無限粒子系の確率解析学

古典的確率解析の新展開とランダム行列の力学的普遍性

2018/9/25/火
2018 年度秋季総合分科会

岡山大学創立 50 周年記念館

長田博文 (九州大学大学院数理学研究院)

謝辞

種村秀紀さん

白井朋之さん

乙部厳己さん

「無限粒子系の確率解析学」のチームの皆様

Dysonモデル: 1986年3月ミネソタ Herbert Spohn

- Dysonモデルとは$\mathbb{R}$を運動する無限粒子系$\mathbf{X}=(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$である.
- 粒子の時刻tの位置$\mathbf{X}_t=(X_t^i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$は次の確率積分方程式で与えられる.

$$X_u^i - X_0^i = B_u^i + \int_0^u \sum_{j\neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}dt \quad (i\in\mathbb{N}). \tag{1}$$

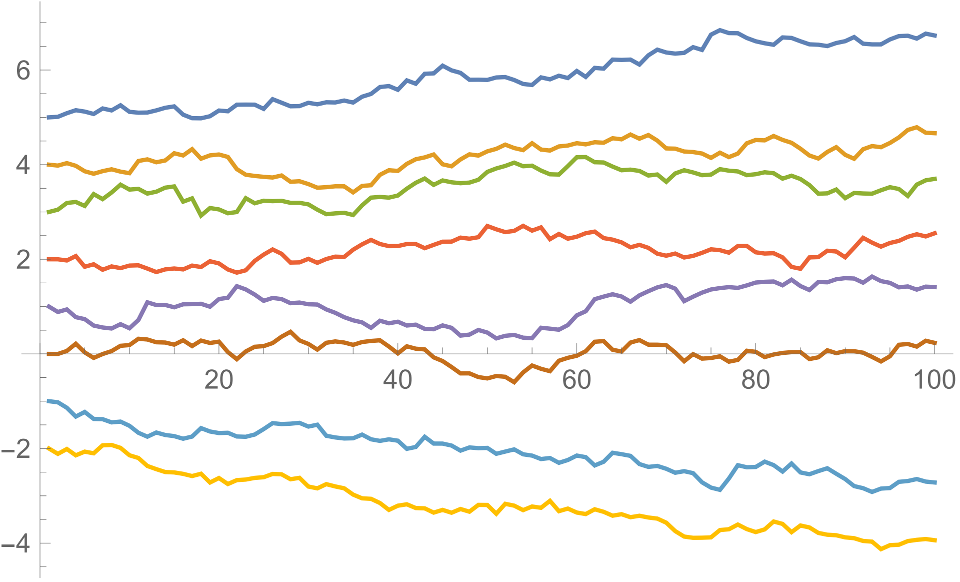
- $\mathbf{B}=(B^i)_{i\in\mathbb{N}}$は$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-値ブラウン運動,
- $\mathbf{X}$はある確率空間$(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\})$で定義された連続なパスを持つ確率過程.
- $\mathbf{X}$は時刻tと$\omega\in\Omega$の関数であり，$\mathbf{X}=\mathbf{X}_t=\mathbf{X}_t(\omega)$ などとも表記する.
- (1)は積分形で表示したが，通常，確率微分方程式(2)で表記する.

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j\neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}dt \quad (i\in\mathbb{N}). \tag{2}$$

- Spohn ['86]は(2)を有限粒子系の確率微分方程式(3)の$N\to\infty$として得た

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}}dt - \frac{1}{N}X_t^{N,i}dt \quad (i=1,\dots,N) \tag{3}$$

- (3)はガウス型ユニタリアンサンブルの固有値の確率力学.


6
4
2
−2
−4
20
40
60
80
100

対称性を持つ無限次元確率微分方程式: ISDE with symmetry

- $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 上の確率微分方程式: $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$,

$$dX_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2}\sum_{j=1,j\neq i}^{\infty} \nabla\Psi(X_t^i - X_t^j)dt, \quad (i \in \mathbb{N}). \qquad \text{(Lang)}$$

- Lang [77]: $\Psi \in C_0^3(\mathbb{R}^d)$,
- 種村 [96]: ハードコアブラウン運動.
- 格子気体 (川崎力学) の連続版
- Fritz [87]: 非平衡解 $d \leq 4$,
- Tsai [16]: sine_β

- Lang は，$\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ の関数であるべき係数

$$-\frac{\beta}{2}\sum_{j=1,j\neq i}^{\infty} \nabla\Psi(x^i - y^j)$$

には，意味（定義）を与えず，確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の関数

$$-\frac{\beta}{2}\sum_{j=1,j\neq i}^{\infty} \nabla\Psi(X_t^i(\omega) - X_t^j(\omega))$$

として，SDEのドリフト項をとらえている.

