場の量子論の
場の量子論による
場の量子論のための数学

立川裕二

秋の数学会・岡山大

2018 年 9 月 25 日

場の量子論の数学

場の量子論による数学

場の量子論のための数学

場の量子論の数学

= 場の量子論を数学として扱うこと

場の量子論による数学

場の量子論のための数学

場の量子論の数学
= 場の量子論を数学として扱うこと

場の量子論による数学
= 場の量子論に示唆されて数学が出てくること

場の量子論のための数学

場の量子論の数学
= 場の量子論を数学として扱うこと

場の量子論による数学
= 場の量子論に示唆されて数学が出てくること

場の量子論のための数学
= 場の量子論の研究に数学を使うこと

その前に...

物理としての場の量子論とは?

場の量子論とは?

- 場の量子的振舞いを記述する。
- ただし、場とは時間と空間に広がっているものなら何でも,
  例えば、電磁場、電子の場、格子の揺らぎの場, ...

初学者を混乱させる用語の問題 1.

場の量子論 = 場の理論。

初学者を混乱させる用語の問題 2.

また、

- 群= 何か公理系を満たす数学的物体
- 群論= 群の研究の全体

に従うと、

- 場の量子論= 何か公理系を満たす数学的物体
- 場の量子論論= 場の量子論の研究の全体

となるはずのところ、どちらも単に場の量子論と呼ばれる。

それはさておき。

場の量子論の最初の成功例は量子電磁力学で、

- 量子化された電磁場 = 光が電子などの粒子とどう相互作用するかを記述し、
- 1950 年ごろに枠組みが完成。
- それからも地道な発展がある。

量子電磁力学では、理論計算と実験結果は非常に良く合う。

電子の異常磁気モーメントという量では:

$$
\begin{aligned}
a_e^{\text{実験}} &= 0.01\,159\,652\,181... \\
a_e^{\text{理論}} &= 0.01\,159\,652\,181...
\end{aligned}
$$

量子電磁力学では、種々の量は
微細構造定数 $\alpha \sim 1/137$ の形式的冪級数として摂動計算される:

$$a_e = c_1 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + c_2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + c_3 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \cdots$$

各係数 $c_1, c_2, \ldots$はファインマン図というものを使って
多変数有理関数の積分として計算される。

c_i	値	ファインマン図	文献
c_1	$+0.5$	1 個	[Schwinger, 1948]
c_2	-0.3	7 個	[Sommerfield/Petermann, 1957-1958]
c_3	$+1.1$	72 個	[Laporta-Remiddi, hep-ph/9602417]
c_4	-1.9	891 個	[木下・仁尾, hep-ph/0507249]
c_5	$+9.2$	12672 個	[青山・早川・木下・仁尾, 1205.5368]

コメント 1.

冪級数

$$\boldsymbol{a_e = c_1\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + c_2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + c_3\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \cdots}$$

は漸近級数で、収束しないが、5 次の項まで足したところでは実験と非常に良くあっている。

コメント 2.

$c_{1,2,3}$ は解析的に知られている:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2}, \\
c_2 &= \frac{197}{144} + \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2 \log 2 + \frac{3}{4}\zeta(3), \\
c_3 &= \frac{83}{72}\pi^2\zeta(3) - \frac{215}{24}\zeta(5) \\
&\quad + \frac{100}{3}\left[\mathrm{Li}_4(\frac{1}{2}) + \frac{1}{24}(\log 2)^4 - \frac{1}{24}\pi^2(\log 2)^2\right] \\
&\quad - \frac{239}{2160}\pi^4 + \frac{139}{18}\zeta(3) - \frac{298}{9}\pi^2(\log 2) + \frac{17101}{810}\pi^2 + \frac{28259}{5184}.
\end{aligned}
$$

コメント 3. 五次項の計算に現れるファインマン図の一部:

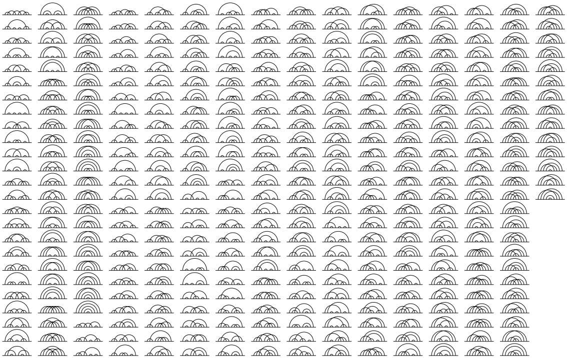


Figure: 389 self-energy diagrams representing 6354 vertex diagrams of Set V.

T. Kinoshita () 34 / 57

[http://www.riken.jp/lab-www/theory/colloquium/kinoshita.pdf]
(この木下先生のコロキウムは非常にお薦めです。)

クォーク三つを陽子や中性子に組み上げるのが量子色力学。

こちらは量子電磁力学とちがって、冪級数として摂動計算できない。

仕方がないので、理論をまるごと
スーパーコンピュータの上に載せてシミュレーションする。

時空を格子で近似するので、格子量子色力学という。

十年前ぐらいから、手法と計算機の改良により、
実験と良く合うようになってきた。

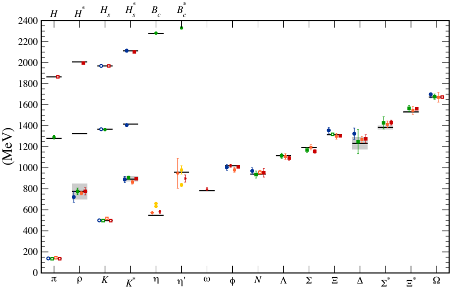


Figure 2: Hadron spectrum from lattice QCD. Comprehensive results for mesons and baryons are from MILC (27, 28), PACS-CS (29), BMW (30), and QCDSF (31). Results for η and η' are from RBC & UKQCD (32), Hadron Spectrum (33) (also the only ω mass), and UKQCD (34). Results for heavy-light hadrons from Fermilab-MILC (35), HPQCD (36), and Mohler & Woloshyn (37). Circles, squares, and diamonds stand for staggered, Wilson, and chiral sea quarks, respectively. Asterisks represent anisotropic lattices. Open symbols denote the masses used to fix parameters. Filled symbols (and asterisks) denote results. Red, orange, yellow, green, and blue stand for increasing numbers of ensembles (i.e., lattice spacing and sea quark mass). Horizontal bars (gray boxes) denote experimentally measured masses (widths). b-flavored meson masses are offset by -4000 MeV.

