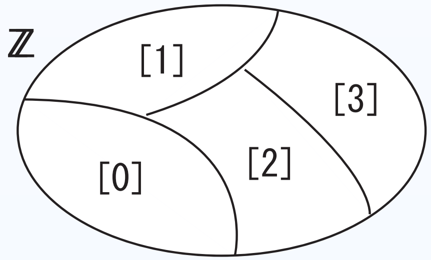
- 対象となる集合$\boldsymbol{T}$、「同じ」であるという関係$\sim$、ある集合$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{T}$から$\boldsymbol{S}$への写像$\boldsymbol{f}$で、「同じ」ものの行く先が等しいもの：$\boldsymbol{a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)}$。
- 対偶をとると$\boldsymbol{f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \not\sim b}$
- 例：$\boldsymbol{T} = \mathbb{Z} = \{$整数$\}$、$\sim$：4で割った余りが同じ、$\boldsymbol{S} = \{0, 1\}$、$\boldsymbol{f}$：2で割った余りを対応させる。

不変量とは

- 対象となる集合 T、「同じ」であるという関係 $\sim$、ある集合 S、T から S への写像 f で、「同じ」ものの行く先が等しいもの：$a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$。
- 対偶をとると $f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \not\sim b$
- 例：$T = \mathbb{Z} = \{\text{整数}\}$、$\sim$： 4 で割った余りが同じ、$S = \{0, 1\}$、$f$： 2 で割った余りを対応させる。
- T に同値関係 $\sim$ を入れる $\iff$ T の分割を与える

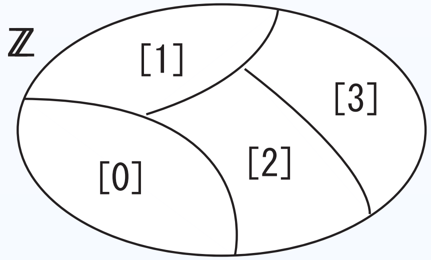
不変量とは

- 対象となる集合 T、「同じ」であるという関係 $\sim$、ある集合 S、T から S への写像 f で、「同じ」ものの行く先が等しいもの：$a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$。
- 対偶をとると $f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \not\sim b$
- 例：$T = \mathbb{Z} = \{$ 整数 $\}$、$\sim$ ： 4 で割った余りが同じ、$S = \{0, 1\}$、f ： 2 で割った余りを対応させる。
- T に同値関係 $\sim$ を入れる $\Longleftrightarrow$ T の分割を与える
- 上の例だと、$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3]$（非交和），ただし $[i] = \{4n + i | n \in \mathbb{Z}\}$



不変量とは

- 対象となる集合 T、「同じ」であるという関係 $\sim$、ある集合 S、T から S への写像 f で、「同じ」ものの行く先が等しいもの：$a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$。
- 対偶をとると $f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \not\sim b$
- 例：$T = \mathbb{Z} = \{$ 整数 $\}$、$\sim$ ：4 で割った余りが同じ、$S = \{0, 1\}$、f ：2 で割った余りを対応させる。
- T に同値関係 $\sim$ を入れる $\Longleftrightarrow$ T の分割を与える
- 上の例だと、$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3]$（非交和），ただし $[i] = \{4n + i | n \in \mathbb{Z}\}$



- f が不変量 $\Longleftrightarrow$ f は $[i]$ 上同じ値をとる

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot__pix/

１５パズルの不変量

- T：15 パズルの状態全て（16!個の元よりなる)、
  $\sim$：ピースをスライドさせて移りあう、
  $S = \{+1, -1\}$、f：置換の符号×アルファ

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

１５パズルの不変量

- T : 15パズルの状態全て（16!個の元よりなる）、
$\sim$: ピースをスライドさせて移りあう、
$S = \{+1, -1\}$、f : 置換の符号 × アルファ

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	14	15	12

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

１５パズルの不変量

- T：15パズルの状態全て（16!個の元よりなる)、$\sim$：ピースをスライドさせて移りあう、$S = \{+1, -1\}$、f：置換の符号×アルファ

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		11
13	14	15	12

１５パズルの不変量

- T：15パズルの状態全て（16!個の元よりなる）、
  $\sim$：ピースをスライドさせて移りあう、
  $S = \{+1, -1\}$、f：置換の符号 × アルファ

1	2	3	4
5	6	7	8
9		10	11
13	14	15	12

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

１５パズルの不変量

- T：15パズルの状態全て（16!個の元よりなる)、
$\sim$：ピースをスライドさせて移りあう、
$S = \{+1, -1\}$、f：置換の符号×アルファ
- 同値関係$\sim$は、
「１つのピースを横に動かす」
と
「１つのピースを縦に動かす」
の２つの操作を有限回繰り返せば得られる。

１５パズルの不変量

- $\boldsymbol{T}$：15 パズルの状態全て（16!個の元よりなる)、
  $\sim$：ピースをスライドさせて移りあう、
  $\boldsymbol{S = \{+1, -1\}}$、$\boldsymbol{f}$：置換の符号 × アルファ
- 同値関係 $\sim$ は、
  「１つのピースを横に動かす」
  と
  「１つのピースを縦に動かす」
  の２つの操作を有限回繰り返せば得られる。
- $\boxed{\boldsymbol{f} \text{ が不変量} \iff \boldsymbol{f} \text{ の値が上の２つの操作で変わらない}}$

１５パズルの不変量

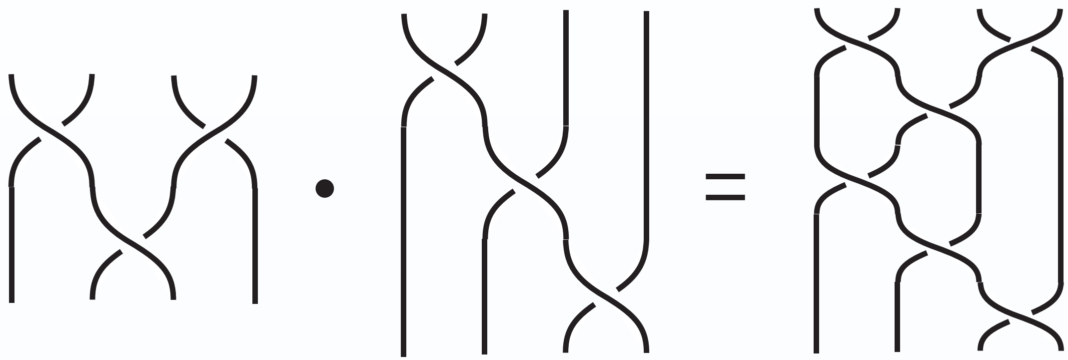
- T：15 パズルの状態全て（16!個の元よりなる）、
  $\sim$：ピースをスライドさせて移りあう、
  $S = \{+1, -1\}$、f：置換の符号×アルファ
- 同値関係 $\sim$ は、
  「１つのピースを横に動かす」
  と
  「１つのピースを縦に動かす」
  の２つの操作を有限回繰り返せば得られる。
- $\boxed{f \text{ が不変量} \iff f \text{ の値が上の２つの操作で変わらない}}$
- 不変量を用いると、
  「14 と 15 のピースだけ入れ替えることはできない」
  ことが分かる

１５パズルの不変量

- T：15 パズルの状態全て（16!個の元よりなる）、
  $\sim$：ピースをスライドさせて移りあう、
  $S = \{+1, -1\}$、f：置換の符号×アルファ
- 同値関係 $\sim$ は、
  「１つのピースを横に動かす」
  と
  「１つのピースを縦に動かす」
  の２つの操作を有限回繰り返せば得られる。
- $\boxed{f \text{ が不変量} \iff f \text{ の値が上の２つの操作で変わらない}}$
- 不変量を用いると、
  「14 と 15 のピースだけ入れ替えることはできない」
  ことが分かる
- 結び目不変量（ジョーンズ多項式）に戻りましょう。

組み紐群〜Jones 多項式への架け橋

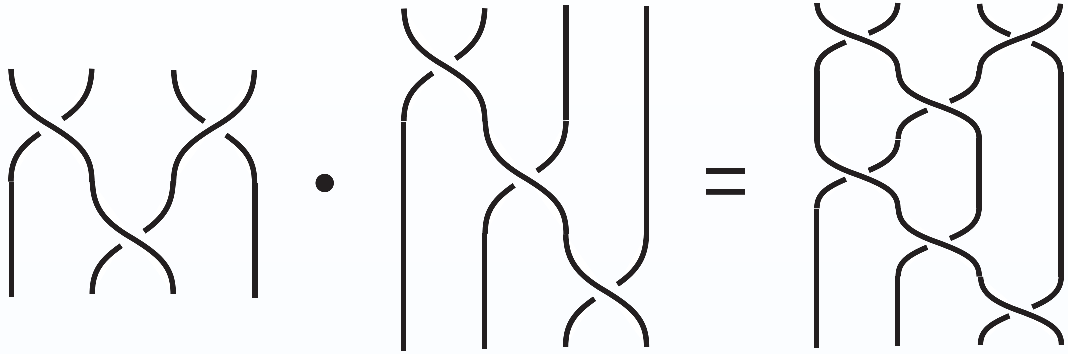
- $\boldsymbol{n}$ 本の紐からなる組み紐全体 $\boldsymbol{B_n}$ は



で積（演算）を定めることにより、「群」になる。

組み紐群～Jones 多項式への架け橋

- $\boldsymbol{n}$ 本の紐からなる組み紐全体 $\boldsymbol{B_n}$ は



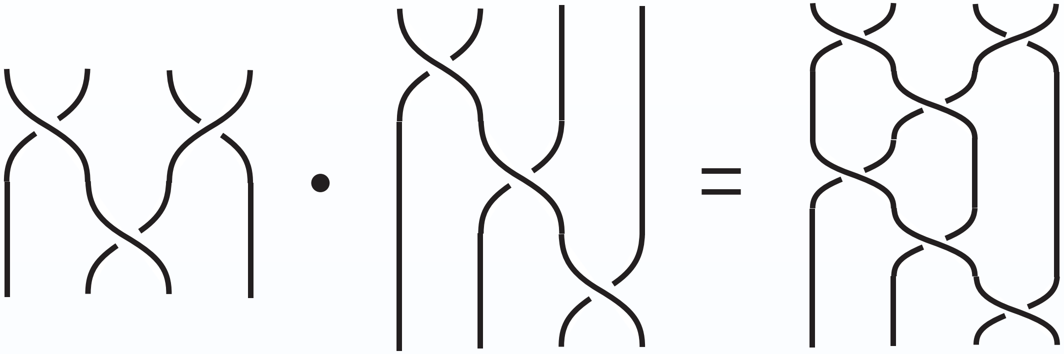
で積（演算）を定めることにより、「群」になる。

- 代数的なとり扱いができる！

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot_pix/

組み紐群〜Jones 多項式への架け橋

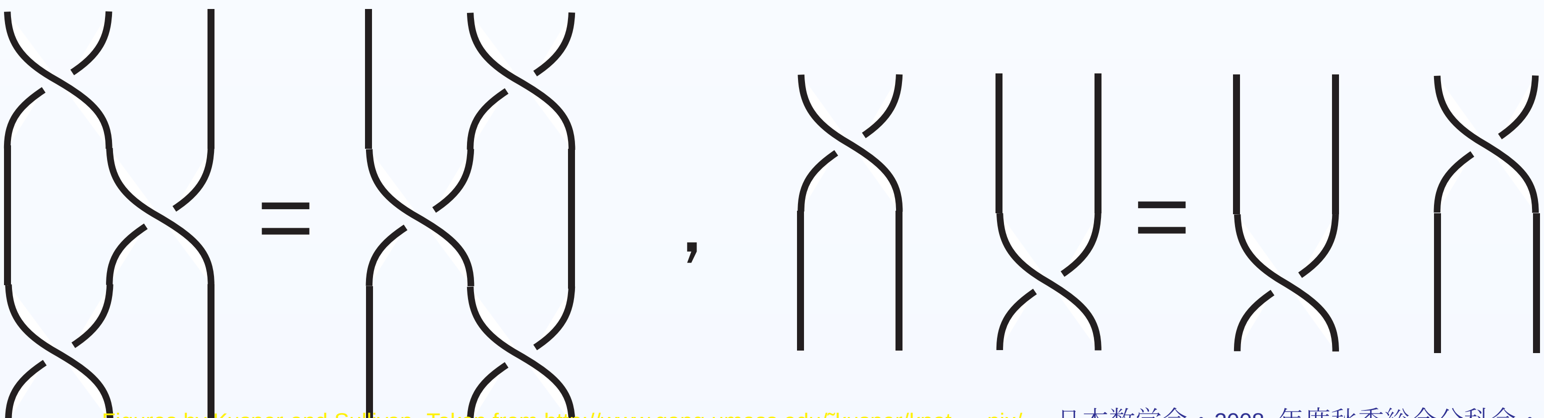
- $\boldsymbol{n}$ 本の紐からなる組み紐全体 $\boldsymbol{B_n}$ は



で積（演算）を定めることにより、「群」になる。

- 代数的なとり扱いができる！

- この組み紐群は  の形のものとその逆元で生成され、次の関係式（組み紐関係式）を満たす。



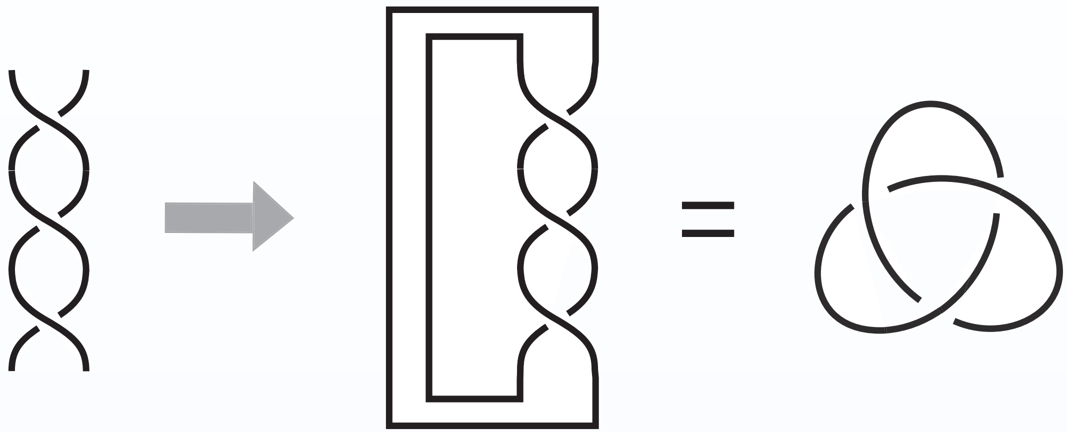
Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