ランダム行列に関係する典型例：1次元

- 干渉ポテンシャルとして2D Coulomb potential (対数関数):

$$\Psi(x,y) = -\log|x-y|$$

- $\beta > 0$は逆温度
- $d=1$: $\beta = 1,2,4$, $\alpha > 1$

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^i - X_t^j|<r,\ j\neq i}\frac{1}{X_t^i - X_t^j}dt \qquad \text{(Dyson)}$$

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\Big\{\Big(\sum_{j\neq i,\ |X_t^j|<r}\frac{1}{X_t^i - X_t^j}\Big) - \frac{2\sqrt{r}}{\pi}\Big\}dt \qquad \text{(Airy)}$$

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\alpha}{2X_t^i}dt + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{\infty}\frac{1}{X_t^i - X_t^j}dt \qquad \text{(Bessel)}$$

- $\beta = 1 \Rightarrow$GOE, $\beta = 2 \Rightarrow$GUE, $\beta = 4 \Rightarrow$GSE
- Sine $\Rightarrow$ bulk, • Airy $\Rightarrow$ soft edge, • Bessel $\Rightarrow$ hard edge
- 普遍性/力学的普遍性が成立する.

ランダム行列に関係する典型例：2次元

- $d=2$. Ginibre干渉ブラウン運動:

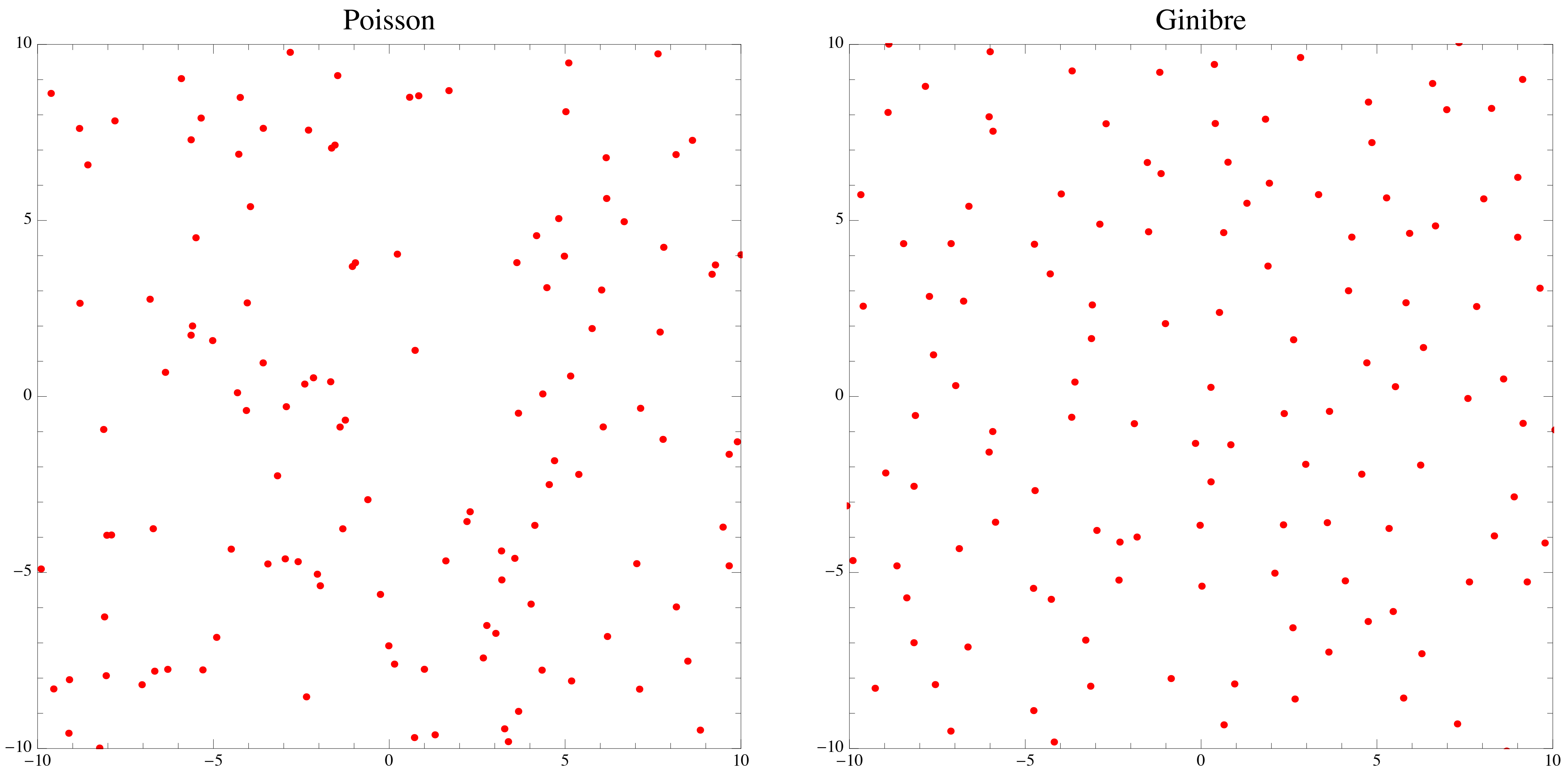
$$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i dt + \lim_{r\to\infty} \sum_{|X_t^j|<r,\ j\neq i} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \tag{Gin1}$$