[Kronfeld 1203.1204]より。

これまで素粒子論の話ばかりだったが、
場の量子論は物性理論においても良く使われる。

相転移の臨界点を記述するのには共形場理論が有効で、
長い長い歴史がある。

最近流行りのトポロジカル物性においても場の量子論が多用される。

それ以外にもたくさん。

このように、場の量子論は

- よく研究されており、
- 実際の数値も精度良く計算でき、
- 実験とも良くあう。

しかし、数学的には不完全。どういうことかというと...

量子力学や、一般相対論だと、
数学者に一言で何をやっているかが説明出来る:

量子力学とは

ヒルベルト空間上のユニタリ演算子の研究。

一般相対論とは

ローレンツ型の計量をもった多様体上の
アインシュタイン方程式の研究。

場の量子論の場合は?

場の量子論とは

???

長らく場の量子論をやっていますから、
何なのか知っているような気はするが、
一言で言い表せない。

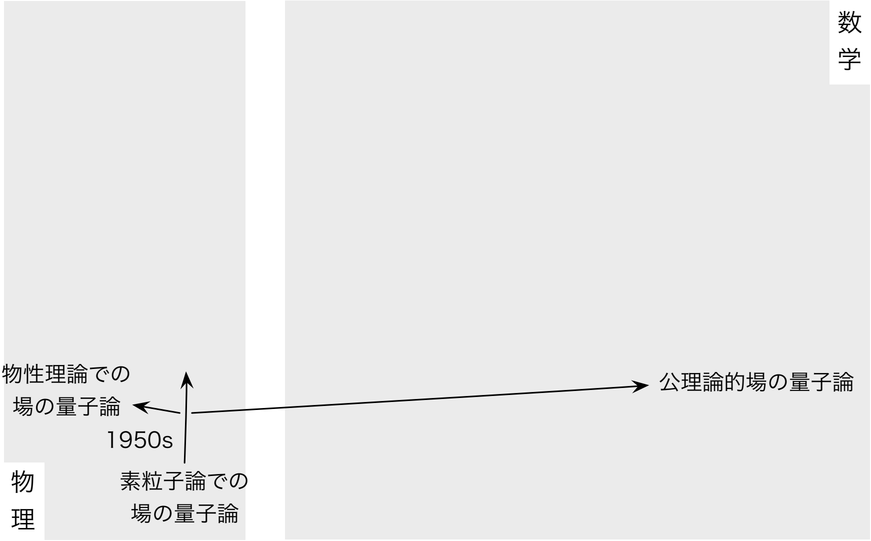
別に数学的に何をやっているかが一言で言い表せなくても、
構わないといえば構わない。

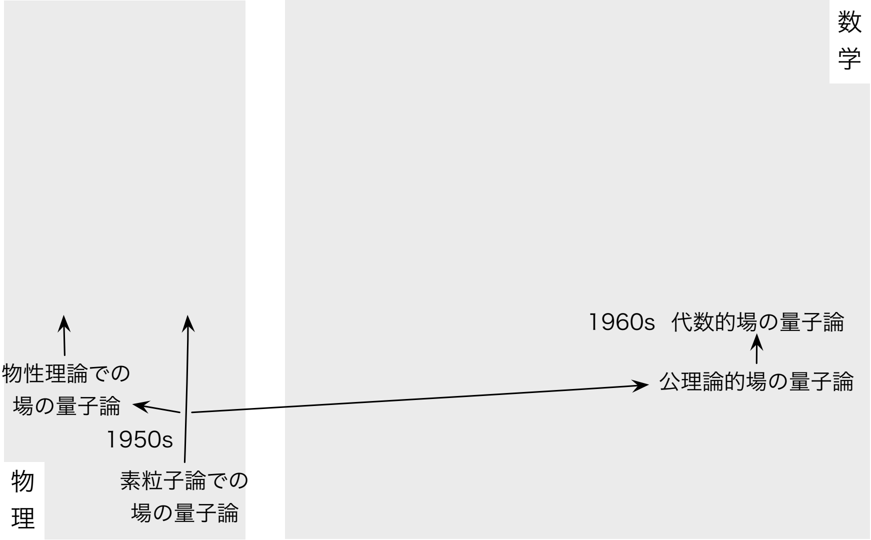
古代エジプト人は、数学的に定式化はしていなかったけれど、
ピラミッドをつくった。