組み紐から結び目、絡み目へ

- 組み紐を閉じると、結び目、絡み目になる

組み紐から結び目、絡み目へ

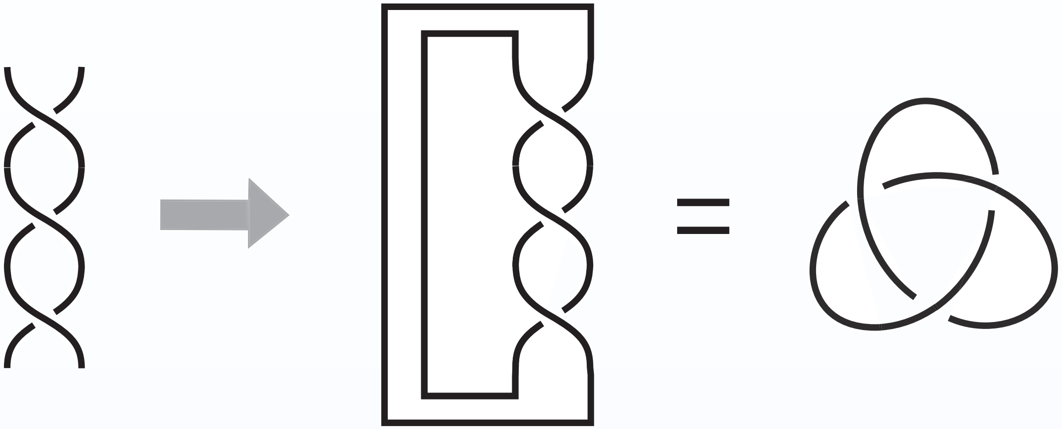
- 組み紐を閉じると、結び目、絡み目になる

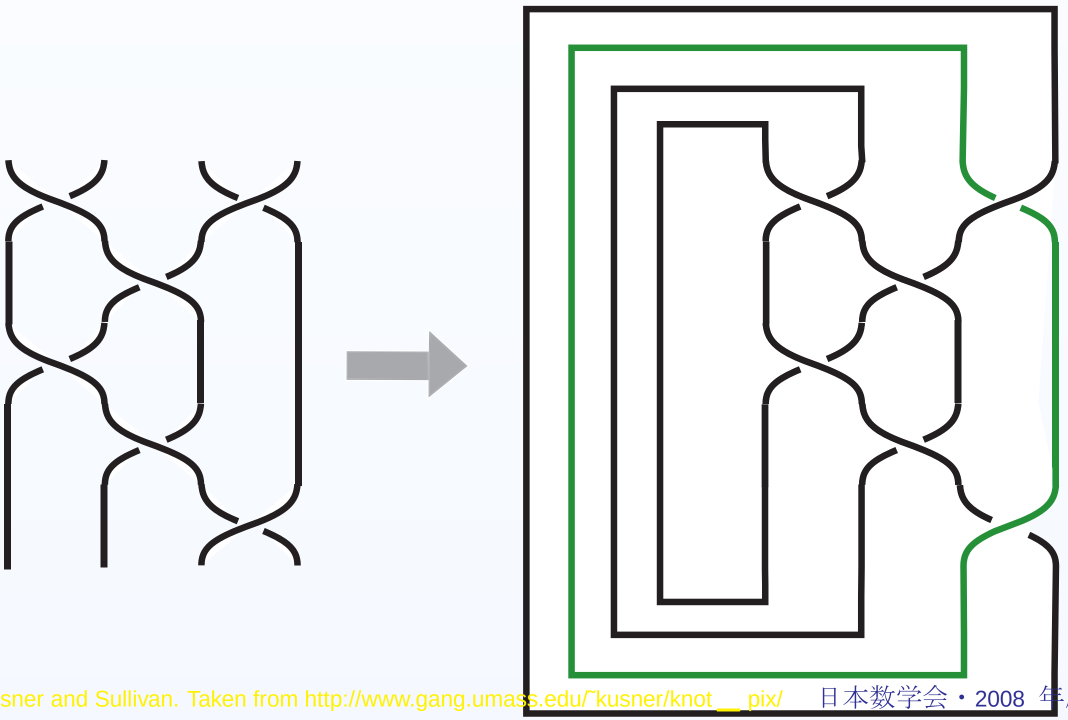


Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot_pix/

組み紐から結び目、絡み目へ

- 組み紐を閉じると、結び目、絡み目になる





Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot__pix/

ジョーンズ多項式の特徴づけ

- $T = \{$結び目（と絡み目）$\}$、$\sim$:「同じ」、
  $S = \{t\ (t^{\frac{1}{2}})$ の（負の冪も許した）整数係数多項式$\}$

ジョーンズ多項式の特徴づけ

- $\boldsymbol{T} = \{$ 結び目（と絡み目）$\}$、$\sim$:「同じ」、
$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{t}\ (\boldsymbol{t}^{\frac{1}{2}})$ の（負の冪も許した）整数係数多項式 $\}$
- 結び目または絡み目 $\boldsymbol{L}$ のジョーンズ多項式 $\boldsymbol{V_L(t)}$ は、次の２つの性質で特徴付けられる。

ジョーンズ多項式の特徴づけ

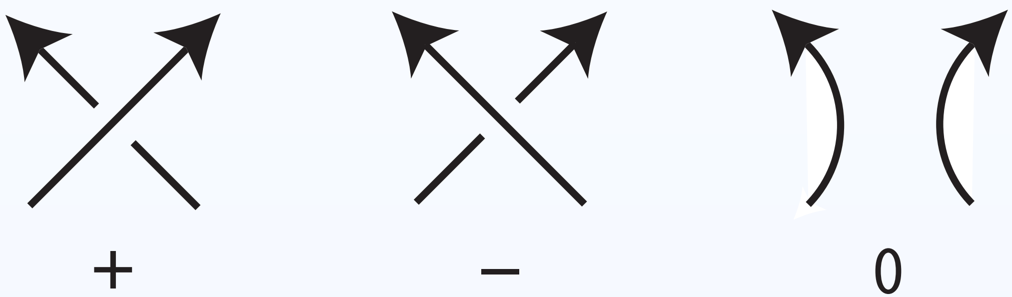
- $T = \{$結び目（と絡み目）$\}$、$\sim$:「同じ」、
  $S = \{t\ (t^{\frac{1}{2}})$ の（負の冪も許した）整数係数多項式$\}$
- 結び目または絡み目 L のジョーンズ多項式 $V_L(t)$ は、
  次の２つの性質で特徴付けられる。
  - 自明な結び目を○で表すと $V_\circ(t) = 1$

ジョーンズ多項式の特徴づけ

- T = { 結び目（と絡み目）}、∼ :「同じ」、
  $S = \{t\ (t^{\frac{1}{2}})$ の（負の冪も許した）整数係数多項式 $\}$
- 結び目または絡み目 L のジョーンズ多項式 $V_L(t)$ は、次の 2 つの性質で特徴付けられる。
  - 自明な結び目を○で表すと $V_\circ(t) = 1$
  - スケイン関係式

$$\boxed{t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)}$$

ただし、L_+, L_-, L_0 はある図式の 1 つの“交点”の部分だけを次で置き換えてできるもの：



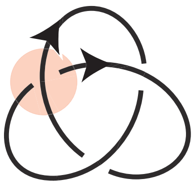
Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

ひとえ結び目のジョーンズ多項式

- $\boldsymbol{V_{\circ}(t) = 1}$ & $\boldsymbol{t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)}$

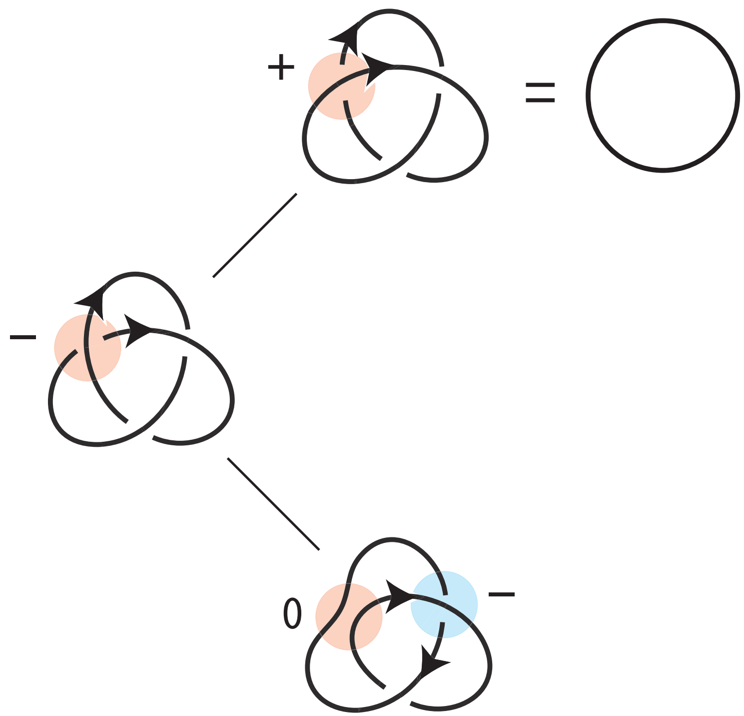
ひとえ結び目のジョーンズ多項式

$$V_{\circ}(t) = 1 \ \& \ t^{-1} V_{L_+}(t) - t V_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) V_{L_0}(t)$$

$-$ 

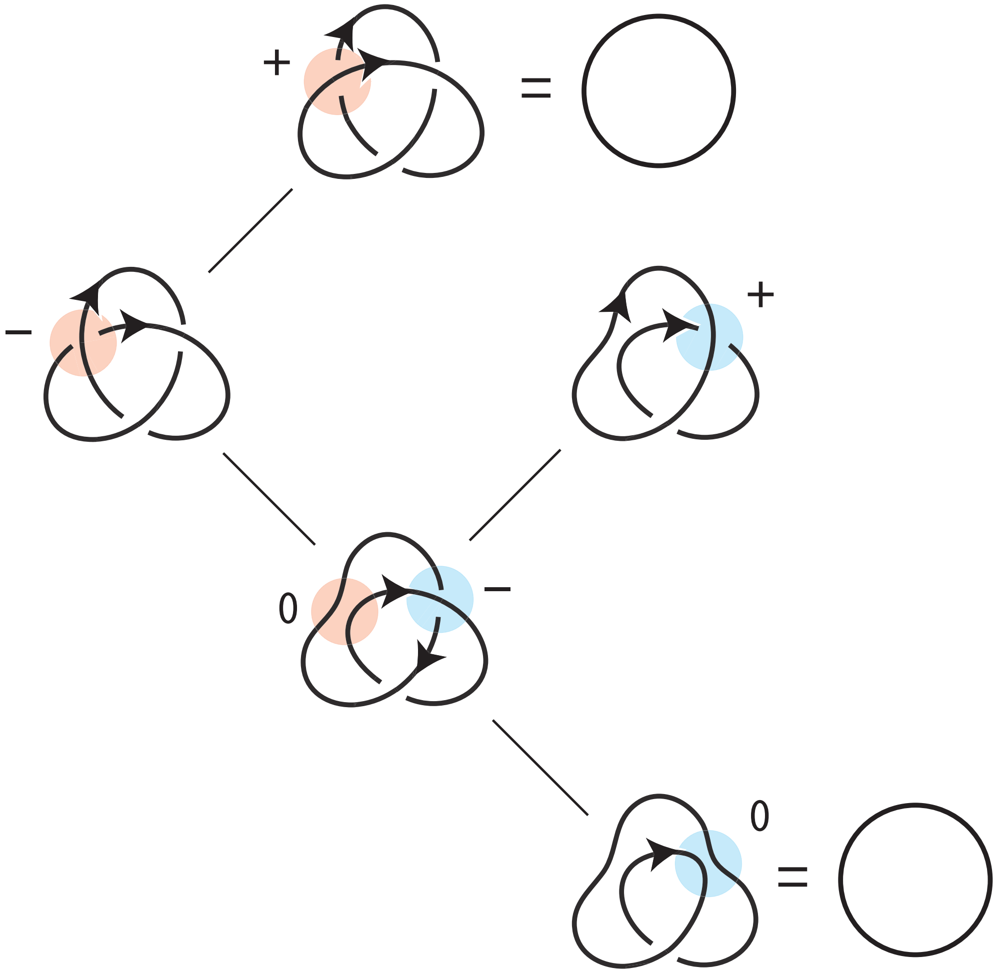
ひとえ結び目のジョーンズ多項式

$$V_\circ(t) = 1 \;\&\; t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)$$



