高木貞治先生に見る
数学思想の変遷

足立恒雄 (早稲田大学)

2010年2月20日

人はいつでも数論する。
　　　　ーデデキント

高木の数概念に関する４著作

[I] 『新撰算術』（1898）

[II] 『新式算術講義』（1904）

[III] 『数学雑談』(1935：執筆は1930年前後)

[IV] 『数の概念』（1949）

高木貞治は若いころから数体系の基礎付けに関心が深かった。最初に著した『新撰算術』は高木が大学院在学中に書かれたものである。その後、ドイツへ留学し、帰国後、教授就任の年に『新式算術講義』を著した。『数の概念』は高木が最後に書いた数学書で、そのとき74歳であった。最初の著書から数えて51年、高木の数体系の基礎付けに対する関心は生涯にわたるものであったことがわかる。

ギリシア数学における数と量

古代ギリシア以降、西洋数学では、数と量という二つの概念が峻別されてきた。

1. 数とは、基数（事物の個数を表す数）のことである。
2. 量とは、長さ、広さ（、重さ、速さ）など、互いに大小が比較可能なもののことである。
3. 同一種の量だけが比較し得る。

この数と量を厳密に区別する思想は2000年以上にわたって西洋数学を支配してきた。高度な認識ではあるが、数学の発展にとっては大きな足かせともなった。

数の背景をなす概念

個数：１個、２頭、３人、$\cdots \Rightarrow$ 基数

順序：１番、２等、三日目、$\cdots \Rightarrow$ 序数

大きさ：長さ、広さ、重さ、$\cdots \Rightarrow$ 量

位置関係：昨日・今日・明日、上・中・下、１級・初段・２段、$\cdots \Rightarrow$ 数直線

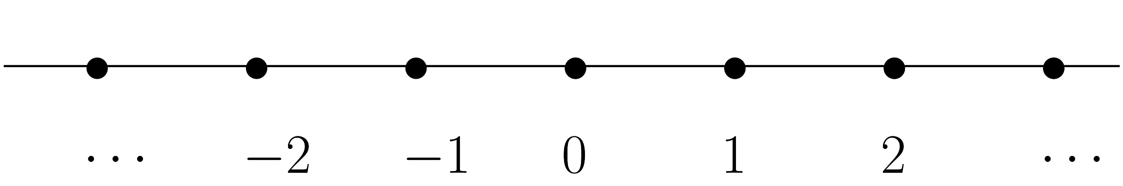
ギリシア以来、西洋では（逆方向を含む）位置関係が数（あるいは量）と深い関係があることが認識されなかった。その結果負数が数と認知されるのには長大な時間を要した。

東洋、特にインドにおける負数の概念

- 東洋の数学は数と量、有理性と無理性などに厳密な区別を設けないところに特徴がある。

- 東洋では数学書が登場する最初期から負数が扱われている。

- クリシュナ（1600年頃：『ビージャガニタ』（AD12C）への注釈）：
  1. 数直線をつかって四則演算を説明している。
  2. 数には空間的、時間的、物質的の三種がある。



数と量ー現代の立場から見ると

- 集合を1対1対応という対等性によって類別した類が「数」(基数)という概念である。この類は集合ではない。
- 量とは正実数を使って大きさが測れるものだが、正実数とは何かに対して、量の比であると答えると循環的定義に陥る。現在では、実数体は量（の象徴する外的世界）とは独立して定義されている。

量の追放＝純粋数学の成立

- 数体系の歴史を見ると数学が如何に自然科学と未分化であったかがよくわかるだろう。
- 数体系を量、即ち外的存在、と無関係に確立する作業は19世紀後半以降20世紀の初めにかけて完成した。現在の学校数学では量については教えない。
- 量という外的世界の概念が追放されたことと純粋数学という概念が成立したこととはほぼ同義と言えるだろう。