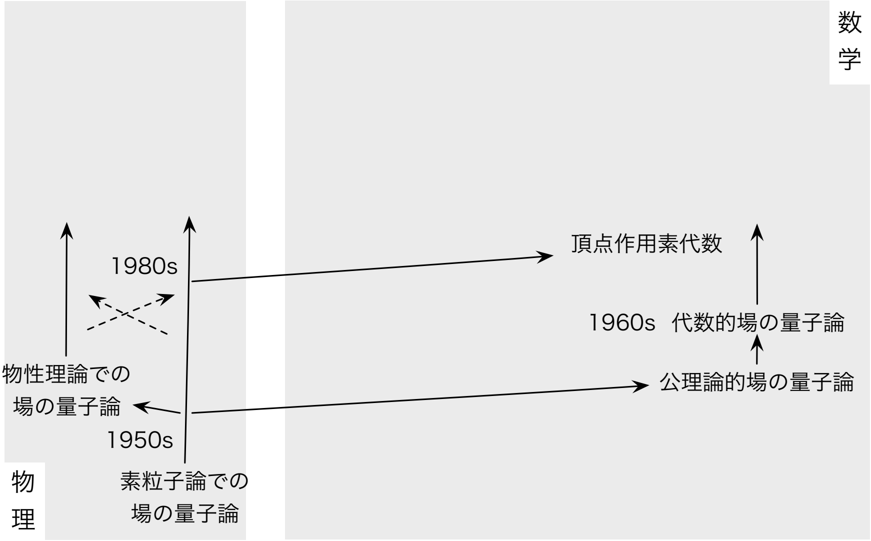
物理屋も、数学的に定式化は出来ていないが、計算出来て、
実験と合う。

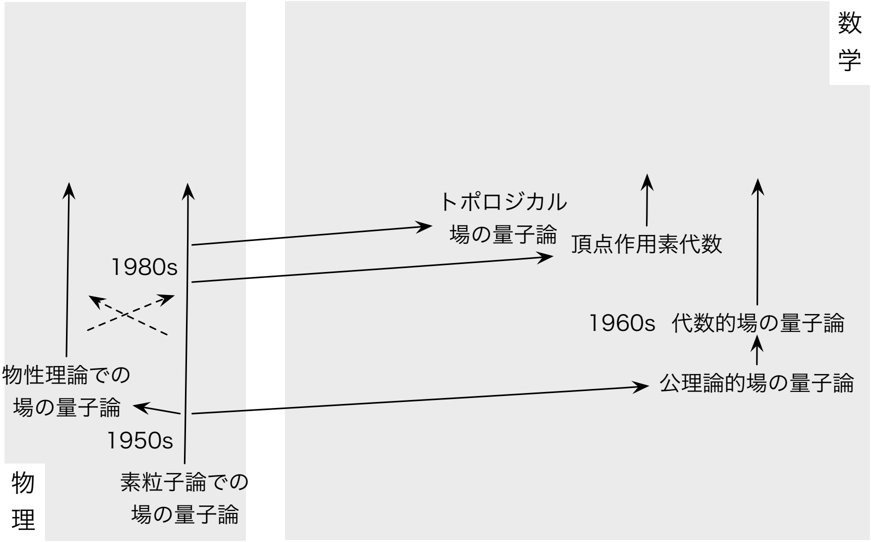
でもまあ、僕としては不満足に感じるわけです。

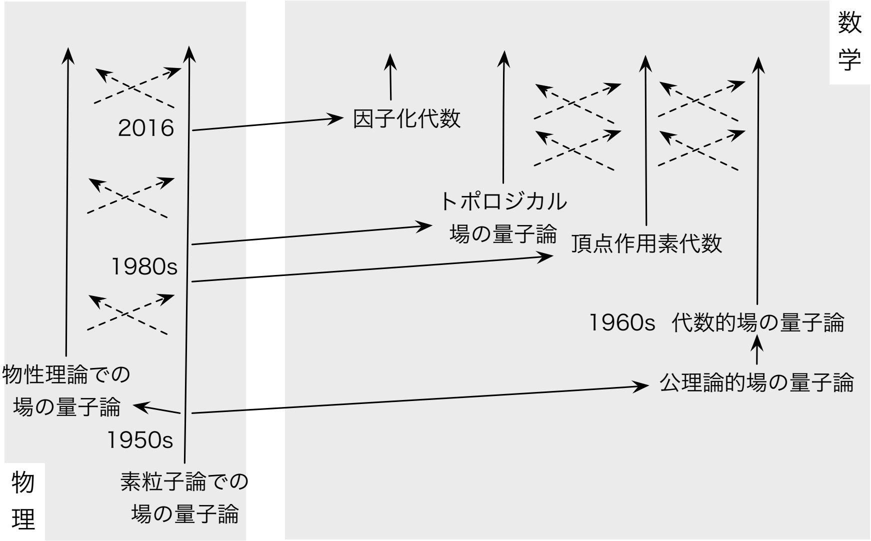
勿論、数学者がこれまで場の量子論を数学にしようと
頑張らなかったわけではありません:


数学
物性理論での
場の量子論
公理論的場の量子論
1950s
物理
素粒子論での
場の量子論


数学
1960s 代数的場の量子論
公理論的場の量子論
物性理論での
場の量子論
1950s
物理
素粒子論での
場の量子論


数学
頂点作用素代数
1980s
1960s
代数的場の量子論
公理論的場の量子論
物性理論での
場の量子論
1950s
物理
素粒子論での
場の量子論


数学
トポロジカル
場の量子論
頂点作用素代数
1980s
1960s
代数的場の量子論
物性理論での
場の量子論
公理論的場の量子論
1950s
物理
素粒子論での
場の量子論


数学
因子化代数
2016
トポロジカル
場の量子論
頂点作用素代数
1980s
1960s
代数的場の量子論
公理論的場の量子論
物性理論での
場の量子論
1950s
物理
素粒子論での
場の量子論

しかし、トポロジカル場の理論も、頂点作用素代数も、
公理論的/代数的場の理論も、
実際の量子電磁/色力学の計算をその中で記述できない。

しかし、トポロジカル場の理論も、頂点作用素代数も、
公理論的/代数的場の理論も、
実際の量子電磁/色力学の計算をその中で記述できない。

場の量子論とは

???

(因子化代数は可。しかしこれも完璧ではない)

場の量子論の数学

$\downarrow$

場の量子論のための数学

$\downarrow$

場の量子論による数学

場の量子論の数学

$\downarrow$

場の量子論のための数学

$\downarrow$

場の量子論による数学

場の量子論が数学的に不完全だといっても、

計算の途中には既存の数学は勿論必要になる。

僕個人は常に何か新しい数学の分野を学んでいる気がします。

例えば:

院生のおわりぐらい: 佐々木-Einstein 多様体の理論

ポスドクの間: 冪零軌道の理論

ここ数年: 代数トポロジー、特にコボルディズム群の話。

等々...

(全ての場の理論屋がこれらをやっているわけでは全然ないです、
たぶん僕の趣味がおかしいだけだろう。)

最近勉強したこと: 一般 (コ) ホモロジーのアンダーソン双対。

$\mathbb{Z}$ 係数 (コ) ホモロジーには普遍係数定理がある

$$0 \to \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_{d-1}(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^d(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_d(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to 0.$$

一般 (コ) ホモロジー理論 $h_*(-)$, $h^*(-)$ に対しては、
一般には別の (コ) ホモロジー理論 $Dh_*(-)$, $Dh^*(-)$ があり、

$$
\begin{aligned}
0 \to \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(h_{d-1}(X), \mathbb{Z}) & \\
\to (Dh)^d(X) \to & \\
& \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(h_d(X), \mathbb{Z}) \to 0
\end{aligned}
$$

が成りたち、かつ $DDh = h$。これがアンダーソン双対。

$H(-, \mathbb{Z})$ の普遍係数定理は $DH(-, \mathbb{Z}) = H(-, \mathbb{Z})$ ということ。

また、$DK = K$, $DKO = KSp$。

何故こんなことを?

最近物性では、トポロジカル物性というのが熱いらしい。

対称性保護トポロジカル相
(Symmetry protected topological phases, SPT 相)
と呼ばれるクラスの場の量子論が重要になってきた。

その分類が、ボルディズムホモロジーのアンダーソン双対で得られるということが
[Kapustin-Thorngren-Turzillo-Wang 1406.7329],
[Freed-Hopkins 1604.06527], [Yonekura 1803.10796]
などによってわかってきた。

これをもう少し説明したい。

その為には、場の理論とは何か、ある程度説明しないといけない。

まず、量子力学とは、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ がある。

つぎに、時間 T だけの発展

$$\bullet \xrightarrow{\quad T \quad} \bullet$$

に対して

$$U(T) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

がある。

同様に

$$\bullet \xrightarrow{\quad T' \quad} \bullet$$

に対して

$$U(T') : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

がある。

さらに、

$$\bullet \xrightarrow{\quad T \quad} \bullet \xrightarrow{\quad T' \quad} \bullet$$