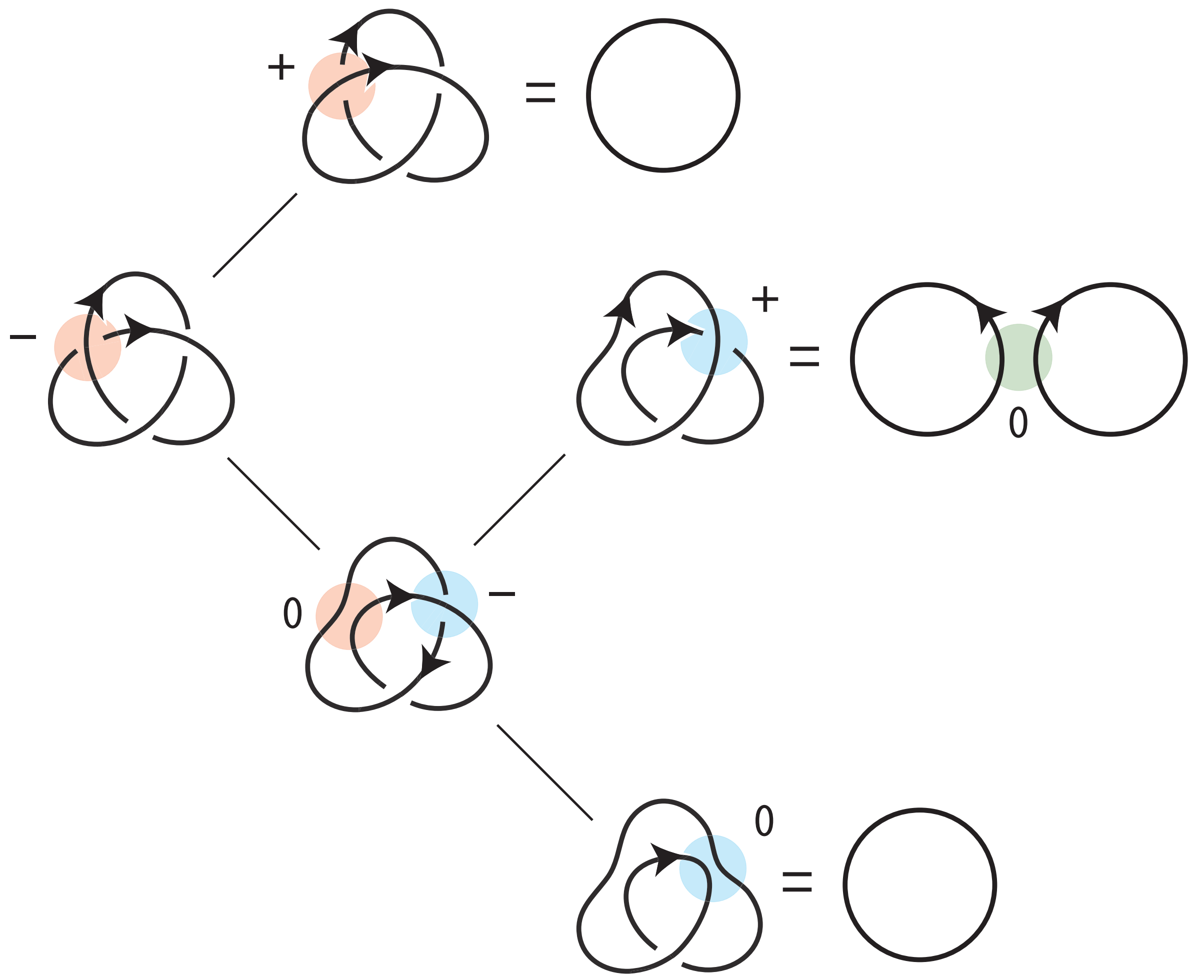
ひとえ結び目のジョーンズ多項式

$V_{\circ}(t) = 1$ & $t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)$



ひとえ結び目のジョーンズ多項式

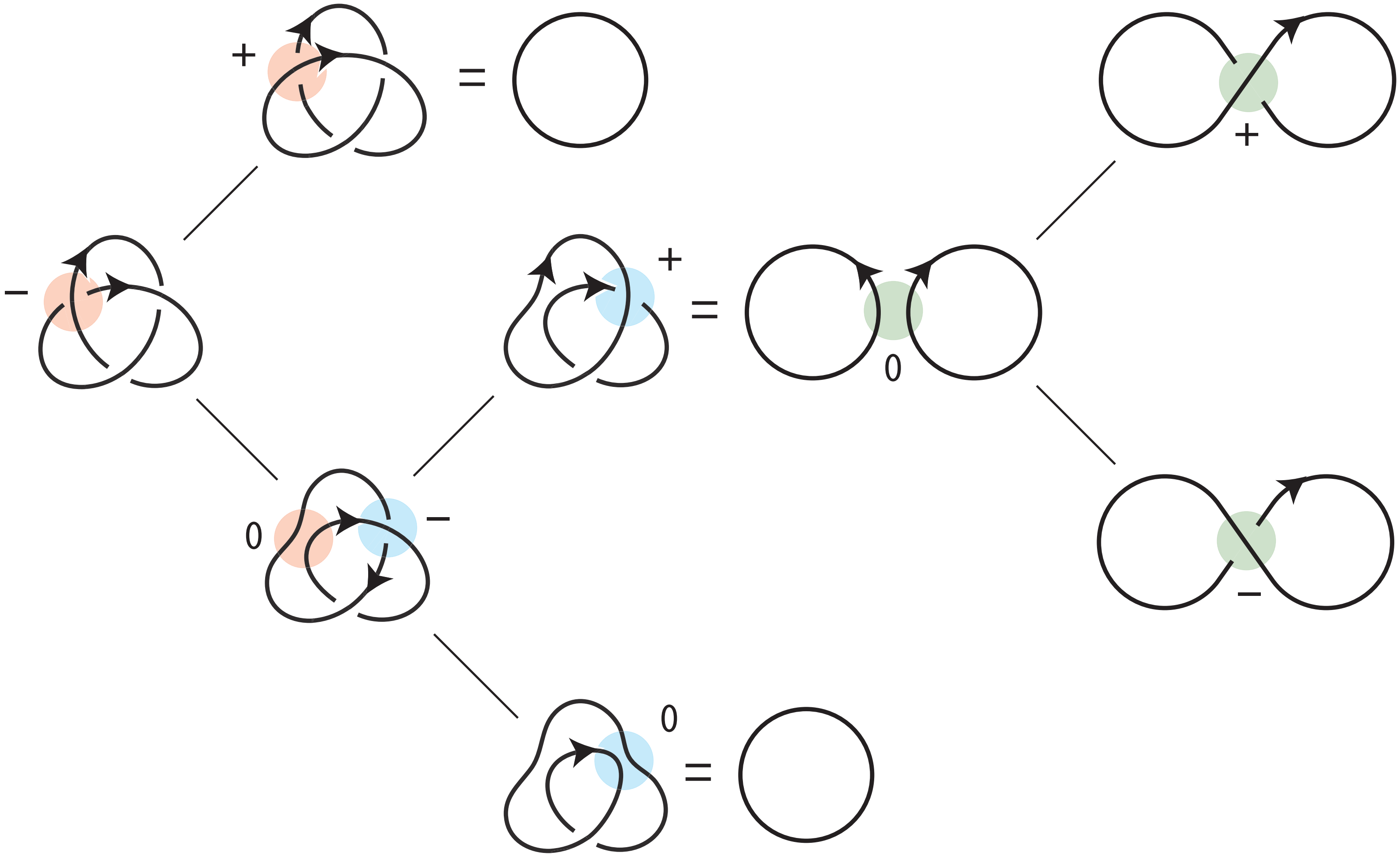
$$V_{\circ}(t) = 1 \ \& \ t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)$$



Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot__pix/

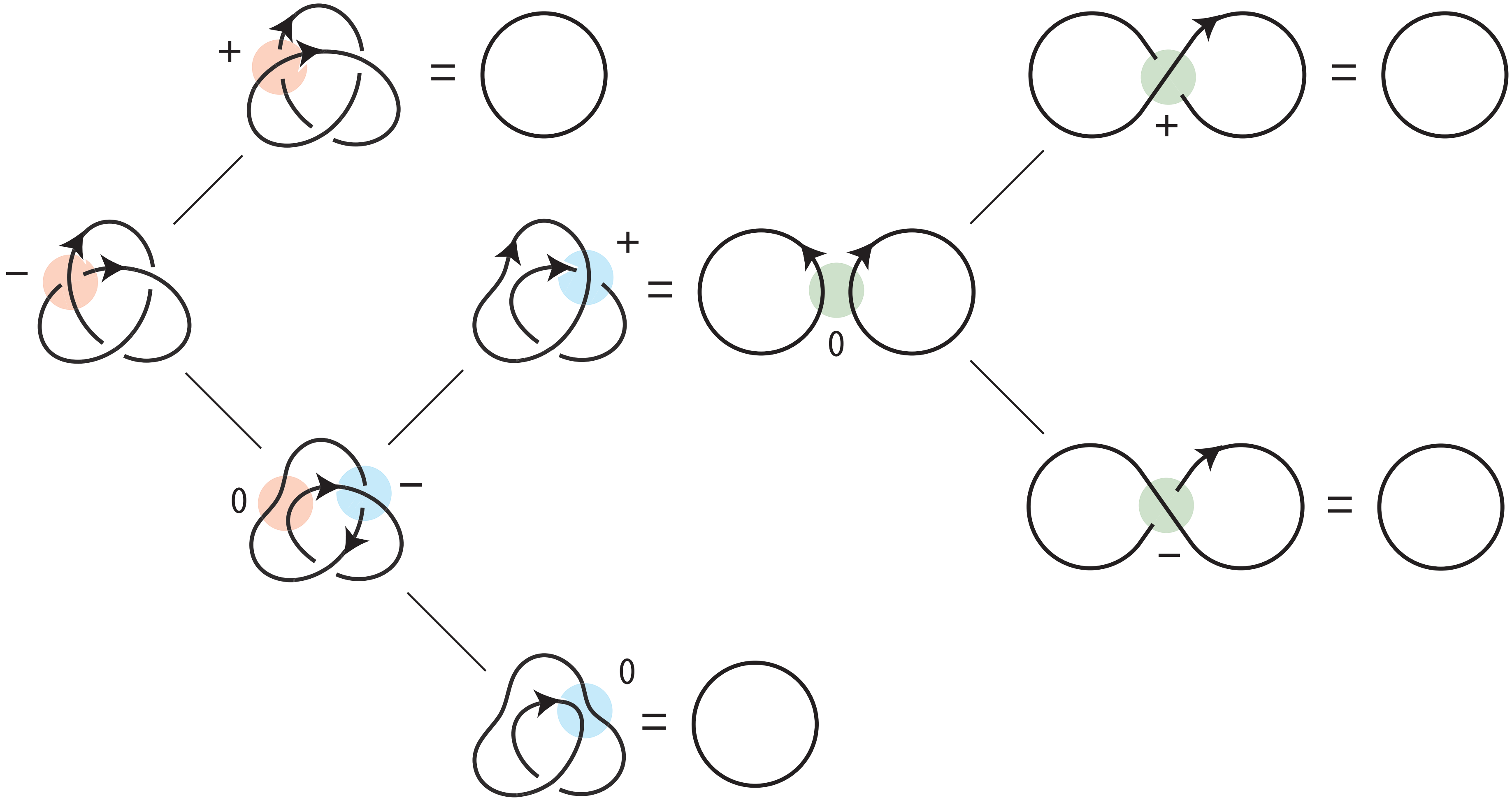
ひとえ結び目のジョーンズ多項式

$$\boldsymbol{V_\circ(t) = 1 \ \& \ t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)}$$



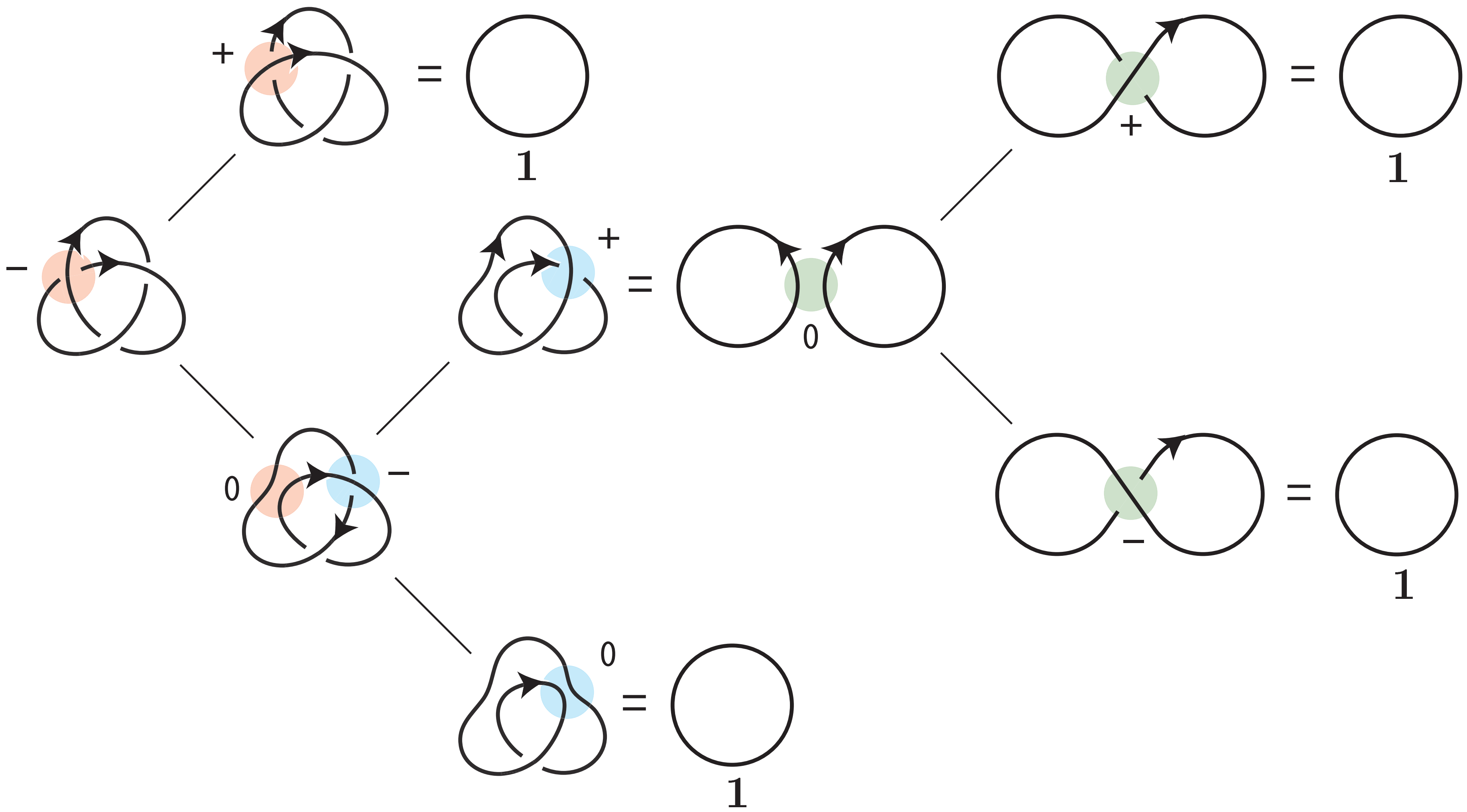
ひとえ結び目のジョーンズ多項式

$$V_{\circ}(t) = 1 \ \& \ t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)$$