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j|<r,\ j\neq i} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \tag{Gin2}$$

- 平衡分布 μ_{gin} はGinibre点過程．直感的な表示：

$$\mu_{\text{gin}}(d\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \prod_{i<j}^{\infty} |s_i - s_j|^2 d\mathbf{s}$$

- Ginibre点過程は3通りの「剛性」をもつ．
- μ_{gin}-a.s.sに対して上の二つの確率微分方程式が同じ一意的解を持つ．
- シミュレーション．


Poisson
Ginibre
10
5
0
−5
−10
−10
−5
0
5
10

配置空間と行列式測度

- $\mathbb{R}^d$上の配置空間: $S := \mathbb{R}^d$, $S_r = \{s \in S; |s| \le r\}$.

$$\mathfrak{S} = \{\mathfrak{s} = \sum_i \delta_{s_i}\,;\ \mathfrak{s}(S_r) < \infty \quad \text{for all } r \in \mathbb{N}\}$$

- $\mathfrak{S}$は，有限もしくは無限個の点測度の和からなるラドン測度の空間である.
- $\mathfrak{S}$には，漠位相を入れ，Polish 空間 (完備可分距離空間と位相同型) と見做す.
- $(\mathfrak{S}, \mathcal{B}(\mathfrak{S}))$の確率測度$\mu$を$S$の上の点過程とよぶ．対称な関数$\rho^n : S^n \to [0, \infty)$は次を満たすときラドン測度$m$に対する$\mu$の$n$-点相関関数と呼ぶ:

$$\int_{A_1^{k_1}\times\cdots\times A_m^{k_m}} \rho^n(x_1, \ldots, x_n) m(dx_1)\cdots m(dx_n) = \int_{\mathfrak{S}} \prod_{i=1}^{m} \frac{\mathfrak{s}(A_i)!}{(\mathfrak{s}(A_i) - k_i)!} d\mu.$$

但し，$A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{B}(S)$，$k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$，$k_1 + \cdots + k_m = n$.

- 点過程μが核関数$K : S \times S \to \mathbb{C}$とラドン測度$m$ に付随する行列式点過程とは，μのmに対する相関関数が次式で与えられることである.

$$\rho^n(x_1, \ldots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^{n}.$$

- Kが Hermit 対称かつ局所トレースクラス，$0 \le \mathrm{Spec}(K) \le 1$の時，行列式点過程$\mu$は一意に存在する．(白井－高橋 [98]，Soshinikov[00])

$\beta=2$の時，4つの例の平衡状態はすべて行列式測度

- 以下Lebesgue測度に対する連続核関数：($x \neq y$において)

$$K_{\mathsf{sin},2}(x-y)=\frac{\sin 2(x-y)}{\pi(x-y)} \qquad \text{(Dyson)}$$

$$K_{\mathsf{Ai},2}(x,y)=\frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y)-\mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x-y} \qquad \text{(Airy)}$$

$$K_{\mathsf{Be},\alpha,2}(x,y)=\frac{J_\alpha(\sqrt{x})\sqrt{y}J'_\alpha(\sqrt{y})-\sqrt{x}J'_\alpha(\sqrt{x})J_\alpha(\sqrt{y})}{2(x-y)} \qquad \text{(Bessel)}$$

$$K_{\mathsf{Gin}}(x,y)=\frac{1}{\pi}\exp\{-\frac{1}{2}|x|^2+x\bar{y}-\frac{1}{2}|y|^2\} \qquad \text{(Ginibre)}$$

- 無限次元確率過程$\mathbf{X}=(X^i)$をラベル力学，$\mathfrak{X}$をアンラベル力学と呼ぶ.

$$\mathfrak{X}_t=\sum_i \delta_{X_t^i}$$

- 以上の行列式測度は，それぞれのアンラベル力学の平衡分布．ラベル力学には平衡分布/不変測度が存在しない.