と

$$\bullet \xrightarrow{\qquad T+T' \qquad} \bullet$$

は同じなので、

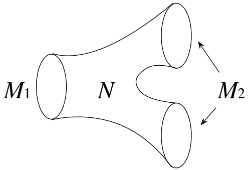
$$U(T)U(T') = U(T+T')$$

を要求する。

これに対して、d 次元の場の量子論は、
$d-1$ 次元の多様体 M に対してヒルベルト空間

$$\mathcal{H}(M)$$

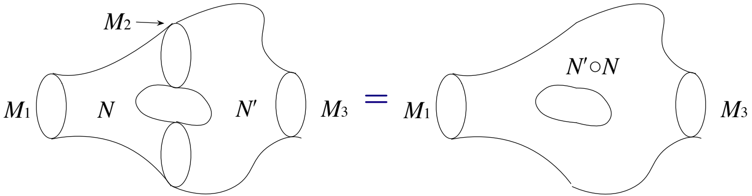
があり、



に対し

$$U(N) : \mathcal{H}(M_1) \to \mathcal{H}(M_2)$$

がある。



に対応して

$$U(N')U(N) = U(N' \circ N)$$

を要求する。

コメント 1.

「多様体」といったときに、どれだけ構造を要求するかを
指定する必要あり。

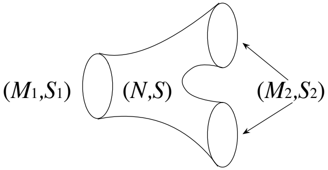
微分構造だけを考えることにしたものが、位相的場の理論。

微分構造 + スピン構造 + 計量を考えたものが、
通常物理で出てくる場の理論。

一般に構造を $\mathcal{S}$ と呼ぶと、d 次元 $\mathcal{S}$-構造つき場の量子論 Q は、
そのデータの一部として、

$d{-}1$ 次元 $\mathcal{S}$ 構造付き多様体と
その間のボルディズムの圏から
ヒルベルト空間とその線形写像のなす圏への関手

を含む。



$$\Longrightarrow U_Q(N,S) : \mathcal{H}(M_1,S_1) \to \mathcal{H}(M_2,S_2)$$

(S は N 上の $\mathcal{S}$ 構造を具体的にとってきた一つ。)

コメント 2.

量子力学は

$$\bullet \xrightarrow{\quad T \quad} \bullet$$

が

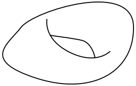
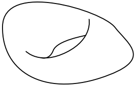
$$U(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

に対応した。

これは $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\bullet)$ と思えば、一次元の計量付き場の量子論である。

コメント 3.

物理では $\mathcal{H}$ に正定値内積がはいっていて、それを確率解釈につかう。

M  $\overline{M}$ 

に対し

$$\overline{\mathcal{H}(M)} = \mathcal{H}(\overline{M})$$

などの性質あり。

ユニタリな場の量子論という。

コメント 4.

d 次元の $\mathcal{S}$-構造付き場の量子論をふたつ Q_1, Q_2 を考える。

このとき、場の理論の直和 $Q_1 + Q_2$ と直積 $Q_1 \times Q_2$があって
$d{-}1$ 次元の $\mathcal{S}$-構造付き多様体 M に対して
ヒルベルト空間が

$$\mathcal{H}_{Q_1+Q_2}(M) = \mathcal{H}_{Q_1}(M) \oplus \mathcal{H}_{Q_2}(M),$$
$$\mathcal{H}_{Q_1\times Q_2}(M) = \mathcal{H}_{Q_1}(M) \otimes \mathcal{H}_{Q_2}(M)$$

と振舞う。

場の理論達の集まりには $+$ と $\times$ が入る。

特に、状態空間 $\mathcal{H}_Q(M)$ が勝手な M に対して 1 次元であるような場の量子論 Q を可逆な場の量子論 (invertible QFT) という。

可逆な場の量子論は場の量子論達の
$Q_1 + Q_2$, $Q_1 \times Q_2$ のもとでなす代数での可逆元である:

$$\mathcal{H}_{Q^{-1}}(M) := \mathcal{H}_Q(M)^\vee$$

とすればよい。

可逆な場の理論達は、$\times$ のもとで可換群をなす。

数学的に場の量子論を捉えようとすると、
まず判っておかないとはじまらないもの。

しかし、2010 年すぎになるまであからさまには
ほとんど研究されていなかった。何故か? 僕が推測するに、

通常、場の理論 = 無限自由度で難しい、というが、
可逆な場の理論のヒルベルト空間は一次元。

粒子の量子力学のヒルベルト空間ですら無限次元で、
量子情報で重要な **qubit** ですら二次元。

一次元は簡単過ぎて、なにも起きない気がする。

2010 年を過ぎて研究がはじまったのは、

ユニタリで可逆な場の理論 = 物性理論でいう
対称性保護トポロジカル相 (symmetry protected topological phase)

だから。

多様体 M 上の構造 $\mathcal{S}$ に加えて、X という空間をとって、
$M \to X$ という写像も構造の一部として含めたものを
$\mathcal{S}(X)$ 構造とする。

$\mathcal{S}(X)$-構造つき d 次元可逆場の量子論を up to 連続変形で分類する

=

X で保護された対称性保護トポロジカル相を分類する

というのは理論物性物理で大きな問題。

但し、$\mathcal{S}$ = 微分構造 + spin 構造 + 計量 等の標準的なものとする。

答え:

$\mathcal{S}(X)$-構造つき d 次元可逆ユニタリ場の量子論の
up to 連続変形での分類は

$$(D\Omega^{\mathcal{S}})^{d+1}(X)$$

で与えられる。

ここで $\Omega^{\mathcal{S}}_{\bullet}$ は $\mathcal{S}$-構造つきボルディズムホモロジー、
D はアンダーソン双対。

[Kapustin-Thorngren-Turzillo-Wang 1406.7329],
[Freed-Hopkins 1604.06527],
[Yonekura 1803.10796]

何故アンダーソン双対が関係あるのか?