ひとえ結び目のジョーンズ多項式

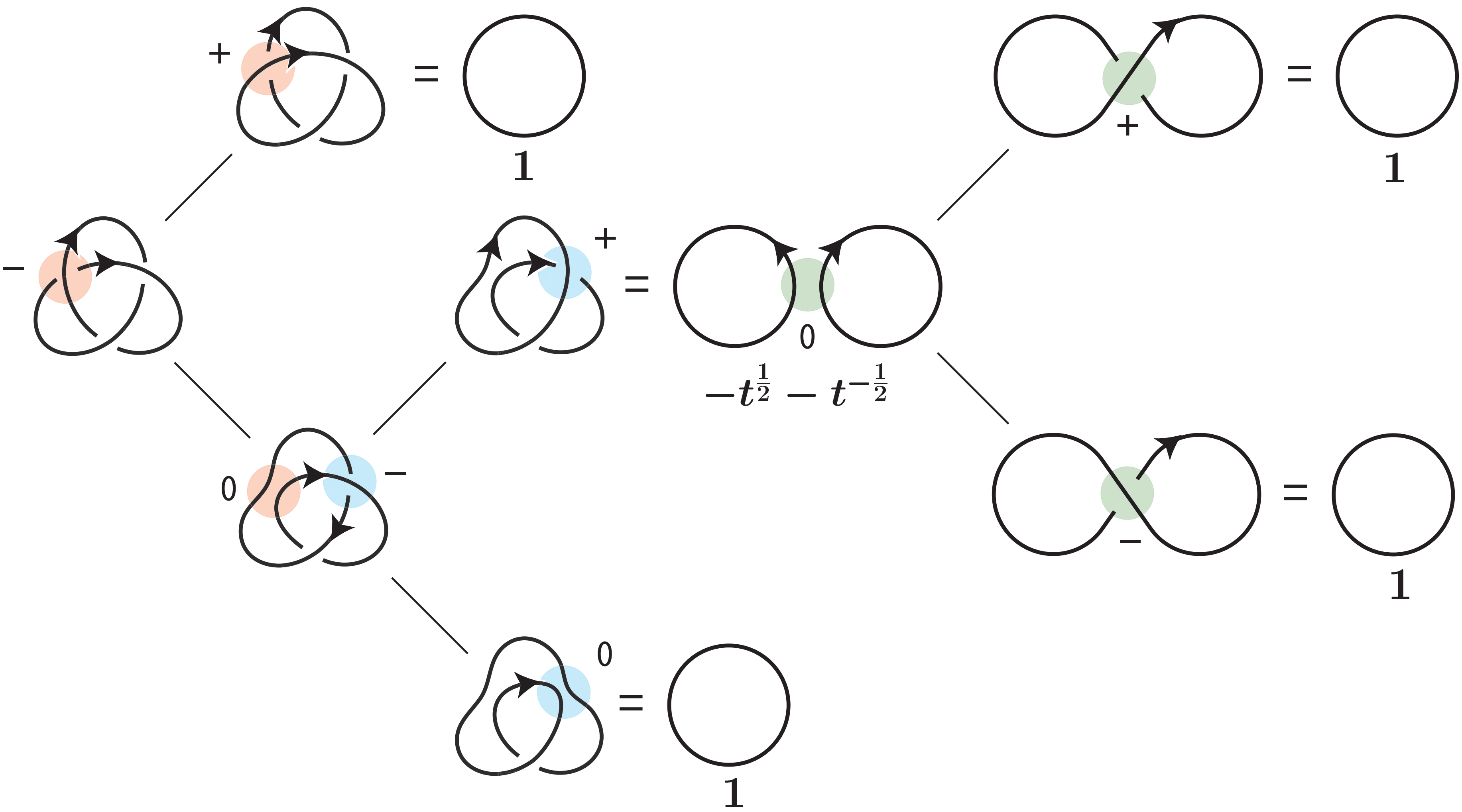
$$V_{\circ}(t) = 1 \ \& \ t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)$$



Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_ pix/

ひとえ結び目のジョーンズ多項式

$$V_{\circ}(t) = 1 \ \& \ t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)$$

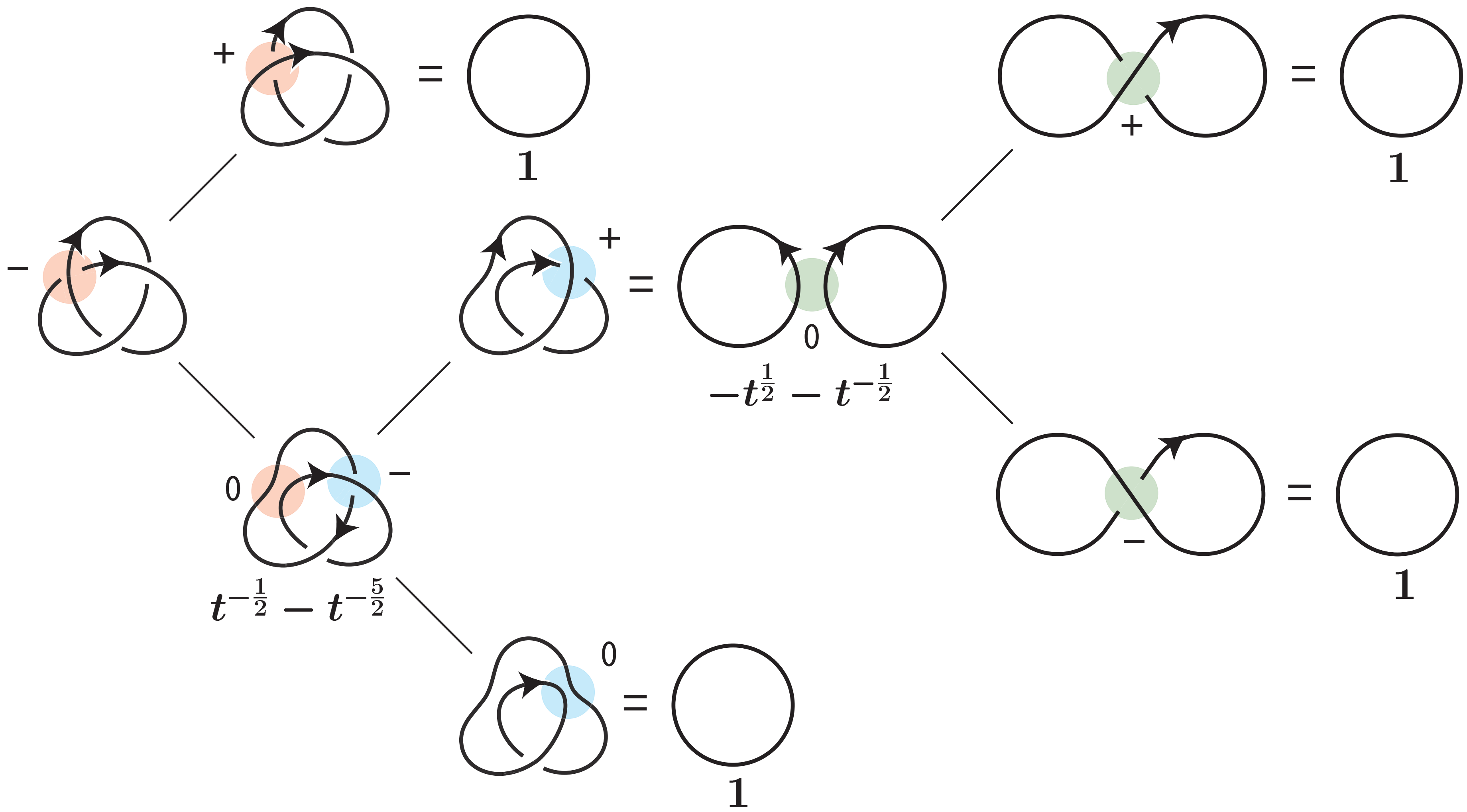


$$(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{\circ\cup\circ} = t^{-1} - t$$

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot__pix/

ひとえ結び目のジョーンズ多項式

$$V_{\circ}(t) = 1 \ \& \ t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)$$

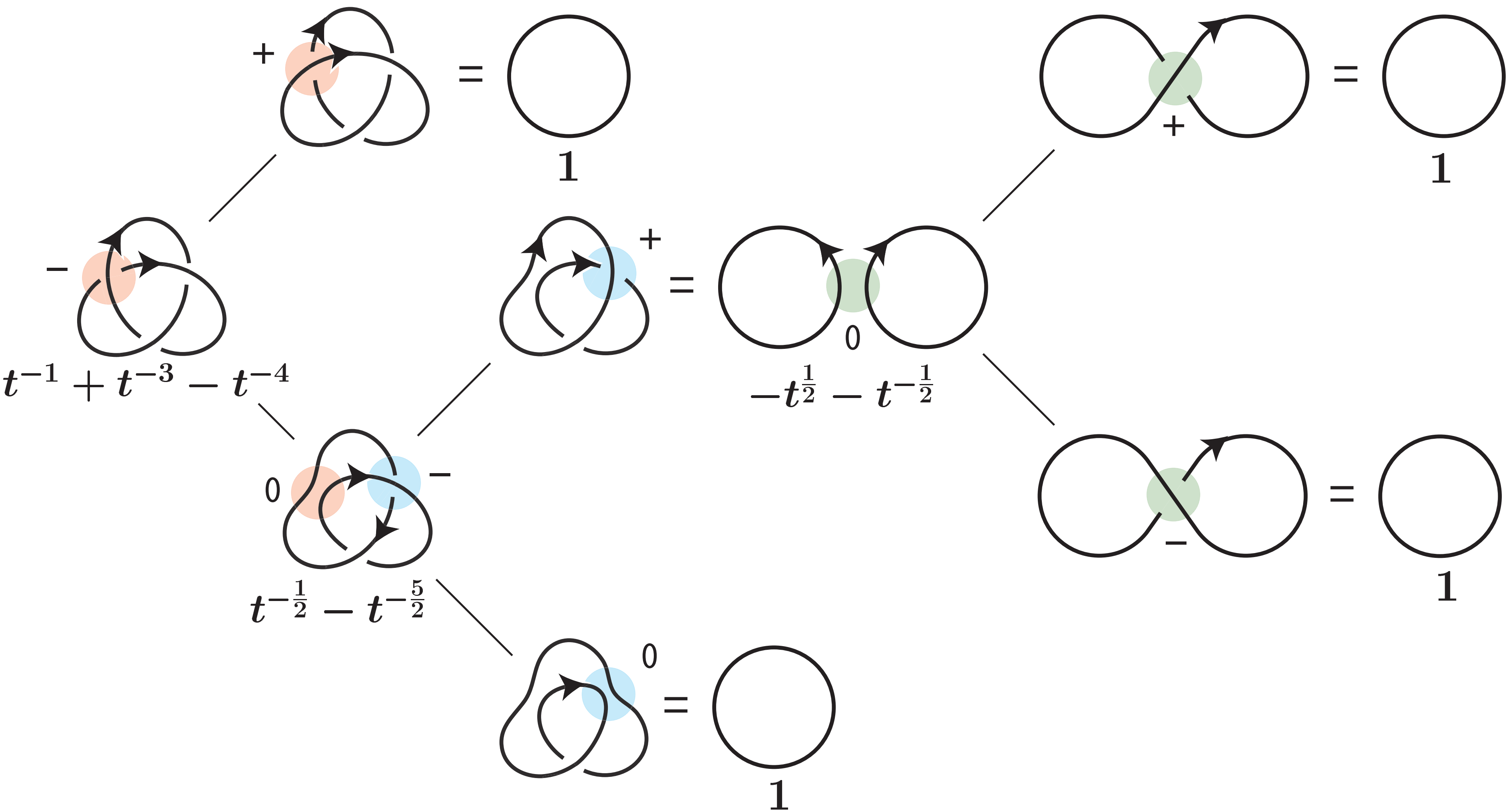


$$V(t) = t^{-1}\left\{t^{-1}(-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \cdot 1\right\}$$

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

ひとえ結び目のジョーンズ多項式

$$V_\circ(t) = 1 \;\&\; t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)$$



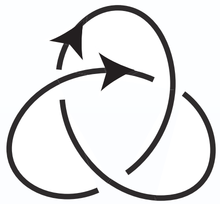
$$V_{-\text{trefoil}}(t) = t^{-1}\left\{t^{-1}\cdot 1 - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}})\right\}$$

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot__pix/

ジョーンズ多項式での結び目判定

- ひとえ結び目とその鏡像

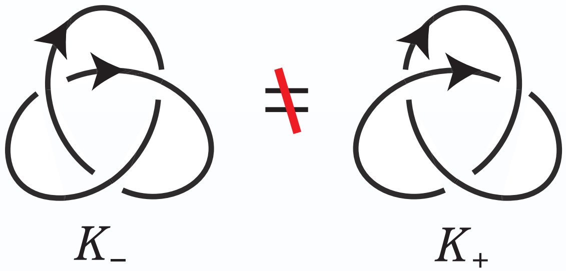
K_-



K_+

ジョーンズ多項式での結び目判定

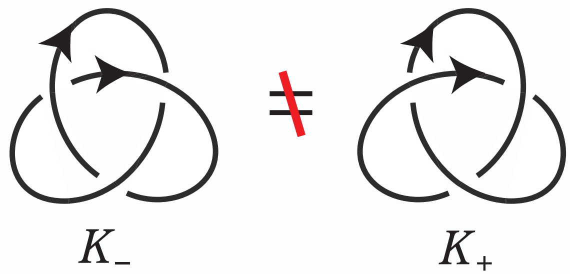
- ひとえ結び目とその鏡像は違う！



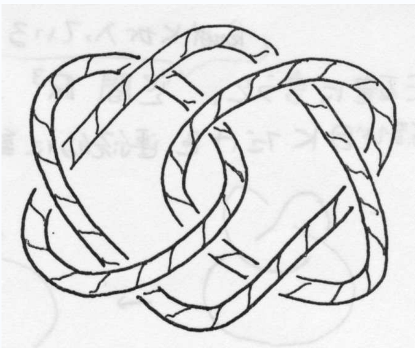
- $V_{K_-}(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1} \neq V_{K_+}(t) = -t^4 + t^3 + t$