確率微分方程式の弱解と強解，法則の意味の一意性とパスワイズ一意性

- 確率微分方程式：　X，B は，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ で定義され，

$$X_u - X_0 = \int_0^u \sigma(X_t)dB_t + \int_0^u b(X_t)dt \tag{4}$$

$$X_0 \sim \mu \quad (X_0 = x)$$

- 弱解 (X, B) とは，連続過程 X とブラウン運動 B の組で (4) をみたすもの．
- 強解 X とは，弱解 (X, B) において，X が B の関数となっていること．

- （山田-渡辺の定式化）強解とは $\mathbb{R}^d \times W_0$ の関数 $F(x, w)$ だ．つまり $X_t = F(x, B)_t$ が，x を出発する強解となる．

- 解が一意とは弱解 (X, B) と (X', B') において X と X' の分布が一致すること．
- 解がパスワイズ一意とは，同じ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$，同じブラウン運動 B で定義され，$X_0 = X'_0 = x$ となる二つの弱解 X と X' において $X = X'$ が成立すること．

- (山田-渡辺の理論 [1971])

　　「弱解存在」＋「パスワイズ一意性」$\Rightarrow$「強解 F の存在と一意性」

- この話は，出発点 x を固定して単純化すれば，ポイントは次の fact：
「独立かつ a.s. に等しい確率変数 X と Y はある点 a に対し $X(\omega) = Y(\omega) = a$」

対称性を持つ無限次元確率微分方程式

- $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値確率過程 $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ の無限次元確率微分方程式

$$dX_t^i = \sigma(X_t^i, \mathbf{X}_t^{\diamond i})dB_t^i + b(X_t^i, \mathbf{X}_t^{\diamond i})dt \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{5}$$

ここで $\mathbf{X} = (X_t^i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値の連続過程、i 番目の粒子以外を

$$\mathbf{X}_t^{\diamond i} = (X_t^j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\{i\}}.$$

$\mathbf{B}_t = (B_t^1, \dots,)$ は $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$-値標準ブラウン運動．係数は次を満たす:

- $\sigma(x, \mathbf{y})$: $\mathbb{R}^{d^2}$ 値，$b(x, \mathbf{y})$: $\mathbb{R}^d$ 値
- $\sigma(x, \mathbf{y})$ と $b(x, \mathbf{y})$ は $i \in \mathbb{N}$ と独立.
- $\sigma(x, \mathbf{y})$ と $b(x, \mathbf{y})$ は 各 $x \in \mathbb{R}^d$ を固定するごとに $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ について対称.
- $\sigma(x, \mathbf{y})$ と $b(x, \mathbf{y})$ は $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ の部分集合で定義される.
- この講演の多くの例は

$$\sigma(x, \mathbf{y}) = E, \quad b(x, \mathbf{y}) = -\frac{\beta}{2}\sum_{j\in\mathbb{N}} \nabla_x \Psi(x, y_j). \tag{6}$$

$\Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は干渉ポテンシャル

$\beta \geq 0$ は逆温度

アンラベル力学の構成
第0理論 (1996)

- 無限粒子系の時間発展を、Dirichlet形式論を用いて拡散過程として構築する。
- 個々の粒子を区別しない、という意味でアンラベルである。

対称性を持つ無限次元確率微分方程式： 第0理論

アンラベル力学：$\mathfrak{S}$-値拡散過程 **(1996)**

- $\sigma(x,\mathbf{y})$ と $b(x,\mathbf{y})$ の $\mathbf{y}$-対称性から，σ と b を $\mathbb{R}^d\times\mathfrak{S}$ の上の関数と思う.

$$\sigma:\mathbb{R}^d\times\mathfrak{S}\to\mathbb{R}^{d^2},\ b:\mathbb{R}^d\times\mathfrak{S}\to\mathbb{R}^d$$

- 上述の $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$-値確率微分方程式は

$$dX_t^i=\sigma(X_t^i,\mathfrak{X}_t^{i\diamondsuit})dB_t^i+b(X_t^i,\mathfrak{X}_t^{i\diamondsuit})dt \quad (i\in\mathbb{N}) \tag{7}$$

ここで点 a のデルタ測度 δ_a を用いて，$\mathfrak{X}_t^{i\diamondsuit}$ を次式で定義する.

$$\mathfrak{X}_t^{i\diamondsuit}=\sum_{j\neq i}^{\infty}\delta_{X_t^j}\in\mathfrak{S}$$

- $\mathbf{X}=(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ に対応するアンラベル力学($\mathfrak{S}$-値拡散過程)$\mathfrak{X}$ は

$$\mathfrak{X}_t=\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_{X_t^i} \tag{8}$$

- $\mathfrak{X}$ を可逆にする確率測度を考える.

Poisson 点過程と (Φ,Ψ)-Gibbs meas.