実際の実験においては、有限のサンプルを扱うわけだが、
理論的理想化として、
閉じた多様体 N_d の形をした時空を埋め尽くしている場合を考える。

N_d を $\varnothing$ から $\varnothing$ へのボルディズムとおもうと、

$$U_Q(N_d) : \mathcal{H}(\varnothing) \to \mathcal{H}(\varnothing)$$

は

$$U_Q(N_d) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

だから複素数を定める。

そこで、

$$N_d \mapsto \frac{U_Q(N_d)}{|U_Q(N_d)|} \in \{\text{絶対値 } 1 \text{ の数}\}$$

という関数を考えることができる。

だから、Q はだいたい d 次元のボルディズムの上の関数になるので、ボルディズムのなんらかの意味での双対になる。

きちんと考えると、アンダーソン双対をとらないといけないことがわかる。

例えば、時間反転不変トポロジカル超伝導体と呼ばれる
対称性保護トポロジカル相は、
構造 S が Pin^+ 構造で、$X = \bullet$ (一点) の場合。

ただし、Spin 群は SO (特殊直交) 群の二重被覆であるように、
Pin^+ 群は O (直交) 群の二重被覆。

Q. 四次元の時間反転不変トポロジカル超伝導体を分類せよ。

1990 年の [Kirby-Taylor “Pin structures on low-dimensional manifolds”, London Math. Soc. LNS 151, pp.177-242]という文献を開くと...

$$p : \Omega_2^{Pin^-} \longrightarrow \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$$

gives the isomorphism in the following table.

$$\begin{array}{llll}
\Omega_1^{Spin} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \Omega_2^{Spin} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \Omega_3^{Spin} = 0 & \Omega_4^{Spin} = \mathbf{Z} \\
\Omega_1^{Pin^-} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \Omega_2^{Pin^-} = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} & \Omega_3^{Pin^-} = 0 & \Omega_4^{Pin^-} = 0 \\
\Omega_1^{Pin^+} = 0 & \Omega_2^{Pin^+} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \Omega_3^{Pin^+} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \Omega_4^{Pin^+} = \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}
\end{array}$$

In §2 we calculate the 1 and 2 dimensional groups and show that the non-zero one dimensional groups are generated by the circle with its Lie group framing, S^1

この論文を読むと、$\Omega_{4+1}^{\mathrm{pin}+}(\bullet) = 0$ もわかる。これより、

$$(D\Omega^{\mathrm{pin}+})^{4+1}(\bullet) = \mathbb{Z}_{16}.$$

四次元の時間反転不変トポロジカル超伝導体は、
$\mathbb{Z}_{16}$ で分類される!

$$\rho : \Omega_2^{Pin^-} \longrightarrow \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$$

gives the isomorphism in the following table.

$\Omega_1^{Spin} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\Omega_2^{Spin} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\Omega_3^{Spin} = 0$	$\Omega_4^{Spin} = \mathbf{Z}$
$\Omega_1^{Pin^-} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\Omega_2^{Pin^-} = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$	$\Omega_3^{Pin^-} = 0$	$\Omega_4^{Pin^-} = 0$
$\Omega_1^{Pin^+} = 0$	$\Omega_2^{Pin^+} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\Omega_3^{Pin^+} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\Omega_4^{Pin^+} = \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$

In §2 we calculate the 1 and 2 dimensional groups and show that the non-zero one dimensional groups are generated by the circle with its Lie group framing, S^1

これは物性理論屋がもっと物理的直観に基づいて得た結果と
合致している。

Kirby-Taylor が 1990 年に $\boldsymbol{\Omega_4^{\mathrm{pin}+}} = \mathbb{Z}_{\mathbf{16}}$ を計算したときは、
トポロジカル相との関係など全く考えていなかったと思われる。

しかし、Kirby-Taylor が計算をやっておいて、
わかりやすくまとめてあるお陰で、
こちらは結果を使うだけで良い。

十五年強ぐらい場の量子論をやっていて感じるのは、
なんとか場の理論の問題を数学の問題に帰着すると、
かなりの割合で、数学者が既にそれを解決している。
だから、あとはその結果を使うだけで良い。

数学者のみなさん、どうもありがとう！

数学者の教科書/論文の (僕にとって) ありがたい点は、

定義と定理がきちんと書いてあるので、証明の詳細がわからなくても、
道具として使えること。

スマホで何故タッチすると画面の中が動くのかわかっていなくても、
問題なく使えるのと同様。

物理屋の教科書/論文はそうはいかない。
前提と結果が渾然一体としていて、結局全部読む羽目になる。

場の量子論の数学

$\downarrow$

場の量子論のための数学

$\downarrow$

場の量子論による数学

場の量子論の数学

$\downarrow$

場の量子論のための数学

$\downarrow$

場の量子論による数学

いろいろな数学が場の量子論の結果に示唆されて出て来ている。

著名な例:

- カラビヤウ多様体に関するミラー対称性
- 四次元多様体のザイバーグ = ウィッテン理論

いろいろな数学が場の量子論の結果に示唆されて出て来ている。

著名な例:

- カラビヤウ多様体に関するミラー対称性
  $\Longleftarrow$ 二次元の超対称場の理論の研究から産まれた。

- 四次元多様体のザイバーグ = ウィッテン理論

いろいろな数学が場の量子論の結果に示唆されて出て来ている。

著名な例:

- カラビヤウ多様体に関するミラー対称性
  $\Longleftarrow$ 二次元の超対称場の理論の研究から産まれた。

- 四次元多様体のザイバーグ = ウィッテン理論
  $\Longleftarrow$ 四次元の超対称場の理論の研究から産まれた。

超対称場の理論とは?

この講演の用語でいえば、多様体 N の上に考える構造 $\mathcal{S}$ の特別にうまく選んだもの。

11 次元以下にしか存在せず、必然的に空間次元に依存するため、数学者に説明し辛い。

(この点は我々がもっと努力すべき所かも知れない。)

例えば、二次元 (n, n') 超対称構造は、
微分構造、スピン構造、計量に加えて
接続付 $\mathbf{SO}(n) \times \mathbf{SO}(n')$ 主バンドルを含む。
(それ以外にもさらにいろいろ含む。)

二次元多様体 N 上の $(2,2)$ 超対称構造

$$S = (\text{微分構造}, \text{計量}, \mathbf{SO(2)}\ \text{束}\ \mathbf{1}, \mathbf{SO(2)}\ \text{束}\mathbf{2}, \ldots)$$

に対し、二つ目の $\mathbf{SO(2)}$ 束を $\mathbf{SO(2)} \subset \mathbf{O(2)}$ からくる
外部自己同型で作用してやると別の $(2,2)$ 超対称構造 S° が得られる:

$$S^\circ := (\text{微分構造}, \text{計量}, \mathbf{SO(2)}\ \text{束}\ \mathbf{1}, \mathbf{SO(2)}\ \text{束}\mathbf{2}', \ldots).$$

勿論

$$S^{\circ\circ} = S.$$

対応して、二次元 $(2,2)$ 超対称場の理論 Q に対し、Q° を定められる:

$$\mathcal{H}_{Q^\circ}(M,S) := \mathcal{H}_Q(M,S^\circ), \qquad U_{Q^\circ}(N,S) := U_Q(N,S^\circ).$$