ジョーンズ多項式での結び目判定

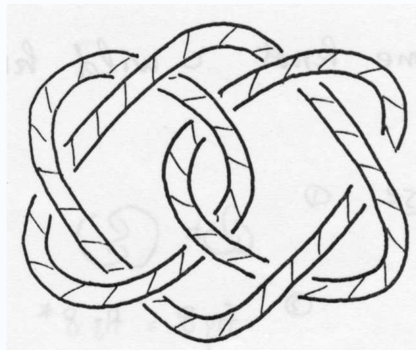
- ひとえ結び目とその鏡像は違う！



- $V_{K_-}(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1} \neq V_{K_+}(t) = -t^{4} + t^{3} + t$
- 真実の愛の結び目と偽りの愛の結び目



真実の愛の結び目 TL

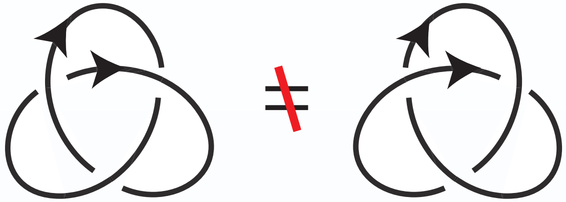


偽りの愛の結び目 FL

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

ジョーンズ多項式での結び目判定

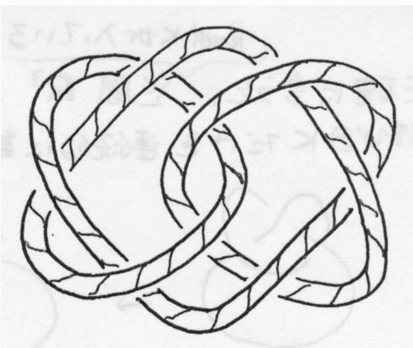
- ひとえ結び目とその鏡像は違う！



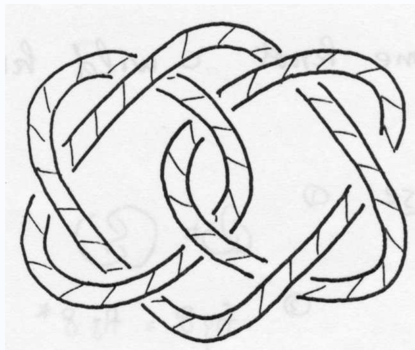
K_- K_+

- $V_{K_-}(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1} \neq V_{K_+}(t) = -t^4 + t^3 + t$

- 真実の愛の結び目と偽りの愛の結び目は違う！



$\neq$



真実の愛の結び目 TL　　　偽りの愛の結び目 FL

- $V_{TL}(t) = t^3 + t^5 - t^8$

$\neq V_{FL}(t) = 1 - t + 3t^2 - 3t^3 + 3t^4 - 4t^5 + 3t^6 - 2t^7 + t^8$

他分野との関連〜３次元多様体

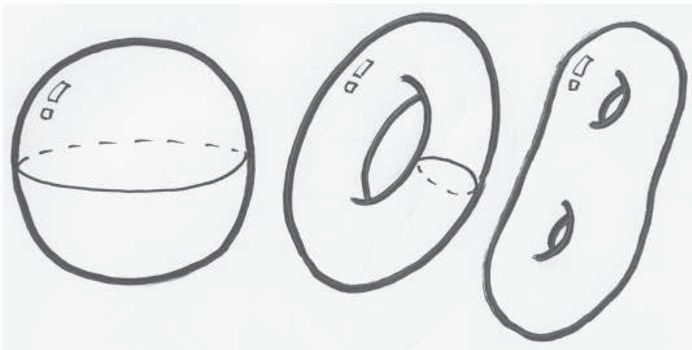
- 日本数学会内での結び目理論の位置⊂Ｘ（トポロジー）（Ｉ〜Ｘ中）

他分野との関連～３次元多様体

- 日本数学会内での結び目理論の位置⊂Ｘ（トポロジー）（Ｉ～Ｘ中）
３次元多様体論・・・トポロジー、幾何学
多様体：（幾何学者にとっての）「空間」（の一つ）。
局所的にみるとどこも(ユークリッド(半) 空間と) 同じ

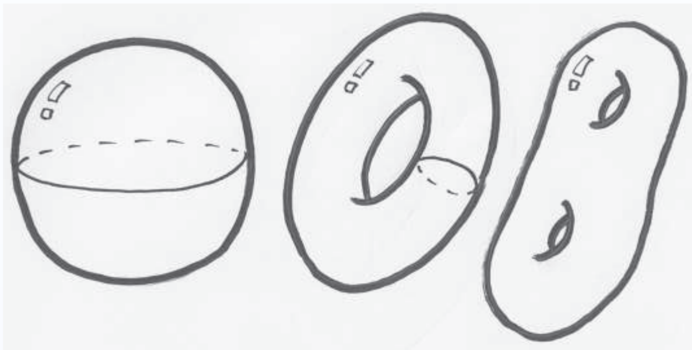
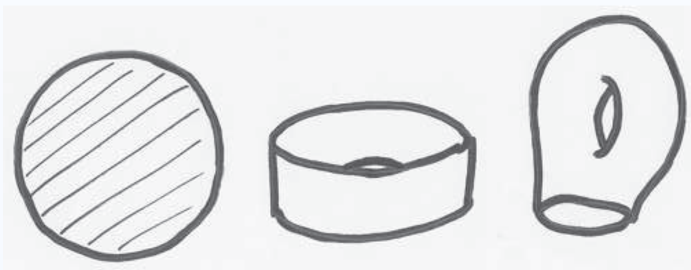
他分野との関連〜３次元多様体

- 多様体：(幾何学者にとっての)「空間」(の一つ)。局所的にみるとどこも(ユークリッド(半)空間と)同じ
- (連結で有界な) ２次元多様体（曲面）の例：

	向き付け可能	向き付け不可能
境界なし		
境界あり		

他分野との関連〜３次元多様体

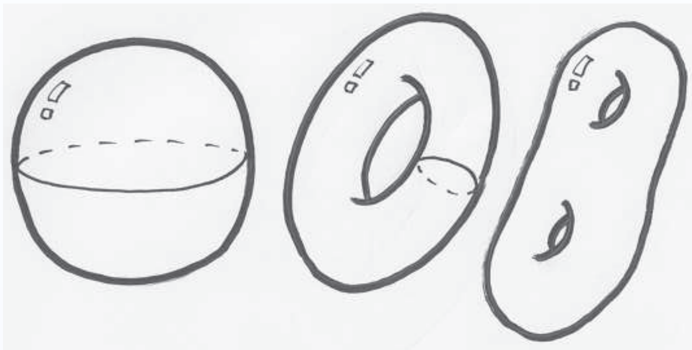
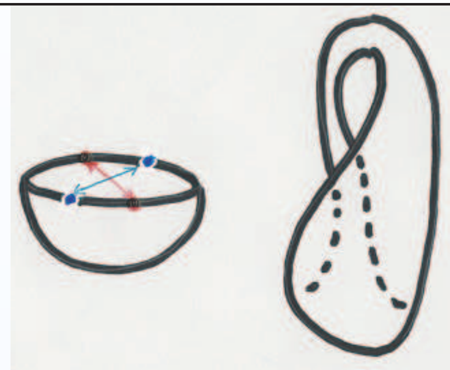
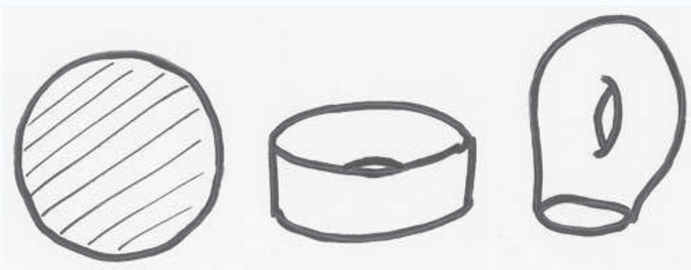
- 多様体：(幾何学者にとっての)「空間」(の一つ)。
  局所的にみるとどこも(ユークリッド(半) 空間と) 同じ
- （連結で有界な） ２次元多様体（曲面） の例：

	向き付け可能	向き付け不可能
境界なし		
境界あり		

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

他分野との関連〜３次元多様体

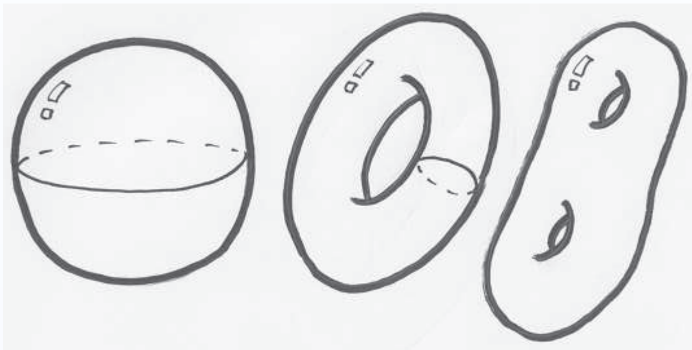
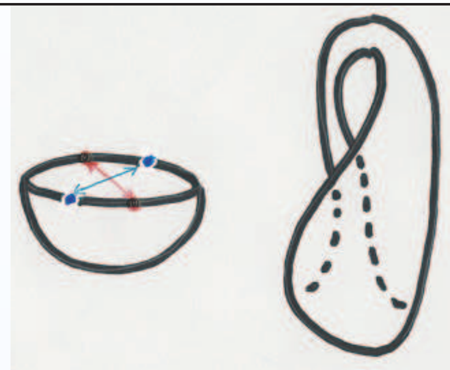
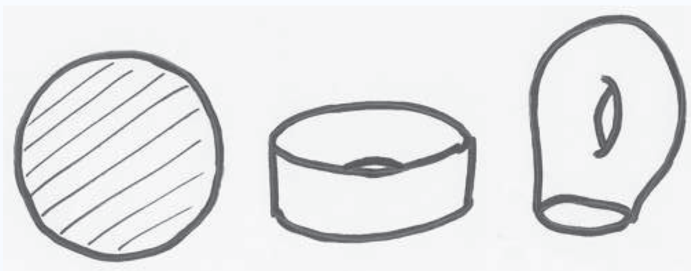
- 多様体：（幾何学者にとっての）「空間」（の一つ）。
局所的にみるとどこも(ユークリッド(半) 空間と) 同じ
- （連結で有界な）２次元多様体（曲面）の例：

	向き付け可能	向き付け不可能
境界なし		
境界あり		

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

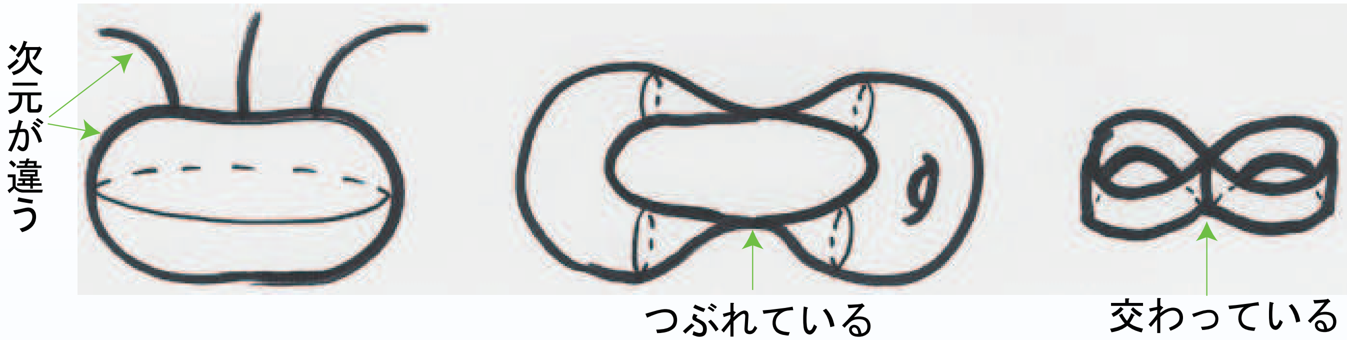
他分野との関連〜３次元多様体

- 多様体：(幾何学者にとっての)「空間」(の一つ)。
局所的にみるとどこも(ユークリッド(半)空間と)同じ
- (連結で有界な) ２次元多様体 (曲面) の例：