- $S_r=\{x\in\mathbb{R}^d;|x|<r\}$ とおく．点過程 μ に対して

$$\mu_{r,\xi}^m(\cdot)=\mu(\pi_r\in\cdot|\mathfrak{s}(S_r)=m,\pi_r^c(\mathfrak{s})=\pi_r^c(\xi))$$

ここで $\pi_r,\pi_r^c:\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}$ は射影：$\pi_r(\mathfrak{s})=\mathfrak{s}(\cdot\cap S_r)$，$\pi_r^c(\mathfrak{s})=\mathfrak{s}(\cdot\cap S_r^c)$

- ポテンシャル関数 $\Phi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，$\Psi:(\mathbb{R}^d)^2\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ に対して

$$\mathcal{H}_r=\sum_{s_i\in S_r}\Phi(s_i)+\sum_{s_i,s_j\in S_r,i<j}\Psi(s_i,s_j)$$

- Dobrushin-Lanford-Ruelle (DLR) 方程式: μ が $\mu\circ\pi_r^c$-a.c.ξ に対して

$$\mu_{r,\xi}^m=c_{r,\xi}^m e^{-\mathcal{H}_r-\sum_{x_i\in S_r,\xi_j\in S_r^c}\Psi(x_i,\xi_j)}d\Lambda_r^m \qquad \text{(DLR)}$$

ここで $\Lambda_r^m=\Lambda_r(\cdot|\mathfrak{s}(S_r)=m)$，$\Lambda_r$ は $1_{S_r}dx$ を強度とする Poisson 点過程.

- DLR 方程式をみたす μ をカノニカル Gibbs 測度という.
- (DLR) は対数ポテンシャルには意味を持たない.

$$\Psi(x,y)=-\log|x-y|$$

定義: μ が (Φ,Ψ)-準 Gibbs 測度とは $\exists\ c_{r,\xi}^m$ がつぎをみたす：

$${c_{r,\xi}^m}^{-1}e^{-\mathcal{H}_r}d\Lambda_r^m\le\mu_{r,\xi}^m\le c_{r,\xi}^m e^{-\mathcal{H}_r}d\Lambda_r^m$$

準 Gibbs 測度の応用：アンラベル力学の構成

- $a(x,\mathfrak{s}) = \sigma(x,\mathfrak{s})\,{}^t\sigma(x,\mathfrak{s})$，$\mathfrak{S}_r^m = \{\mathfrak{s}; \mathfrak{s}(S_r) = m\}$ と置く.

(**A1**) a は一様楕円, 有界，μ は (Φ,Ψ)-準 Gibbs 測度，(Φ,Ψ) は上半連続

(**A2**) すべての $r \in \mathbb{N}$ に対し，$\sum_{i=1}^{\infty} m\mu(\mathfrak{S}_r^m) < \infty$.

- a と μ に対して Dirichlet 形式を定義する:

$$\mathcal{E}^{a,\mu}(f,g) = \int_{\mathfrak{S}} \frac{1}{2}\sum_i a(s_i,\mathfrak{s}^{i\diamondsuit})\frac{\partial \check{f}}{\partial s_i}\cdot\frac{\partial \check{g}}{\partial s_i}.$$

- $\mathfrak{s} = \sum_i \delta_{s_i}$ に対して $\mathfrak{s}^{i\diamondsuit} = \sum_{j\neq i}\delta_{s_j}$ と置く.
- $f(\mathfrak{s}) = \check{f}(s_1,s_2,\ldots,)$ for $\mathfrak{s} = \sum_i \delta_{s_i}$, 但し $\check{f}$ は対称関数
- $\mathcal{D}_\circ$: 局所的かつ滑らか.
- $\mathcal{D}_\circ^{a,\mu} = \{f \in \mathcal{D}_\circ \cap L^2(\mathfrak{S},\mu); \mathcal{E}^{a,\mu}(f,f) < \infty\}$

定理 **1** (O.'96,'98,'13). (**A1**) と (**A2**) を仮定する．このとき:

(1) $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}_\circ^{a,\mu})$ は $L^2(\mathfrak{S},\mu)$ 上，可閉となる.

(2) 閉包 $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D}^{a,\mu})$ に付随する拡散過程 $(\mathfrak{X}, \{P_{\mathfrak{s}}\}_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}})$ が存在する.

無限次元確率微分方程式による表現
第1理論 (2002–2013)

- アンラベル力学はどのようなものかそのままでは不明。
- そこで無限次元確率微分方程式で表現する。
- Ruelle クラスという標準的な干渉ポテンシャルでは、極限の確率微分方程式は有限粒子系の方程式と大差ない。
- しかし対数ポテンシャルでは、違う現象。

確率微分方程式表現 (第一理論)：ラベル力学の構成

- $\mathfrak{S}_{\mathsf{s,i}} = \{\mathfrak{s};\mathfrak{s}(\{x\}) = 0 \text{ or } 1 \quad \text{for } \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \mathfrak{s}(\mathbb{R}^d) = \infty\}$

(**A3**) 各粒子 $\{X^i\}$ は非衝突かつ無限系:

$$P_{\mu}(\mathfrak{X}_t \in \mathfrak{S}_{\mathsf{s,i}} \quad \text{for } \forall t \in [0,\infty)) = 1.$$