高木貞治と量

- 高木の著作[I],[II],[III]の特徴は量の理論に関する考察がきわめて詳細であることである。

- 量という概念の考察は数学の世界からほぼ消え去った時代にありながら、高木は

  1. 数は量を表すべく発展してきたという歴史的経緯。
  2. 常識と学問とを連結する。

  といった名目の下に量の理論と実数論との橋渡しを、煩を厭わず詳論する。

- 今となっては歴史的興味しかないが、そのおかげで、(それまで日本では深くは知られなかった)「数と量」という概念とその歴史がよく理解できる。

量の定義ー高木の著作による

定義

1. 同種の量は大小の比較ができる。

2. X は加法 $+$ を持ち、足し算ができる。

3. 同種の量の足し算は順序を変えない。
   $(A < B \Rightarrow A + C < B + C)$

4. どの量も正である。$(A < A + B)$

5. 同種の量は大きいものから小さいものを引ける。

6. 同種の量の大きさには切れ目がない（連続性）。

量とは「一直線上の正方向の有向線分の集まりのことである」と思っていれば良い。

数概念の確立に至る道に横たわる困難

量と数の統合：量と数をどうやって同じカテゴリーの中に取りこむか。

負数の取り込み：0、さらには負数をどう考えるのか。量（大きさ）と基数（個数）を基本に据える限り、負の概念は登場の余地がない。

- 西洋の本では例外なく「負数は減法の演算が例外なくできるように作られた」と述べている。
- たとえば、

  $$a - b = a + (-b)$$

  という公式は東洋では紀元前から知られているが、西洋数学では20世紀になって登場したのではなかろうか。（$-a$という考え方がなかったらである。）

数と量の統合に向けて

1. ディオファントス（『算術』：AD３世紀頃）は分数（有理数）を数と認めた。

2. シモン・ステヴィン（1548-1620）による小数概念の導入は数を線型的に捉え、平等に見る方向性に大きく寄与した。しかし幾何学的な量については別の考察をしている。

3. デカルト（『幾何学』：1637）は幾何学的な量の概念の1次元化を行った。これが座標軸の考え方を支えている。しかし、負の量は考えないので、デカルトの扱う座標系は第1象限だけである。

4. オイラー（『代数学入門』：1770）は「数とは、一つの選ばれた単位の量に対する比以外の何物でもない」と述べた。しかし、量を中心に考えると、負数には負債といった別の動機付けをする必要があった。

19世紀後半以降の動き

1872	カントル	基本列による実数の定義
1872	デデキント	『連続性と無理数』
1884	フレーゲ	『算術の基礎』
1887	クロネッカー	『数概念について』
1888	デデキント	『数とは何か』
1889	ペアノ	『算術の諸原理』
(1898	高木	『新撰算術』)
1899	ヒルベルト	『幾何学の基礎』
1900	ヒルベルト	『数概念について』
(1904	高木	『新式算術講義』)
1908	ツェルメロ	『集合論の公理化』
1910	シュタイニツ	『体の代数的理論』
1923	ノイマン	『順序数の定義』
1930	ランダウ	『解析学の基礎』
1930	ヴェルデン	『現代代数学』
(1935	高木	『数学雑談』（'28〜'31 執筆）)
(1949	高木	『数の概念』)

略年表コメント

1. デデキントは『数とは何か』において、Xを無限集合とし、$S : X \to X$を全射ではない単射とするとき$a \notin S(X)$なる$a \in X$を一つ取って、

$$a \in Y, \quad \forall x(x \in Y \Rightarrow S(x) \in Y)$$

なる性質を持ったすべての$Y(\subset X)$の共通部分集合として自然数の体系の存在を示した。—「数は人間精神の自由な創造物である」

2. ペアノの公理系として知られているもののプライオリティはデデキントに帰されるべきである。ペアノの公理系は、現今の言葉で言えば、純粋算術の公理系（Peano Arithmetic）に近い。

『新撰算術』における自然数の定義

> 　ここにあまたの物のあるとき、その個々の物よりその一つの物なりということの外、すべての特性を抽出し去るときは即ち数の観念を生ず。（中略）一つの物に対する数を一と称し、これを表すに１の記号を以てす。あまたの１集まりて数を成す。

これは最も古典的伝統的な自然数の定義である。「抽出し去る」(＝抽象化) ということを数学的に厳密化すれば、先に述べたように「対等な集合の類」として基数を定義するという思想に至る。これは類別という概念の強力さを示す。