	向き付け可能	向き付け不可能
境界なし		
境界あり		

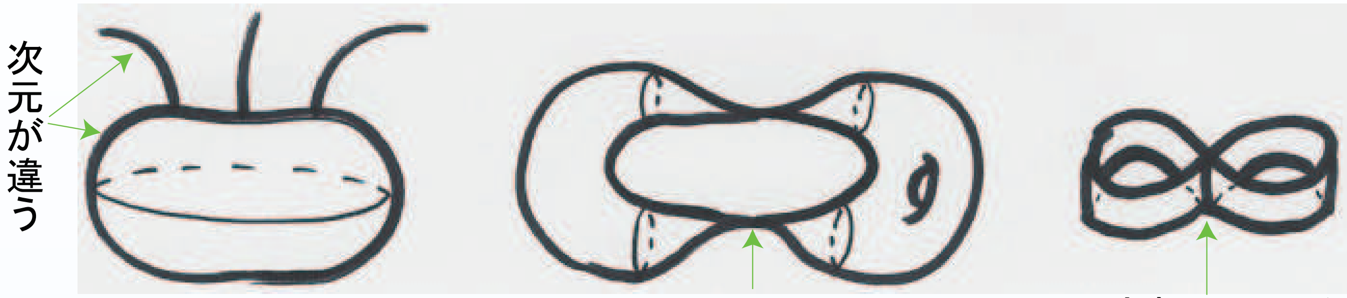
多様体と結び目

- 多様体でない例：



多様体と結び目

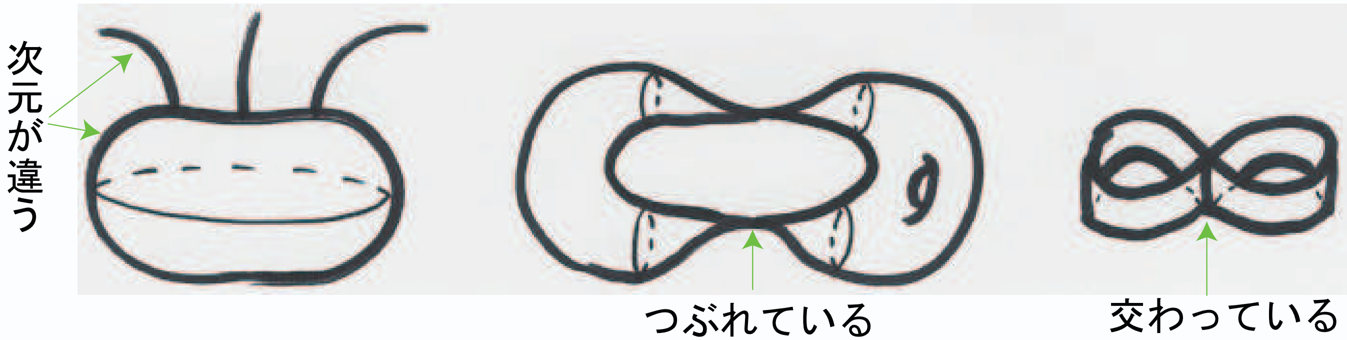
- 多様体でない例：



- 多様体と結び目のつながり

多様体と結び目

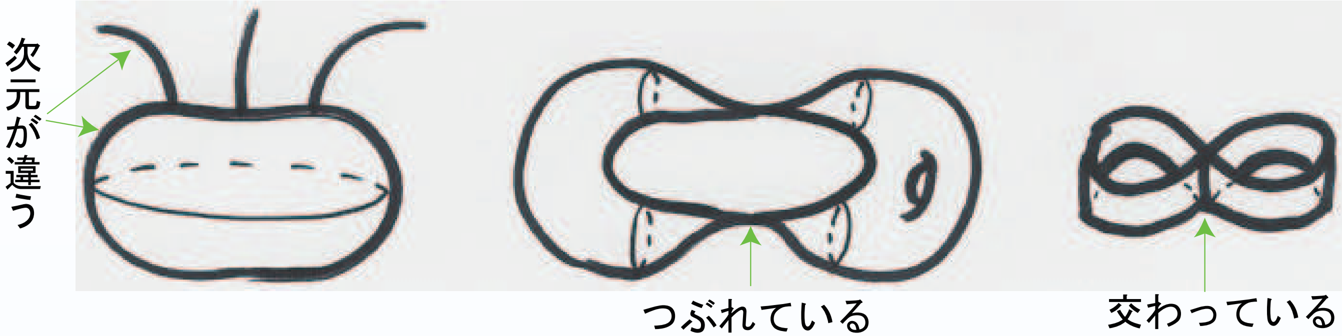
- 多様体でない例：



- 多様体と結び目のつながり
- 多様体の表わし方
  - 絵　・・・ 大体２次元まで

多様体と結び目

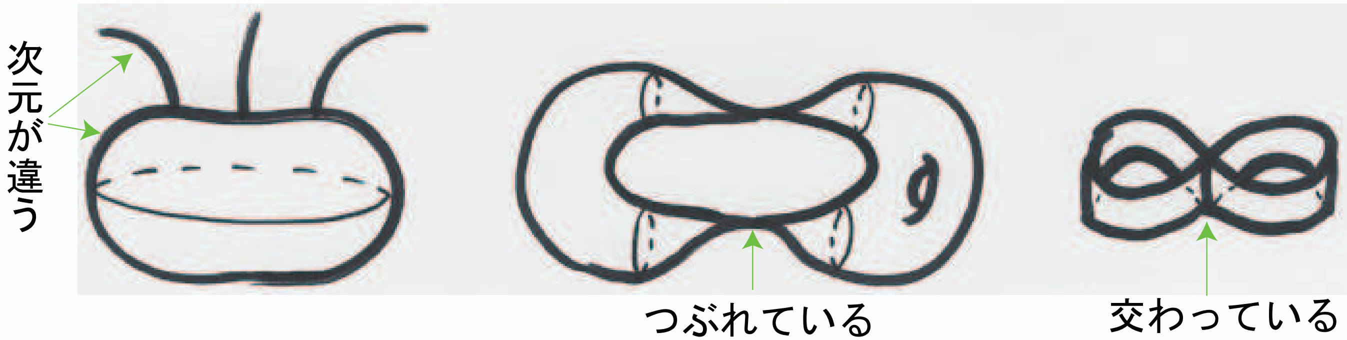
- 多様体でない例：



- 多様体と結び目のつながり
- 多様体の表わし方
  - 絵　・・・ 大体２次元まで
  - 式　・・・ 球面とその積など

多様体と結び目

- 多様体でない例：

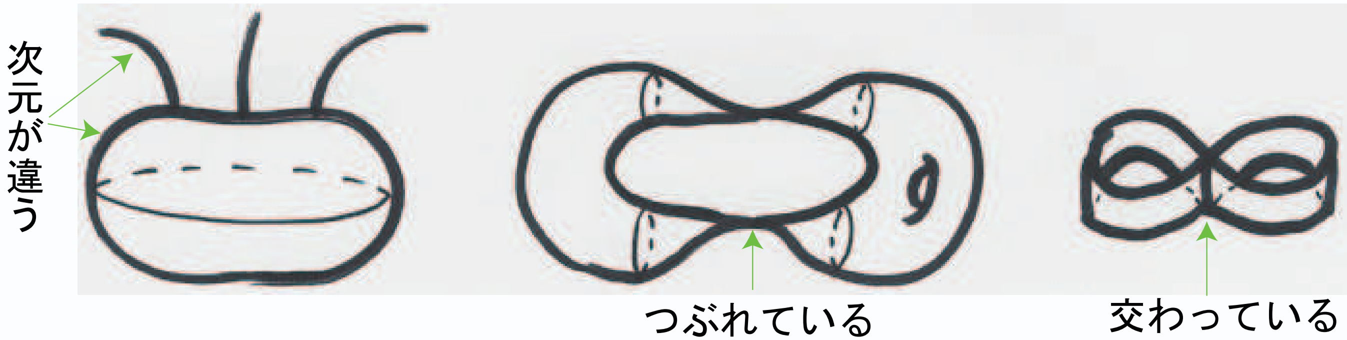


- 多様体と結び目のつながり
- 多様体の表わし方
  - 絵　・・・ 大体２次元まで
  - 式　・・・ 球面とその積など
  - 等質空間など

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

多様体と結び目

- 多様体でない例：

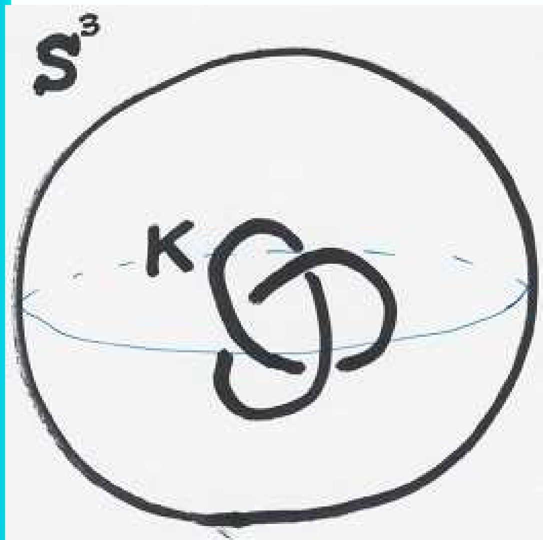


- 多様体と結び目のつながり
- 多様体の表わし方
  - 絵　・・・ 大体２次元まで
  - 式　・・・ 球面とその積など
  - 等質空間など
  - 切った貼った (cut and paste)、手術

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

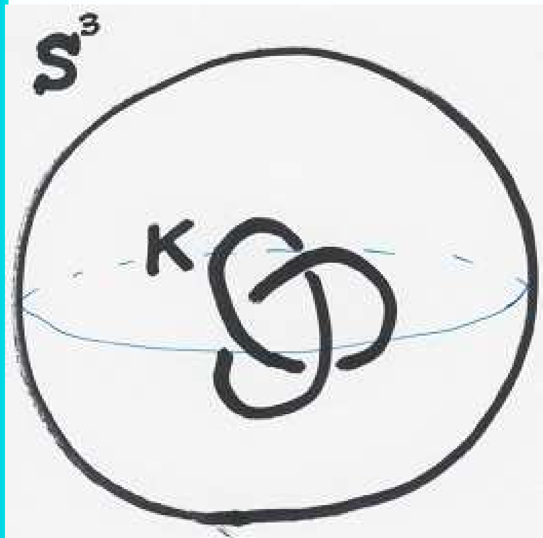
切った貼ったで多様体をつくる

- 3 次元球面 S^3 の結び目 K に沿った手術



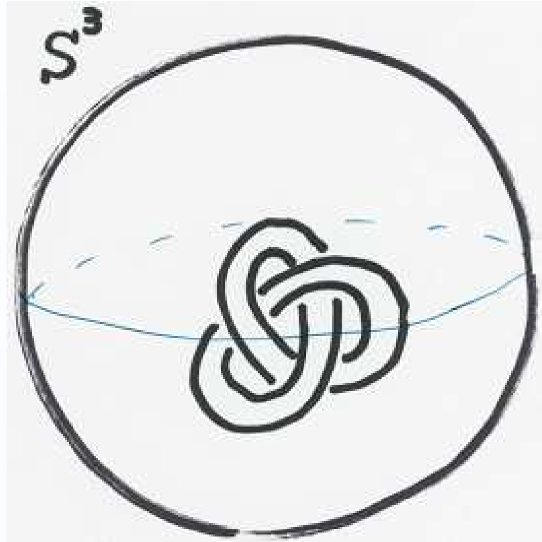
切った貼ったで多様体をつくる

- 3 次元球面 S^3 の結び目 K に沿った手術



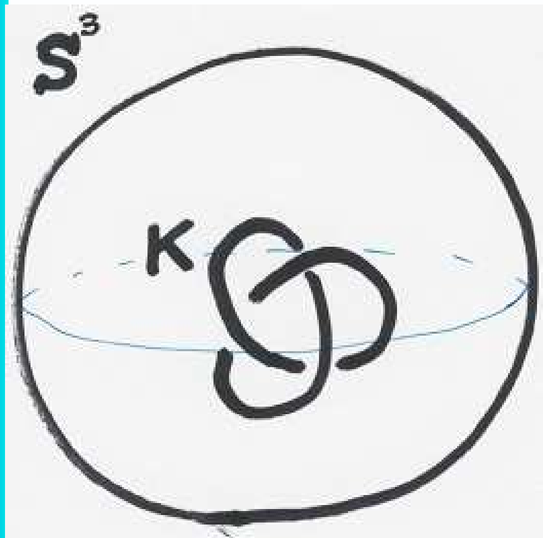
K の管状近傍の内部を取り除く。

この管状近傍は位相的にはソリッドトーラス。



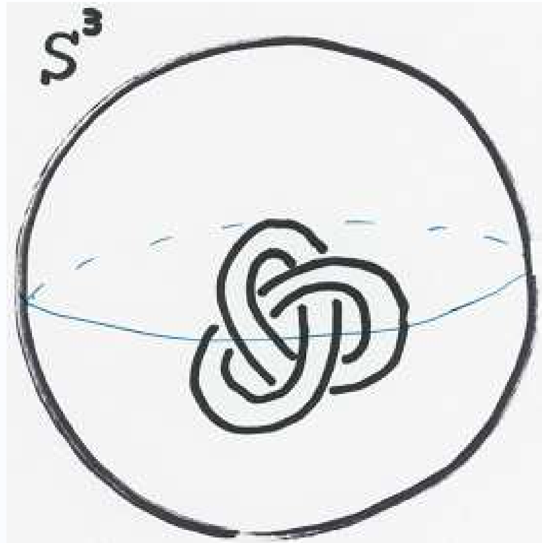
切った貼ったで多様体をつくる

- 3 次元球面 S^3 の結び目 K に沿った手術

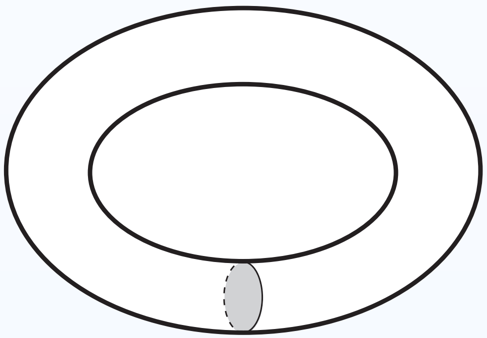


K の管状近傍の内部を取り除く。

この管状近傍は位相的にはソリッドトーラス。



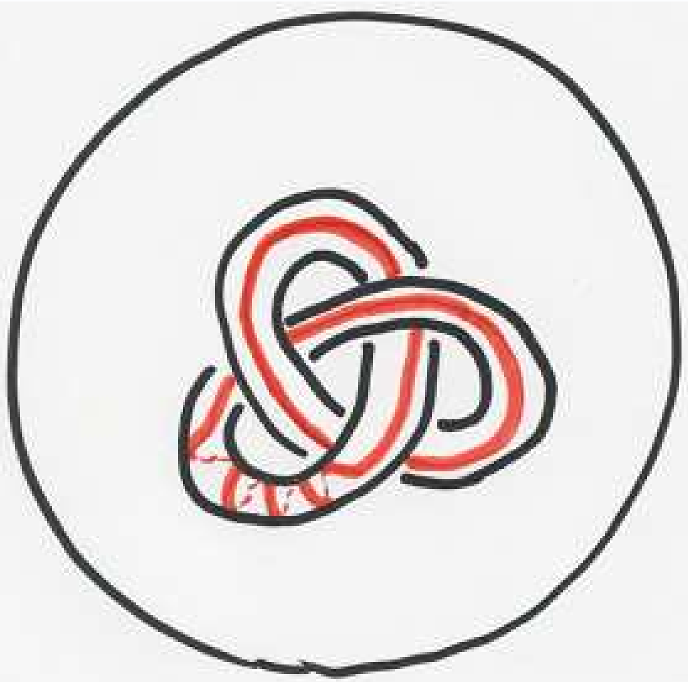
- S^3 から K の管状近傍の内部を取り除いたものと別のドーナッツを、表面のトーラスでくっつける。