(**A4**) 各粒子 $\{X^i\}$ は非爆発:

$$P_{\mu}(\bigcap_{i=1}^{\infty}\{\sup_{0\le u\le t}|X_u^i| < \infty \text{ for } \forall t\}) = 1.$$

- 以上の仮定の下でアンラベルパス $\mathfrak{X}_{\mathsf{t}}$ に時刻 $t=0$ でラベル $\mathfrak{l}(\mathfrak{X}_0) = \mathbf{s}$ をつけるとずっと保存される．この対応を $\mathfrak{l}_{\mathsf{path}}$ と表す．粒子の背中のゼッケンである。

定理 2. (**A1**)–(**A4**) を仮定する．定理 *1* で構成したアンラベル力学 $\mathfrak{X}$ に対して $\mathbf{X} = \mathfrak{l}_{\mathsf{path}}(\mathfrak{X})$ によってラベル力学 $\mathbf{X}$ を構成できる.

m-ラベル力学のカップリング

- ρ^m は μ の m 点相関関数,
- $\mu_{\mathbf{x}}$ は $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)\in(\mathbb{R}^d)^m$ で条件づけられた縮約 Palm 測度：

$$\mu_{\mathbf{x}}(d\mathfrak{s})=\mu(d\mathfrak{s}-\sum_{i=1}^{m}\delta_{x_i}|\,\mathfrak{s}(x_i)\geq 1 \text{ for all } i).$$

- μ の m-Campbell 測度:

$$\mu^{[m]}(d\mathbf{x}d\mathfrak{s})=\rho^m(\mathbf{x})d\mathbf{x}\mu_{\mathbf{x}}(d\mathfrak{s}).$$

- $\mu^{[m]}$ に対して m-ラベル力学に対する定理 1 の類似が成立する.
- $\mu^{[m]}$ に対応する $(\mathbb{R}^d)^m\times\mathfrak{S}$ の上の Dirichlet 空間を $\Xi^{[m]}(\mu)$ と置く.

定理 3 (O.'10). (**A1**)–(**A4**) を仮定する.
この時，$\Xi^{[m]}(\mu)$ に付随する $\mathbf{X}^{[m]}$ は次を満たす.

$$\mathbf{X}^{[m]}=(X^1,\ldots,X^m,\sum_{i=m+1}^{\infty}\delta_{X^i})\quad \textit{in distribution.}$$

ここで右辺の X^i は定理 *2* のラベル力学 $\mathbf{X}=(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ の各成分である.
つまり右辺はアンラベル力学 $\mathfrak{X}=\sum_i\delta_{X^i}$ の関数.

定義 1. d^{μ} が μ の対数微分とはすべての $f \in C_0(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}_{\circ}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathfrak{S}} \mathsf{d}^{\mu} f d\mu^{[1]} = - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathfrak{S}} \nabla_x f d\mu^{[1]}. \tag{9}$$

- 例 : The Dyson Brownian motion ($\beta = 2$).

$$\mathsf{d}^{\mu}(x, \mathfrak{s}) = 2 \lim_{r \to \infty} \sum_{|s_j| < r}^{\infty} \frac{1}{x - s_j}.$$

(**A5**) μ は対数微分 d^{μ} をもち，次の方程式をみたす.

$$2b(x, \mathfrak{s}) = \nabla_x a(x, \mathfrak{s}) + a(x, \mathfrak{s}) \mathsf{d}^{\mu}(x, \mathfrak{s}).$$

定理 4 (O.'12)**.** (**A1**)–(**A5**) を仮定する.
このとき与えられたラベル $\mathfrak{l}$ に対して確率微分方程式

$$dX_t^i = \sigma(X_t^i, \mathfrak{X}_t^{i\diamondsuit}) dB_t^i + b(X_t^i, \mathfrak{X}_t^{i\diamondsuit}) dt \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{10}$$

は $\mu^{\mathfrak{l}}$-*a.s.* s の出発点に対して弱解 $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ をもつ.

定理 4の証明のアイデア

- 無限次元確率微分方程式(10)を解く鍵は定理 3である．

$$dX_t^i = \sigma(X_t^i, \mathfrak{X}_t^{\diamondsuit i})dB_t^i + b(X_t^i, \mathfrak{X}_t^{\diamondsuit i})dt \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{10}$$

- 座標関数x_iはDirichlet形式$\Xi^{[m]}$ $(i \le m)$の定義域に局所的に入る．
- そこで$x_1, \ldots, x_m$対して伊藤の公式（福島分解とRevue対応）を使えば，これら$X_t^1, \ldots, X_t^m$が確率微分方程式(10)を満たすことが分かる．
- 定理 3で示したカップリングの存在から，mまでではなく，すべての$i \in \mathbb{N}$で(10)が解けたことになる．