『新撰算術』より

　そもそも数の観念の久しく明確なるを得ざりしは、数と量とを混同せるに職由せずんばあらず。数と量とは観念そのものの間に必須的の関係あるにあらず、ただ量の大小を比較するに当たり、便利のため数の助けを借るに過ぎず。

『新撰算術』より（続）

　分数をもって１の等分を集めたるものとなすが如き、数と量とを混同せる迷想に他ならず。元来１という観念は、既に分割すべからずという意義を含有せり。その等分を云々するが如きは、これ譫語（せんご）なり。かくの如きは量を測定する方便として吾人が随意に定めたる、単位と称する、特別なる1個の量と、１なる数とを混同せるものなり。（中略）畢竟、分数なるものは2個の整数の群にして、かくの如き群そのものは本来何らの意義をも有するものにあらず。

『新撰算術』における量と実数の関係

1. （正の）有理数を導入する。

2. 続いてデデキントの切断を用いて有理数から正実数を構成する。

3. その後、同種の量の定義をし、実数との連絡を図る。

4. 実例として、「直線の長さ」、「平面多角形の面積」、「曲線の長さ」等が連続量であることを証明する。

負数の導入

$\alpha-\alpha$についても同様だが、負数の導入は「算法の汎通」という思想に従うとする：

> $\alpha<\beta$なるときは$\alpha-\beta$の如き記号は意義を有せざるものなり。然れども吾輩は減法を汎通ならしめんが為に、かくの如き記号にある意義を付し、その四則の算法の約束を定め、しかもこの約束は意義ある減法の場合と同一の法則に従ふものとなさんと欲す。

「算法の汎通」というハンケルの用語は「形式不易の原理」と呼ばれて次著『新式算術講義』で詳述されるが、歴史的には公理主義, あるいは抽象数学（外的世界との独立性という意味で）への途中の段階的概念であると位置づけられる。

『新式算術講義』

『新式算術講義』では、個数を数えるにしても順序を付けざるを得ないから序数が数の基本であるという見解に基づいて自然数の基礎付けが行われる。

> 吾人が数ふべき物の数には限りなし。限りなき物を代表せん為には又限りなき物を要す。この限りなき物を代表せんが為に、人の作り出せるを数（順序数）となす。数は人の理性を離れて先天的の実在を有するものに非ず。

『新式算術講義』における自然数の定義

自然数の定義、すなわち、

1. 自然数は線型順序をなす。
2. 各自然数aには直後の数a'がある。
3. 最初の自然数がある。
4. bがaより後ならば、aから直後の数、その直後の数、と続けていけば、しまいにはbに達する。

を与える。これはペアノの純粋算術に近い定式化である。

『新式算術講義』における整数

「広義の数」、すなわち整数の「原則」（その脚注で「現代の数学では、公理と称すべし」と述べている）は簡単に言えば、双方向に直線的に無限に連なる列であるということを文章化したものである。引き算が何時でも出来るように、いわば、やむをえず導入するという姿勢から、一方向だけではなく両方向に数が並んでいる方が応用面ばかりではなく、本質的だという認識に変わったことが指摘できる。自然数の直後に整数を定義するのはきわめて斬新だっただろう。

> 以上は数及び大小という語の定義なり。なぜに数はかくあらざるべからざるかといふは意義なき疑問なり。しばらく吾人は数の観念を失へりとすべし。これ時に当たりて卒然吾人の面前に投ぜられたるは上文の定義にして、数とはかかるものぞと告げられたる吾人はこの三カ条の規定を前提となして、ここに定められたる「数」なるものの性質を研究せんとす。これ吾人の立脚点なり。

『新式算術講義』に見られる公理主義

この後整数の四則演算の説明が続くが、公理主義的な扱いが目立ってくる。ここでも抽象的に負数の演算を定義したのに対して

> 一見はなはだ唐突、不自然、形式的なる観あるに似たりといへども、つらつら考ふれば、かく抽象的に根本的の観念を定むるは、かへってその観念の応用の区域を拡大する所以なるを知るべし。

と説明している。ヒルベルトの『幾何学の基礎』が出版されて間もないことも考えれば、公理主義に基づく最も初期の著作だっただろう。

ただ、定義の妥当性を読者に納得させるために「形式不易の原理」を詳細に論じてもいる。数は矛盾なきようにわれわれが「定義する対象」であるという「形式不易の原理」の観点は公理主義への橋渡しの役割を果たしたということが見て取れるであろう。