これまた $Q^{\circ\circ} = Q$ を満たす。

Q° を Q のミラーという。

二次元 $(2,2)$ 超対称場の理論 Q に対し、

- A 型境界条件のなす三角圏 $A(Q)$
- B 型境界条件のなす三角圏 $B(Q)$

というものが取り出せる。

定義からほぼ自明に

$$A(Q^\circ) = B(Q), \qquad B(Q^\circ) = A(Q).$$

さて、カラビヤウ多様体 $\boldsymbol{X}$ に対し、
二次元 $\mathbf{(2,2)}$ 超対称場の理論 $\boldsymbol{Q(X)}$ を作ることが出来る。

- $\boldsymbol{A(Q(X))}$ は $\boldsymbol{X}$ の深谷圏
- $\boldsymbol{B(Q(X))}$ は $\boldsymbol{X}$ の連接層の導来圏

さらに、しばしば、カラビヤウ多様体 X, Y に対し

$$Q(X)^\circ = Q(Y)$$

となる。すると、

$$A(Q(X)) = B(Q(Y)), \qquad B(Q(X)) = A(Q(Y))$$

すなわち

- X の深谷圏は Y の連接層の導来圏
- X の連接層の導来圏は Y の深谷圏

ということになる。

ホモロジー的ミラー対称性。90 年代半ばの話。

注意点.

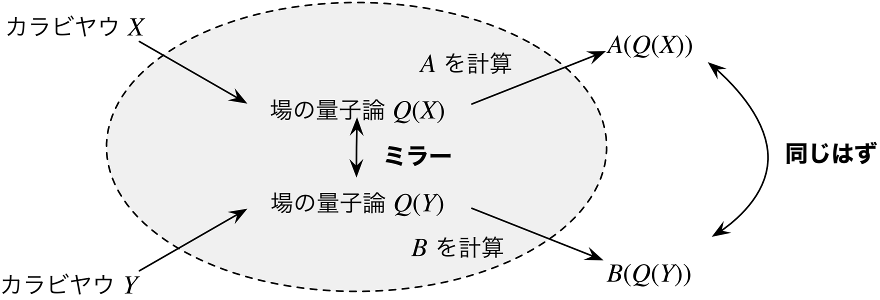
与えられたカラビヤウ多様体 $\boldsymbol{X}$ に対して
二次元 (2,2) 超対称場の理論 $\boldsymbol{Q(X)}$ を考えた際、
どのようなカラビヤウ多様体 $\boldsymbol{Y}$ を取っても

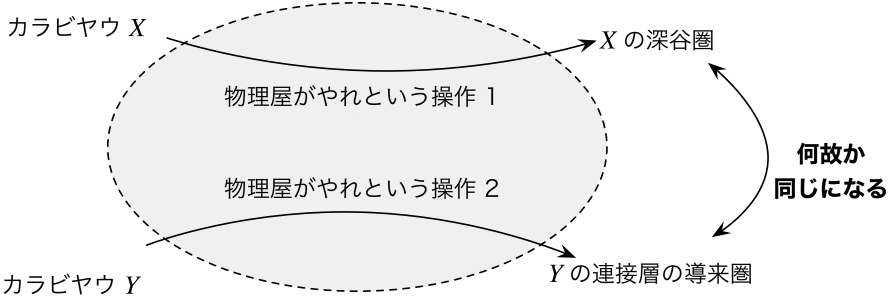
$$\boldsymbol{Q(X)^{\circ} = Q(Y)}$$

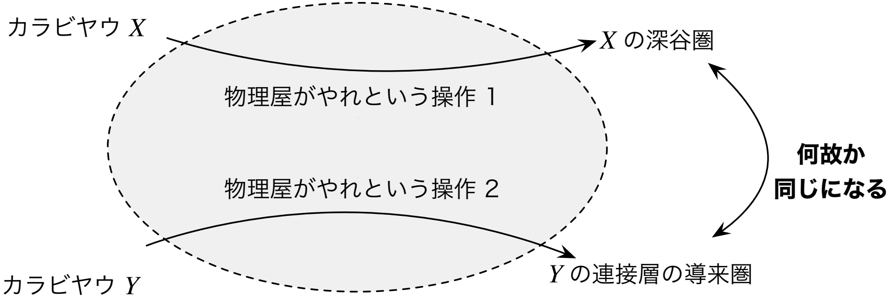
とならないこともしばしばある。

$\boldsymbol{X}$が複素構造の変形を持たない場合などが典型例。

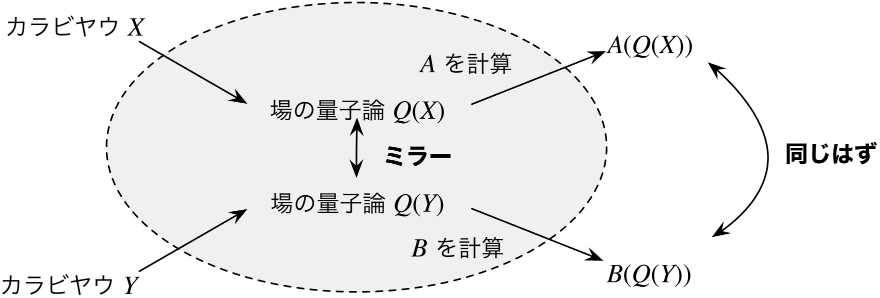
二次元 (2,2) 超対称場の理論は、$\boldsymbol{Q(X)}$ の形をしていないものも
沢山あるため。


カラビヤウ X
A を計算
$A(Q(X))$
場の量子論 $Q(X)$
ミラー
同じはず
場の量子論 $Q(Y)$
B を計算
$B(Q(Y))$
カラビヤウ Y


カラビヤウ X
X の深谷圏
物理屋がやれという操作 1
物理屋がやれという操作 2
何故か
同じになる
カラビヤウ Y
Y の連接層の導来圏



灰色の円の中は定義があやふやだが、論理がないわけではない。



灰色の円の中は定義があやふやだが、論理がないわけではない。

もうひとつ別の話。

三次元 $\boldsymbol{n}$ 重超対称構造は、
微分構造、スピン構造、計量に加えて
接続付 $\mathbf{SO}(\boldsymbol{n})$ 主バンドルを含む。
(それ以外にもさらにいろいろ含む。)