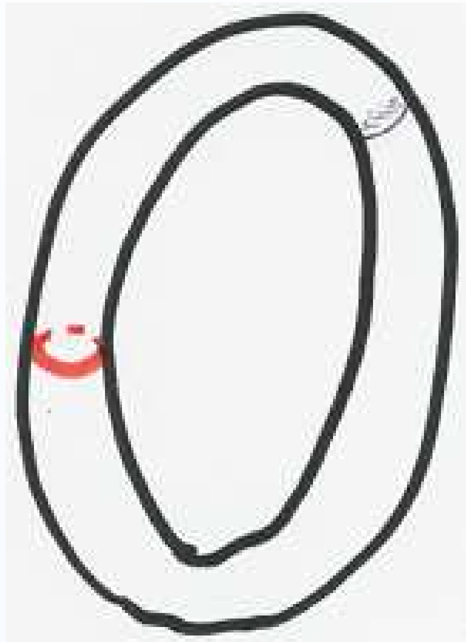
Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_ pix/

結び目に沿った３次元球面の手術

- S^3 から K の管状近傍の内部を取り除いたものと別のドーナッツを、表面のトーラスで、赤い線同士がぴったりかさなるように、貼り合わせる。



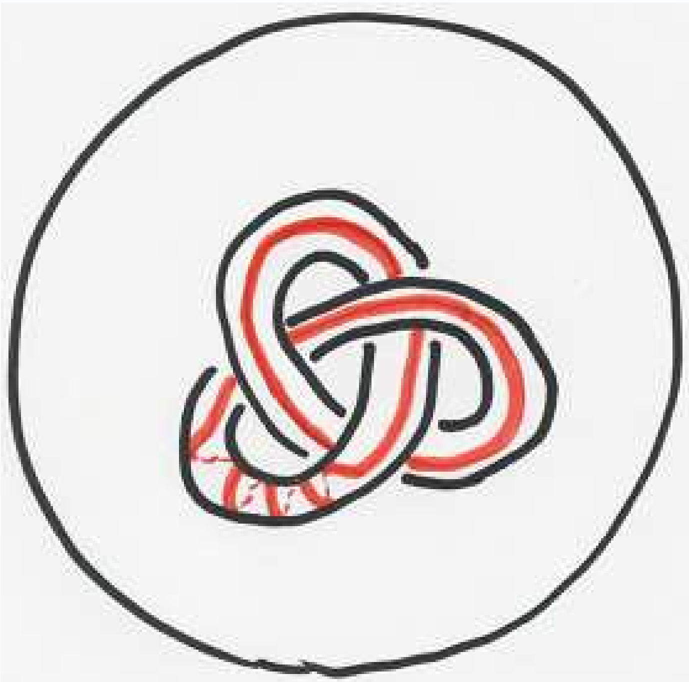
$\cup$



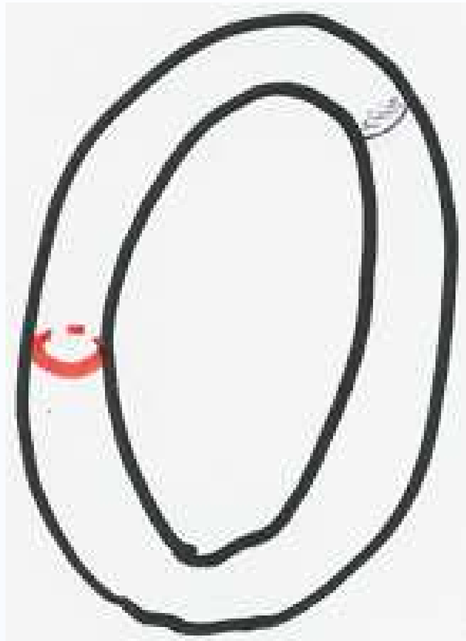
Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

結び目に沿った３次元球面の手術

- S^3 から K の管状近傍の内部を取り除いたものと別のドーナッツを、表面のトーラスで、赤い線同士がぴったりかさなるように、貼り合わせる。



$\cup$

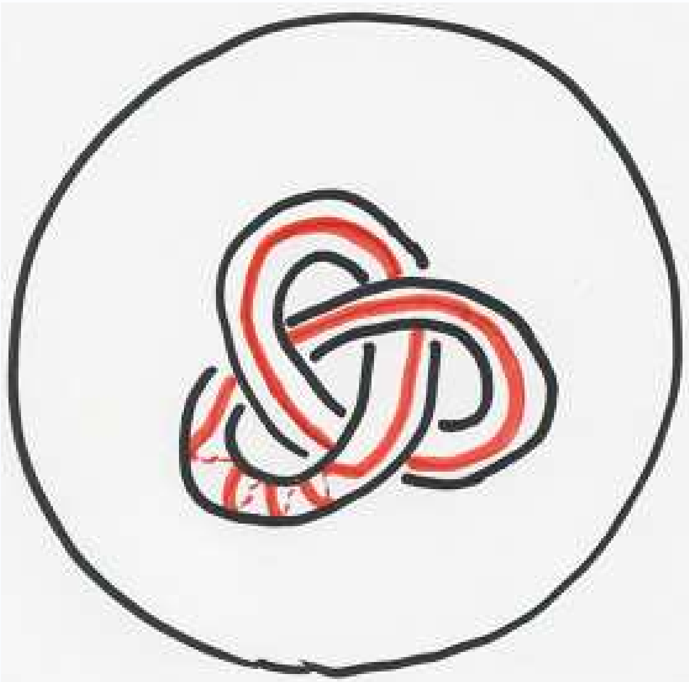
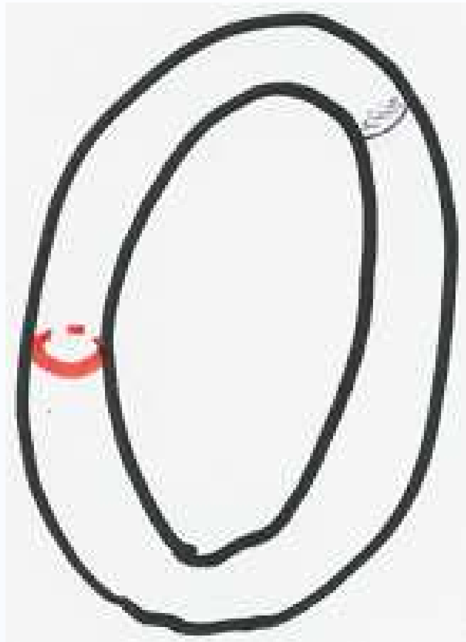


- 別の多様体ができる。

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot_pix/

結び目に沿った３次元球面の手術

- S^3 から K の管状近傍の内部を取り除いたものと別のドーナッツを、表面のトーラスで、赤い線同士がぴったりかさなるように、貼り合わせる。

 $\cup$ 

- 別の多様体ができる。
- ３次元球面から、結び目、絡み目に沿った手術で、（ある条件を満たす）任意の多様体が得られる。

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

他分野との関連

- 作用素環（ジョーンズ）

他分野との関連

- 作用素環（ジョーンズ）
- 統計力学（分配関数、ヤン・バクスター関係式など）

他分野との関連

- 作用素環（ジョーンズ）
- 統計力学（分配関数、ヤン・バクスター関係式など）
- 結び目と素数（森下 昌紀氏（九州大学））

他分野との関連

- 作用素環（ジョーンズ）
- 統計力学（分配関数、ヤン・バクスター関係式など）
- 結び目と素数（森下 昌紀氏（九州大学））
- 幾何学的結び目理論：結び目の形の複雑さをはかり、きれいな形を求める（結び目のエネルギー、共形幾何学、ideal knots、平均交点数、etc）

他分野との関連

- 作用素環（ジョーンズ）
- 統計力学（分配関数、ヤン・バクスター関係式など）
- 結び目と素数（森下 昌紀氏（九州大学））
- 幾何学的結び目理論：結び目の形の複雑さをはかり、きれいな形を求める（結び目のエネルギー、共形幾何学、ideal knots、平均交点数、etc）
- 高分子科学、ＤＮＡ

高分子科学

- ポリマーが結び目になっていると、物質の性質（硬さなど）が変わることがあるらしい。

高分子科学

- ポリマーが結び目になっていると、物質の性質（硬さなど）が変わることがあるらしい。
- 予想 (Frisch-Wasserman-Delbruck) 環状ポリマーが長くなると、（非自明な）結び目になる確率が 1 になる。

高分子科学

- ポリマーが結び目になっていると、物質の性質（硬さなど）が変わることがあるらしい。
- 予想 (Frisch-Wasserman-Delbruck) 環状ポリマーが長くなると、（非自明な）結び目になる確率が **1** になる。
- 数値実験で、ランダムに結び目を発生させ、どの結び目型がどのような確率で現れるか、という研究がある。
  - 立方格子上のランダムウォーク
  - 自己交叉しない折れ線

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

ＤＮＡ

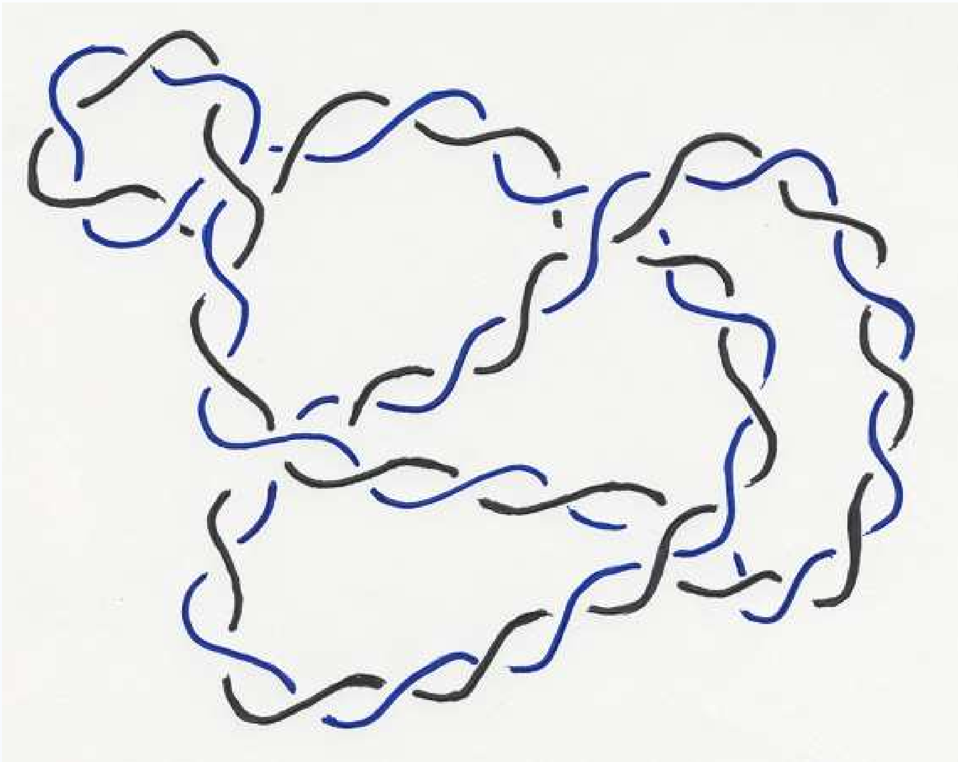
- デオキシリボ核酸

DNA

- デオキシリボ核酸
  - 二重らせん構造

DNA

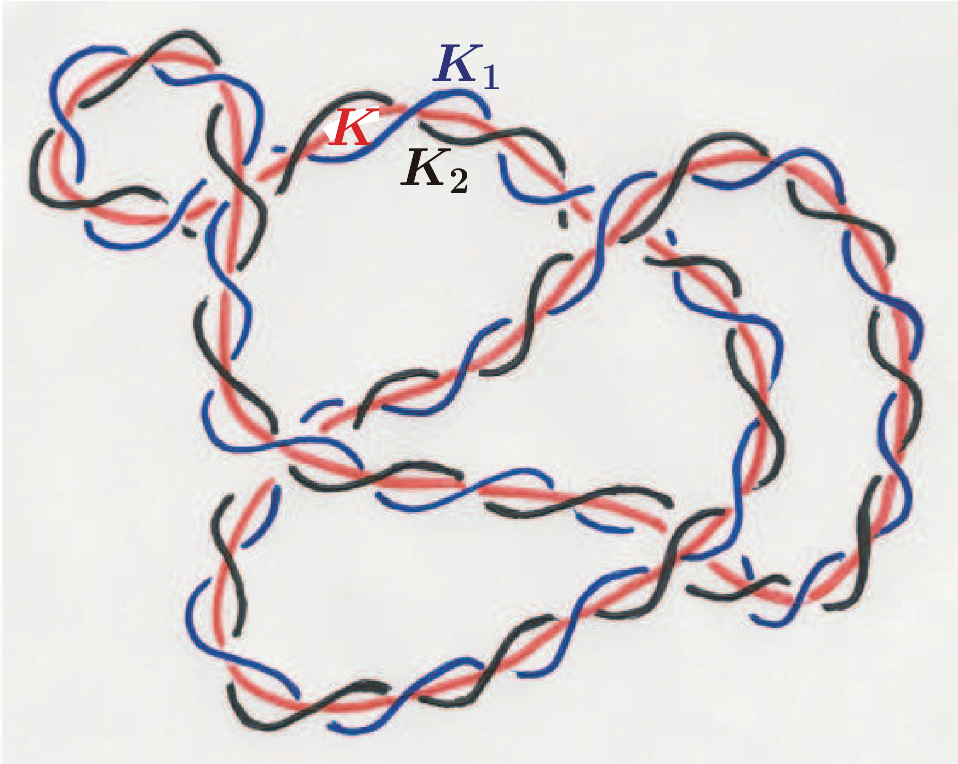
- デオキシリボ核酸
  - 二重らせん構造
  - 環状、つまり結び目になっていることがある。



Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

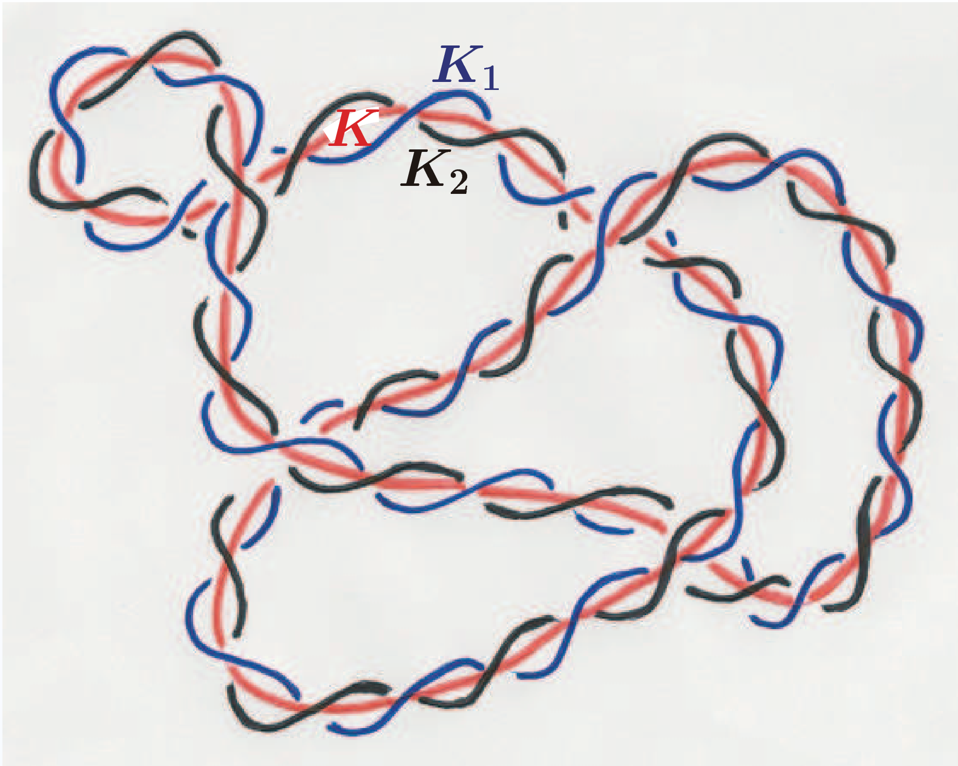
二重らせん

- 2本の結び目を K_1, K_2 コアを K とする：



二重らせん

- 2本の結び目を K_1, K_2 コアを K とする：



- K_1 と K_2 の絡み数を Lk、ねじれ数を Tw、K のライジング数 (writhe) を Wr とすると

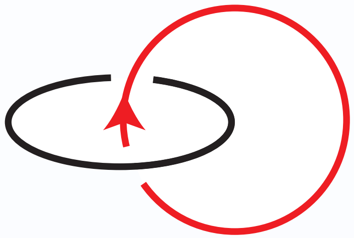
$$\boxed{Lk = Wr + Tw}$$

なる等式が成立。

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

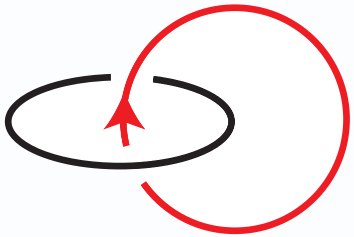
絡み数のガウスの積分公式

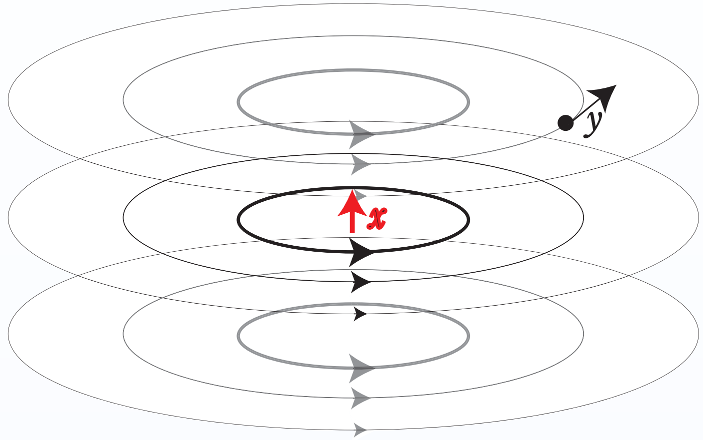
- 赤いループ C_2 に電流が流れているとする。



絡み数のガウスの積分公式

- 赤いループ $\boldsymbol{C_2}$ に電流が流れているとする。



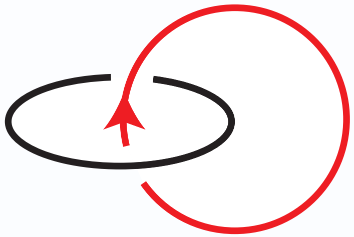


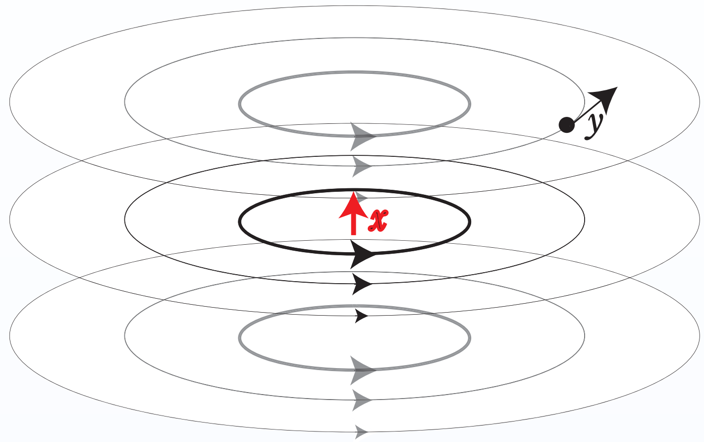
- ビオ・サバールの法則：点 $\boldsymbol{y}$ での磁場 $\boldsymbol{dH} = \dfrac{\boldsymbol{j\,dl \times r}}{\boldsymbol{4\pi|r|^3}}$

$\boldsymbol{j\,dl}$ ：点 $\boldsymbol{x}$ での電流要素、$\boldsymbol{r = y - x}$

絡み数のガウスの積分公式

- 赤いループ C_2 に電流が流れているとする。





- ビオ・サバールの法則：点 y での磁場 $dH = \dfrac{j\,dl \times r}{4\pi|r|^3}$

$j\,dl$ ：点 x での電流要素、$r = y - x$

- 黒いループ C_1 上積分すると、

$$\boxed{\frac{1}{4\pi}\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{(y-x)\cdot(dx\times dy)}{|y-x|^3}}$$

C_1 と C_2 の**絡み数** $Lk(C_1, C_2)$。

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

ガウス積分公式から派生するもの

- $$Lk(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{(y-x)\cdot(dx\times dy)}{|y-x|^3}$$

ガウス積分公式から派生するもの

- $$Lk(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{(y - x) \cdot (dx \times dy)}{|y - x|^3}$$
- 上の式で $C_1 = C_2$ としたものが C_1 のライジング数：

$$Wr(C_1) = \frac{1}{4\pi} \iint_{C_1 \times C_1 \setminus \Delta} \frac{(y - x) \cdot (dx \times dy)}{|y - x|^3}$$

ただし $\Delta = \{(x, x) | x \in C_1\}$

ガウス積分公式から派生するもの

- $$Lk(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{C_1}\int_{C_2} \frac{(y-x)\cdot(dx \times dy)}{|y-x|^3}$$
- 上の式で $C_1 = C_2$ としたものが C_1 のライジング数：
$$Wr(C_1) = \frac{1}{4\pi}\iint_{C_1\times C_1\setminus\Delta} \frac{(y-x)\cdot(dx \times dy)}{|y-x|^3}$$
ただし $\Delta = \{(x,x) | x \in C_1\}$
- 更に上の式で絶対値をつけたものが平均交点数：
$$AC(C_1) = \frac{1}{4\pi}\iint_{C_1\times C_1\setminus\Delta} \frac{|(y-x)\cdot(dx \times dy)|}{|y-x|^3}$$
C_1 の複雑さをはかる量。

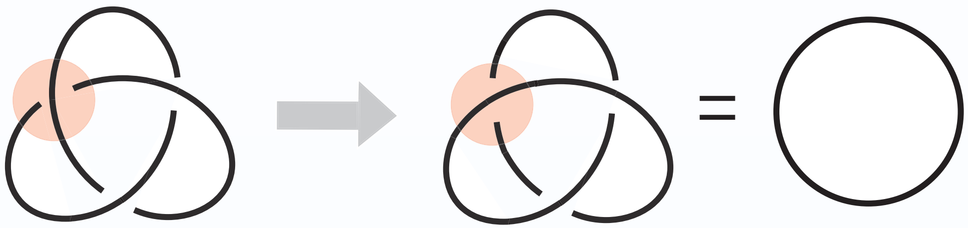
ＤＮＡ結び目

- トポイソメラーゼ：ＤＮＡ切断し再結合する酵素

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot__pix/

ＤＮＡ結び目

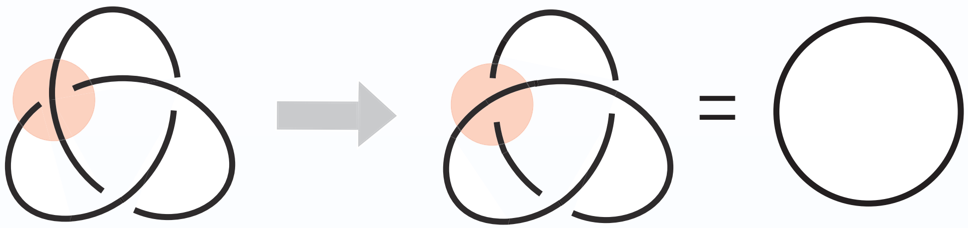
- トポイソメラーゼ：ＤＮＡ切断し再結合する酵素
- 図式の交点の上下が逆になることがある



Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/~kusner/knot_pix/

ＤＮＡ結び目

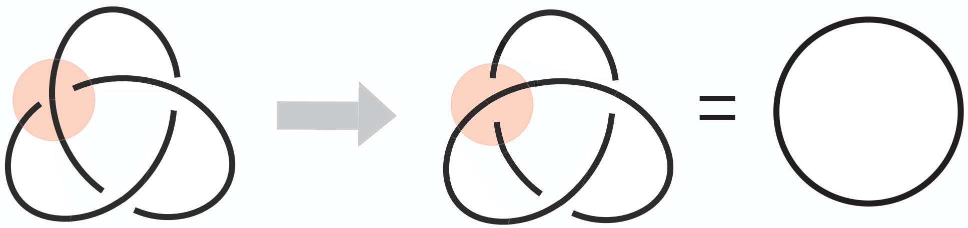
- トポイソメラーゼ：ＤＮＡ切断し再結合する酵素
- 図式の交点の上下が逆になることがある



結び目が変わることがある

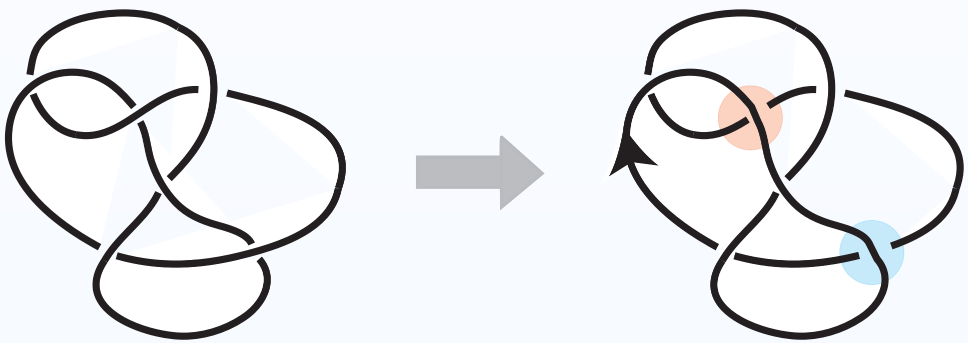
ＤＮＡ結び目

- トポイソメラーゼ：ＤＮＡ切断し再結合する酵素
- 図式の交点の上下が逆になることがある



結び目が変わることがある

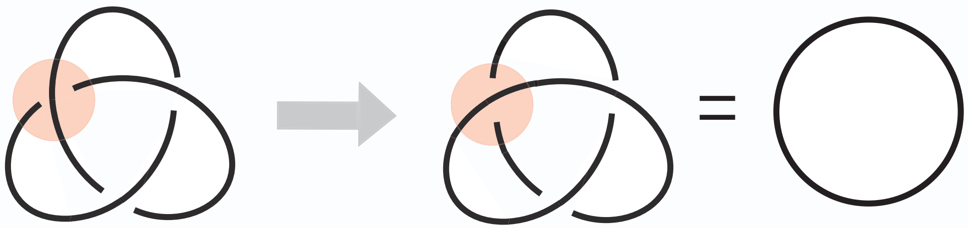
- どんな結び目も、その図式の交点の上下をいくつか変えれば、自明な結び目にすることができる。



Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot__pix/

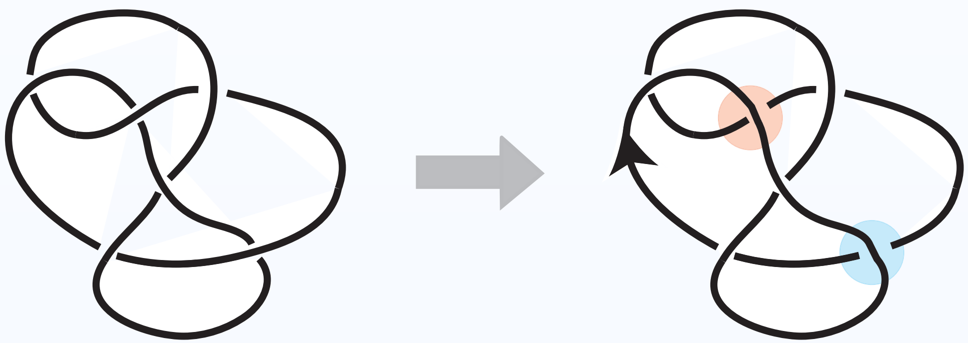
ＤＮＡ結び目

- トポイソメラーゼ：ＤＮＡ切断し再結合する酵素
- 図式の交点の上下が逆になることがある



結び目が変わることがある

- どんな結び目も、その図式の交点の上下をいくつか変えれば、自明な結び目にすることができる。



- そのような数の最小値を、その結び目の**結び目解消数**という。・・・結び目理論

Figures by Kusner and Sullivan. Taken from http://www.gang.umass.edu/˜kusner/knot_pix/

結びの言葉

- 結び目理論はこれからどこへ行くのか？

結びの言葉

- 結び目理論はこれからどこへ行くのか？
- どの分野が結び目理論に新たな驚きを与えるのか？

絡んだ粘土製手錠のはずしかた

- 紐ではなくて粘土、というところがみそです。
外れている状態から考えた方が名案がでますが：