『新式算術講義』における量

最初に量の公理的扱いを説明して、次に量の比として正の有理数を説明する。さらに有理数だけでは量の数値を尽くすことが出来ないとして正実数登場の必然性を説き、改めて切断による（正の）実数の定義が導入される。

『数学雑談』の自然数論

『数学雑談』ではランダウの『解析学の基礎』に基きペアノの公理系に従って自然数論を展開している。

定義 自然数と称する「もの」全部の集合が既に与えられてあるものとする。

公理1 1は自然数である。

公理2 各自然数xには「その次の自然数」x'が一つしかも唯一つある。

公理3 xを自然数とすれば$x' \neq 1$

公理4 $x' = y'$ならば、$x = y$

公理5 （帰納公理） Mが自然数の集合で、

(I) Mは1を含む。

(II) Mがxを含むならば、またx'をも含む。

とする。しからばMはすべての自然数を含む。

- 集合論の使用が始まっているのが特徴である。

『数学雑談』における量の理論 I

『数学雑談』でも、無理数論の起源であるとして、量の理論の公理付けから入っている。

量の公理系はこれまで通り

(I) （順序性）量の比較に関する公理

(II) （加法性） 量の和に関する公理

(III)（連続性） 連続の公理

から成る。『数学雑談』の量の理論における最大の特徴はその「附記」に現れている。高木は (I),(III) は必然的だが、(II) は「規約的（conventional）である」として大いに不満を述べる。

高木のこだわり

　加合の公理はあまりに幾何学的である。その思想上の基礎は「合同」の観念である。故に空間（長さ）を連続的量の標本とするときには先天的à prioriの威力を持つように感ぜられる。質量にしても同様である。今翻って時間を対象にして見れば、そこには「合同」の威力が著しく希薄なることを感ずるであろう。（中略）時計などを引き合いに出しても駄目である。時計は「コンヴェンション」で、時間を空間に従属せしめる機械に過ぎない。

『数学雑談』における量の理論II

集合論の勉強の結果、

カントルの定理 無限界で稠密な可算順序集合は有理数体と順序同型である。

が (II) の加法公理に代用出来ることを知る：

C公理 稠密に分布する可算個の量が取れる。

我々の立場においては、しかしながら (C) は用に耐えない。(II) はconventionalでも不自然ではないが、(C) はあまりに技術的（artificial）である。しかし連続集合の標本として時刻の集合を取るならば、(C) も捨て難いところがある。

C公理は現在「可分性」と呼ばれる条件である。

またしても未定稿に終る

もしも(II)は何やらconventinalで、(C)はどこやらartificialである所に不満を感じて、それらを鵜呑みにすることが出来かねるとしたならば、善後策は如何。無理にも問題を終結させるために、斉質（各区間が順序同型ー足立注）なる連続集合の「最小型」などをテイマとして持ち出して見る誘惑もあるが、やや「暴力的」に感ぜられる。（中略）

そこで本稿が又しても未定稿で終るのである。（中略）

第四回の無理数論を書くべき機会が筆者に与えられるや否や、段々覚束なくなるから、「何がこれを未定稿にしたか」を告白して、筆を置くのである。（昭和五年二月）

『数の概念』

- 前３著作から一転して『数の概念』では、量の概念にはまったく触れず、「哲学的傾向を有する人々の関心をひくべき問題」として、純然と数の体系の基礎を論じる。量を数概念に生かすのであろうと、数を量に応用するのであろうと、そうしたことにはまったく触れないのも数学観の変化に根差すのであろう。

- 「前書き」において集合、写像に関する基礎概念が説明される。記述は完全に公理的である。そのおかげで記述が明快簡潔になり、読み易さは前３著作とは比較にならない。この50年がどんなに著しい変化を数学にもたらしたかがよくわかる。