- 大きな無限次元

$$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$$

を考える代わりに，小さな無限次元の列を考える．

$$\mathfrak{S},\ (\mathbb{R}^d)^1 \times \mathfrak{S},\ (\mathbb{R}^d)^2 \times \mathfrak{S},\ (\mathbb{R}^d)^3 \times \mathfrak{S},\ (\mathbb{R}^d)^4 \times \mathfrak{S},\ (\mathbb{R}^d)^5 \times \mathfrak{S},\ \cdots$$

- $\mathfrak{S}$の上のアンラベル拡散過程$\mathfrak{X}$によって，$(\mathbb{R}^d)^m \times \mathfrak{S}$の上の拡散過程$(\mathbf{X}^m, \mathfrak{X}^{m*})$カップリングを構成する．Dirichlet空間の列が，鍵である．

$$(\mathcal{E}^{[m]}, L^2(\mu^{[m]})) \text{ on } (\mathbb{R}^d)^m \times \mathfrak{S}$$

- $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$にはDirichlet空間がないが，それをこれで代用する．

パスワイズ一意性と強解 (with 種村)

第２理論 (2011–)

- 確率微分方程式の解の一意性
- 強解の存在
- Dirichlet形式に付随した確率微分方程式の解は、無論、一意
- しかし、Dirichlet形式の一意性が非自明。
- 一意性には多くの応用

確率微分方程式の強解の存在とパスワイズ一意性：第２理論

- $(\mathbf{X},\mathbf{B})$ を先述の無限次元確率微分方程式 (5) の弱解とする.

$$dX_t^i = \sigma(X_t^i, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit i})dB_t^i + b(X_t^i, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit i})dt \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{5}$$

- $(\mathbf{X},\mathbf{B})$ をもちいて，$(\mathbb{R}^d)^m$-値確率微分方程式の族を構成する.
- 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{Y}^m = (Y^{m,i})_{i=1}^m$ についての方程式:

$$\begin{aligned} dY_t^{m,i} &= \sigma(Y_t^{m,i}, (\mathbf{Y}_t^{m,i\diamondsuit}, \mathbf{X}_t^{m*}))dB_t^i + b(Y_t^{m,i}, (\mathbf{Y}_t^{m,i\diamondsuit}, \mathbf{X}_t^{m*}))dt \\ \mathbf{Y}_0^m &= \mathbf{s}^m. \end{aligned} \tag{11}$$

- $\mathbf{s} = (s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に対して $\mathbf{s}^m = (s_1, \ldots, s_m)$.

$$\mathbf{Y}^{m,i\diamondsuit} = (Y^{m,j})_{j\neq i}^m, \quad \mathbf{X}^{m*} = (X^k)_{k=m+1}^{\infty}.$$

- $\mathbf{X}$ は確率微分方程式 (11) の係数の一部.
- (11) はランダム環境 $\mathbf{X}$ をもつ dm 次元の確率微分方程式になる.

確率微分方程式の強解の存在とパスワイズ一意性：第２理論

- $\mathbf{X}$ の振る舞いが良ければ，有限次元確率微分方程式 (11) の解 $\mathbf{Y}^m$ は，各 m に対してパスワイズ一意．故に、山田-渡辺理論から弱解 $\mathbf{X}^m$ が強解になり

$$\mathbf{Y}^m = \mathbf{X}^m \tag{12}$$

- $\mathbf{Y}^m$ は $(\mathbf{B}^m, \mathbf{X}^{m*})$ と初期条件 $\mathbf{s}^m$ の関数なので

$$\mathbf{Y}^m = \mathbf{Y}^m(\mathbf{s}^m, \mathbf{B}^m, \mathbf{X}^{m*}) = \mathbf{Y}^m(\mathbf{s}, \mathbf{B}, \mathbf{X}^{m*})$$

とあらわす．$\mathbf{Y}^m$ は $\sigma[\mathbf{s}, \mathbf{B}, \mathbf{X}^{m*}]$ 可測である．

- (12) から極限 $\lim_{m\to\infty} \mathbf{Y}^m$ が自明に存在する．つまり次式が成立する．

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{Y}^m(\mathbf{s}, \mathbf{B}, \mathbf{X}^{m*}) = \mathbf{X}. \tag{13}$$

- ラベルパス空間のラベルについての末尾 σ 加法族 $\mathcal{T}_{\mathsf{path}}((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}})$ を

$$\mathcal{T}_{\mathsf{path}}((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma[\mathbf{X}^{m*}]$$

で定義する．すると，(13) から $\mathbf{X}$ は，

$$\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}) \times \mathcal{B}(W((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}})) \times \mathcal{T}_{\mathsf{path}}((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}})$$

の「完備化」に対して可測である．

確率微分方程式の強解の存在とパスワイズ一意性：第２理論

- P : $(\mathbf{X},\mathbf{B})$ の分布
- $P_{\mathbf{s},\mathbf{B}}=P(\,\cdot\,|(\mathbf{s},\mathbf{B}))$: P を $\mathbf{s}$ と $\mathbf{B}$ について条件付けた条件付き確率
- P_{Br}^{∞}: $\mathbf{B}$ の分布
- $\Upsilon=(\mu\circ\mathfrak{l}^{-1})\times P_{\mathsf{Br}}^{\infty}$.