三次元多様体 N 上の 4 重超対称構造

$$S = (\text{微分構造}, \text{計量}, \mathbf{SO(4)}\ \text{束}, \ldots)$$

に対し、二つ目の $\mathbf{SO(4)}$ 束を $\mathbf{SO(4)} \subset \mathbf{O(4)}$ からくる
外部自己同型で作用してやると別の 4 重超対称構造 S° が得られる:

$$S^\circ := (\text{微分構造}, \text{計量}, \mathbf{SO(4)}\ \text{束}', \ldots).$$

勿論

$$S^{\circ\circ} = S.$$

対応して、三次元 $\mathbf{4}$ 重超対称場の理論 Q に対し、Q° を定められる:

$$\mathcal{H}_{Q^\circ}(M,S) := \mathcal{H}_Q(M,S^\circ), \qquad U_{Q^\circ}(N,S) := U_Q(N,S^\circ).$$

これまた $Q^{\circ\circ} = Q$ を満たす。

Q° を Q のミラーという。

三次元 $\mathbf{4}$ 重超対称場の理論 $\boldsymbol{Q}$ に対し、

- Higgs 枝のなすハイパーケーラー多様体 $\mathbf{Higgs}(\boldsymbol{Q})$
- Coulomb 枝のなすハイパーケーラー多様体 $\mathbf{Coulomb}(\boldsymbol{Q})$

というものが取り出せる。

定義からほぼ自明に

$$\mathbf{Higgs}(\boldsymbol{Q}^\circ) = \mathbf{Coulomb}(\boldsymbol{Q}), \qquad \mathbf{Coulomb}(\boldsymbol{Q}^\circ) = \mathbf{Higgs}(\boldsymbol{Q}).$$

コンパクトリー群 G とその四元数表現 V に対し
三次元 4 重超対称場の理論 $Q(G,V)$ を作ることが出来る。

$$\mathrm{Higgs}(Q(G,V)) = V///G$$

は V の G によるハイパーケーラー商というもので、
80 年代後半に導入された:

$$\mu : V \to \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{R}^3$$

なる写像が自然に作れて、

$$V///G = \mu^{-1}(0)/G$$

と定める。

では $\mathbf{Coulomb}(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{V}))$ は?

これまたハイパーケーラー多様体のはずであるが、
長らく数学的には未定義。

ようやく数年前に [Braverman-Finkelberg-Nakajima] によって
正則シンプレクティック多様体としては定義された。

$\boldsymbol{G}$ の affine Grassmannian 上に $\boldsymbol{V}$ から偏屈層をつくって、
それのコホモロジー環の $\mathbf{Spec}$ として定める。

$\boldsymbol{Q(V,G)^\circ = Q(V',G')}$ となるときは、

$$\begin{aligned}\mathbf{Higgs}(\boldsymbol{Q(V,G)}) &= \mathbf{Coulomb}(\boldsymbol{Q(V',G')}),\\ \mathbf{Coulomb}(\boldsymbol{Q(V,G)}) &= \mathbf{Higgs}(\boldsymbol{Q(V',G')})\end{aligned}$$

なので、ハイパーケーラー商と B-F-N の構成が入れ替わることになる。

しかし多くの場合で、与えられた $\boldsymbol{(V,G)}$ に対して
$\boldsymbol{Q(V,G)^\circ}$ は $\boldsymbol{Q(V',G')}$とは書けないと思われている。

三次元 4 重超対称理論には、$\boldsymbol{Q(V,G)}$ でないものも沢山あるため。

$\Longrightarrow$ 新しいクラスのハイパーケーラー多様体が沢山。

[Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin] によると、
$\mathbb{R}^4$ 上の古典群 K のインスタントンモジュライは
V, G をうまく選んで ハイパーケーラー商

$$\mathrm{Higgs}(Q(V, G)) = V///G$$

と書ける。

ただし、群 K のインスタントン =
接続付き K 主束で曲率が $F = - \star F$ を満たすもの。

しかし、昔から、物理屋の間では、K が例外群の場合は
有限次元ベクトル空間のハイパーケーラー商

$$\mathrm{Higgs}(Q(V, G)) = V///G$$

とは書けないと思われている。

一方、物理屋の間では、$\mathbb{R}^4$ 上の群 K のインスタントンモジュライは、
群 K が **simply-laced** すなわち

$$A_{n-1} = \mathrm{SU}(n), \qquad D_n = \mathrm{SO}(2n), \qquad E_{6,7,8}$$

ならば V, G を自然に選んでクーロン枝

$$\mathrm{Coulomb}(Q(V, G))$$

として書けると思われている。

$\mathrm{Coulomb}(Q(V, G))$ が数学的に定義されたことで、
これの理解に一歩近づいた気がする。

場の量子論の数学
= 場の量子論を数学として扱うこと

場の量子論による数学
= 場の量子論に示唆されて数学が出てくること

場の量子論のための数学
= 場の量子論の研究に数学を使うこと

時間が余ったので最後にもっと気楽な話を。

有限単純群の分類

- 交代群 $\boldsymbol{A_{n\geq 5}}$
  無限に沢山ある。
- リー型の単純群 $\simeq$ リー群を有限体上で考えたもの
  無限に沢山ある。
- 散在型の単純群
  マチウ群, ヤンコ群, ..., モンスター群 の 26 個。

モジュラー J 関数

$$J(q) = \frac{1}{q} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots$$

は、19 世紀から知られている古典的なもの。

1978 年に McKay は次のことに気が付いた:

当時みつかりそうだった新散在型有限群モンスターは
元の数が $\sim 8 \cdot 10^{53}$ あるが、その一番小さい非自明既約表現は

$$196883$$

次元である。

何か関係があるのではないか?

$\boldsymbol{J}$ 関数:	保形関数
モンスター群:	有限群

関連する観察もいろいろなされた [Ogg, Conway-Norton, ...]

あまりに突拍子もなかったので、
Monstrous Moonshine (とんでもなく馬鹿げた話) と言われた。

90 年代初頭には
[Frenkel-Lepowsky-Meurman], [Borcherds]
によって解決。

頂点作用素代数の理論が深く使われた。

ある特別な 24 次元トーラスを動く弦理論のスペクトルが
J 関数であることが関係する。

1989 年、僕の兄弟子の大栗さんは博士論文で
K3 曲面を動く弦理論のスペクトルを計算した:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \tag{23}$$

この係数に意味はないのか?

当時、次のような文献もあった:

Invent. math. 94, 183–221 (1988)

Inventiones mathematicae

Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group

Dedicated to Professor Masayoshi Nagata on his 60th Birthday

Shigeru Mukai

Department of Mathematics, Nagoya University, Furō-chō Chikusa-ku, Nagoya 464 Japan

僕の師匠の江口さん曰く:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned} F(\tau) &= 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\ &\quad + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \end{aligned} \tag{23}$$

この係数はマチウ群と関係あるのでは?

そして 20 年の時は流れ…

2009 年、アスペン。

江口さん、大栗さん、僕と三人研究会にいたので、
もう一度考えてみた。

僕: 岩波数学辞典の後ろの数表をみてみれば?