『数の概念』における整数

第１章では自然数から入るのではなく最初から整数の体系が公理的に与えられる。「序」に、次のようなとても意味深い言葉がある。

> 我々の整数は、物の数でもなく、物の順序を示すものでもない。しかし、物の数を示すためにも、物の順序を示すためにも、なお一般に、物の標識（符牒）としても用いられる。0は加法の基準として、我々が任意に整数の体系の中から取り出した一つの整数である。それは、無を示すものではない。

『数の概念』における整数体系の公理系

次の整数の公理系は高木のオリジナルであると思われる。

定義 次の性質を持つ写像 $\varphi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ を備えた集合 $\mathbb{X}$ を「全整数の集合」という：

公理１ φ は $\mathbb{X}$ 上の全単射である。

公理２ $M \subset \mathbb{X},$ かつ $\varphi(M) = M \Rightarrow M = \mathbb{X}$

公理３ $\mathbb{X}$ は（デデキント$)$無限集合である。

- $\mathbb{X}$ の任意の点を取って 0 とし、$\varphi(0)$ を 1 とする。その後の進め方はルーチンである。

- 「すべての無限集合は可算無限集合を含む」を導くのに選択公理が必要なことを（『数学雑談』と違って）きちんと認識している。

- 「整数（の全体）を 1 対 1 の自己対応を許す不可分なる一体系として規定する」方法はきわめて斬新であり、それは「必ずしも不自然ではなく、数学的には、むしろ簡明である」という見方には大いに同感できる。

カントルによる実数体の特徴付け

高木は『数学雑談』に続いて順序性、加法性、連続性の３公理による実数体の特徴付けを取り上げ、再度時間の例を挙げて加法性に不満の意を表明する。その上でカントルによる連続体（実直線）の特徴付けを紹介する：

空ではない線型順序集合 $\mathbb{L}$ は次の性質を持つとき**連続体**と呼ばれる：

Ｉ（無限界性）$\mathbb{L}$ は上にも下にも有界ではない。

II（連続性）$\mathbb{L}$ は連続である。

III（可分性）$\mathbb{L}$ は稠密な可算部分集合を持つ。

連続体に実数体の構造を入れることは（カントルの定理によって）容易である。

高木による連続体の特徴付け（最終形）

高木は「技巧的なる可附番を払拭」するとして次を提唱する：

IIa.（最小性） 連続かつ無限界なる線型順序集合はすべて$\mathbb{X}$と同型なる部分集合を持つ。

これが高木による連続体、実直線、実数体の特徴付け（＝公理系）の最終形であった。

IIaとIIとの同値性の証明には選択公理が必要となるので問題だが、これに代えて次を採用すると選択公理は必要でなくなる（上江洲忠弘氏による）：

IIb（最小性） $\mathbb{X}$の部分集合が無限界で連続ならば$\mathbb{X}$と同型である。

最後に

『数の概念』における数体系の基礎付けは、西洋の数学に50年遅れた状態から出発した高木の（ということは、つまり日本の）数学がその後50年かけてどのように発展したか、その到達点を示すものとして意義が深く、またその思想性、独創性という観点からも高く評価できる。

参考文献

[1] Cantor, G., Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen 5 (1872)

[2] Dedekind, R., Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872)：河野伊三郎訳『数について』、岩波書店（1961）

[3] Frege, G. , Grundlagen der Arithmetik (1884)：和訳『フレーゲ著作集』第2巻「算術の基礎」勁草書房(2001）

[4] Cantor, G., Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Annalen 46(1895)

[5] 高木貞治『新撰算術』、東京博文館　(1898)

[6] Hilbert, D., Grundlagen der Geometry, （1899）：寺坂英孝訳『幾何学基礎論』、共立出版（1970)：中村幸四郎訳『幾何学基礎論』、ちくま学芸文庫(2005)

[7] 高木貞治『新式算術講義』（1904 :ちくま学芸文庫 2008）

[8] Neumann, On the Introduction of Transfinite Numbers (1923)

[9] 藤原松三郎『代数学I』、内田老鶴圃（1928）

[10] Landau, E. Grundlagen der Analysis, (1929)：英訳 Foundations of Analysis, Chelsea (1951)

[11] 高木貞治『数学雑談』、共立出版(1935)

[12] 高木貞治『数の概念』、岩波書店（1949：改訂版 1970）

[13] 『追想　高木貞治先生』（1987）