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$
\begin{aligned}
F(\tau) = {} & 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\
& + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots
\end{aligned}
\tag{23}
$$

岩波数学辞典第四版:

数 **6** I　　　　　　　　数　表　**6**

M_{24}	$(1)^{24}$	g	$1\ \ 23\ \ 7\cdot36\ \ 23\cdot11\ \ 23\cdot77\ \ 55\cdot64\ \ \overline{45}\ \ \overline{22\cdot45}\ \ \overline{23\cdot45}\ \ 23\cdot45\ \ \overline{11\cdot21}\ \ \overline{770}$
	$(1)^{24}$	g	$23\cdot21\ \ 23\cdot55\ \ 23\cdot88\ \ 23\cdot99\ \ 23\cdot144\ \ 23\cdot11\cdot21\ \ 23\cdot7\cdot36\ \ 77\cdot72\ \ 11\cdot35\cdot27$

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned} F(\tau) = \boxed{90}q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\ + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \end{aligned} \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I　　　　数　表　6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	$1\ \ 23\ \ 7\cdot 36\ \ 23\cdot 11\ \ 23\cdot 77\ \ 55\cdot 64\ \ \boxed{\overline{45}}\ \ \overline{22\cdot 45}\ \ \overline{23\cdot 45}\ \ 23\cdot 45\ \ \overline{11\cdot 21}\ \ \overline{770}$
	$(1)^{24}$	g	$23\cdot 21\ \ 23\cdot 55\ \ 23\cdot 88\ \ 23\cdot 99\ \ 23\cdot 144\ \ 23\cdot 11\cdot 21\ \ 23\cdot 7\cdot 36\ \ 77\cdot 72\ \ 11\cdot 35\cdot 27$

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I　　　　数　表　6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	$1\ \ 23\ \ 7\cdot36\ \ 23\cdot11\ \ 23\cdot77\ \ 55\cdot64\ \ \boxed{\overline{45}}\ \ \overline{22\cdot45}\ \ \overline{23\cdot45}\ \ 23\cdot45\ \ \boxed{\overline{11\cdot21}}\ \ \overline{770}$
	$(1)^{24}$	g	$23\cdot21\ \ 23\cdot55\ \ 23\cdot88\ \ 23\cdot99\ \ 23\cdot144\ \ 23\cdot11\cdot21\ \ 23\cdot7\cdot36\ \ 77\cdot72\ \ 11\cdot35\cdot27$

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + \boxed{1540}q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I　　　　数　表　6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	$1\ \ 23\ \ 7\cdot 36\ \ 23\cdot 11\ \ 23\cdot 77\ \ 55\cdot 64\ \ \boxed{\overline{45}}\ \ \overline{22\cdot 45}\ \ \overline{23\cdot 45}\ \ 23\cdot 45\ \ \boxed{\overline{11\cdot 21}}\ \ \boxed{\overline{770}}$
	$(1)^{24}$	g	$23\cdot 21\ \ 23\cdot 55\ \ 23\cdot 88\ \ 23\cdot 99\ \ 23\cdot 144\ \ 23\cdot 11\cdot 21\ \ 23\cdot 7\cdot 36\ \ 77\cdot 72\ \ 11\cdot 35\cdot 27$

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + \boxed{1540}q^3 + \boxed{4554}q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I　　　　数　表　6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	$1 \quad 23 \quad 7\cdot 36 \quad 23\cdot 11 \quad 23\cdot 77 \quad 55\cdot 64 \quad \boxed{\overline{45}} \quad \overline{22\cdot 45} \quad \overline{23\cdot 45} \quad 23\cdot 45 \quad \boxed{\overline{11\cdot 21}} \quad \boxed{\overline{770}}$
	$(1)^{24}$	g	$23\cdot 21 \quad 23\cdot 55 \quad 23\cdot 88 \quad \boxed{23\cdot 99} \quad 23\cdot 144 \quad 23\cdot 11\cdot 21 \quad 23\cdot 7\cdot 36 \quad 77\cdot 72 \quad 11\cdot 35\cdot 27$

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + \boxed{1540}q^3 + \boxed{4554}q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I　　数 表 6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	$1 \quad 23 \quad 7\cdot36 \quad 23\cdot11 \quad 23\cdot77 \quad 55\cdot64 \quad \boxed{\overline{45}} \quad \overline{22\cdot45} \quad \overline{23\cdot45} \quad 23\cdot45 \quad \boxed{\overline{11\cdot21}} \quad \boxed{\overline{770}}$
	$(1)^{24}$	g	$23\cdot21 \quad 23\cdot55 \quad 23\cdot88 \quad \boxed{23\cdot99} \quad 23\cdot144 \quad 23\cdot11\cdot21 \quad 23\cdot7\cdot36 \quad 77\cdot72 \quad 11\cdot35\cdot27$

対応がある！

「対応がある」とだけ書いた論文を書いた:

Notes on the K3 Surface and the Mathieu Group M_{24}

Tohru Eguchi, Hirosi Ooguri, and Yuji Tachikawa

Experimental Mathematics, 20(1):91–96, 2011

ISSN: 1058-6458 print
DOI: 10.1080/10586458.2011.544585

https://arxiv.org/abs/1004.0956

徐々に数学者によって証明されつつある:

arXiv.org > math > arXiv:1211.5531

Search or

Mathematics > Representation Theory

Much ado about Mathieu

Terry Gannon

(Submitted on 23 Nov 2012 (v1), last revised 15 Mar 2013 (this version, v2))

Eguchi, Ooguri and Tachikawa have observed that the elliptic genus of type II string theory on K3 surfaces appears to possess a Moonshine for the largest Mathieu group. Subsequent work by several people established a candidate for the elliptic genus twisted by each element of M24. In this paper we prove that the resulting sequence of class functions are true characters of M24, proving the Eguchi-Ooguri-Tachikawa conjecture. We prove the evenness property of the multiplicities, as conjectured by several authors. We also identify the role group cohomology plays in both K3-Mathieu Moonshine and Monstrous Moonshine; in particular this gives a cohomological interpretation for the non-Fricke elements in Norton's Generalised Monstrous Moonshine conjecture. We investigate the intriguing proposal of Gaberdiel-Hohenegger-Volpato that K3-Mathieu Moonshine lifts to the Conway group Co1.

https://arxiv.org/abs/1211.5531

場の量子論の数学
= 場の量子論を数学として扱うこと

場の量子論による数学
= 場の量子論に示唆されて数学が出てくること

場の量子論のための数学
= 場の量子論の研究に数学を使うこと