(**P1**) 無限次元確率微分方程式 (5) が $\mu\circ\mathfrak{l}^{-1}$-a.s. $\mathbf{s}$ に対して解 $(\mathbf{X},\mathbf{B})$ をもつ.
(**P2**) 各 $m\in\mathbb{N}$ に対して，(11) の弱解はパスワイズ一意.
(**P3**) Υ-a.s. $(\mathbf{s},\mathbf{B})$ に対して，$P_{\mathbf{s},\mathbf{B}}|_{\mathcal{T}_{\mathsf{path}}((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}})}$ は自明かつ一意.

定理 **5** (O.-種村). (**P1**)–(**P3**) を仮定する．すると，無限次元確率微分方程式

$$dX_t^i=\sigma(X_t^i,\mathbf{X}_t^{\diamondsuit i})dB_t^i+b(X_t^i,\mathbf{X}_t^{\diamondsuit i})dt\quad(i\in\mathbb{N})\tag{5}$$

は，$\mu\circ\mathfrak{l}^{-1}$-*a.s.* $\mathbf{s}$ に対して強解が存在し，パスワイズに一意である.
更に，任意の弱解は一意的な強解と一致する.

(P3)の十分条件:

$\mathcal{T}(\mathfrak{S}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} \sigma[\pi_r^c]$ を $\mathbb{R}^d$ の配置空間 $\mathfrak{S}$ の末尾 σ 加法族とする.

($\mathbf{Q1}$) μ の末尾 σ 加法族 $\mathcal{T}(\mathfrak{S})$ は自明.
($\mathbf{Q2}$) $P_\mu \circ \mathfrak{X}_t^{-1} \prec \mu$ for all t. (絶対連続条件).
($\mathbf{Q3}$) $P_\mu(\cap_{r=1}^{\infty}\{\mathfrak{m}_r(\mathfrak{X}) < \infty\}) = 1$, (no big jump 条件)
但し, $\mathfrak{m}_r = \inf\{m \in \mathbb{N}; X^i \in C([0,T]; S_r^c)$ for $m < \forall i \in \mathbb{N}\}$.

定理 6 (O.-種村). (P1)–(P2),(Q1)–(Q3)⇒(P3).

- 行列式点過程は($\mathbf{Q1}$)を満たす.
- 準Gibbs測度は, 常に末尾自明な測度に分解できる. その上で, 定理 5を適用.
- アンラベル力学 $\mathfrak{X}$ が μ-可逆なので, ($\mathbf{Q2}$)は自明.
- ($\mathbf{Q3}$)は可逆性とLyons-Zheng分解から従う.

- アイデアをまとめる:
  一つの無限次元確率微分方程式は，無限個の有限次元確率微分方程式だ.
- 元の方程式を，$\mathbf{X}_t^{\diamondsuit i} = (X_t^j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\{i\}}$ を用いて、展開した形で書くと，

$$
\begin{aligned}
dX_t^1 &= \sigma(X_t^1, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 1})dB_t^1 + b(X_t^1, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 1})dt,\\
dX_t^2 &= \sigma(X_t^2, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 2})dB_t^2 + b(X_t^2, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 2})dt,\\
dX_t^3 &= \sigma(X_t^3, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 3})dB_t^3 + b(X_t^3, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 3})dt,\\
dX_t^4 &= \sigma(X_t^4, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 4})dB_t^4 + b(X_t^4, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 4})dt,\\
dX_t^5 &= \sigma(X_t^5, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 5})dB_t^5 + b(X_t^5, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 5})dt,\\
dX_t^6 &= \sigma(X_t^6, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 6})dB_t^6 + b(X_t^6, \mathbf{X}_t^{\diamondsuit 6})dt,\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

- 本来 $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ の上の方程式の解析をしたい.
  しかし，Lebesgue 測度すら $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ にはない.
- $\mathbf{Y}^m = (Y^{m,i})_{i=1}^m$ に対して $\mathbf{Y}^{m,\diamondsuit i} = (Y^{m,j})_{1\le j\le m,\, j\ne i}$,
- $\mathbf{X} = (X^i)_{i=1}^\infty$ に対して $\mathbf{X}^{m*} = (X^i)_{i=m+1}^\infty$ とおく。

$$\sigma^{m,i}(\mathbf{Y}^m, \mathbf{X}^{m*})_t := \sigma(Y_t^{m,i}, (\mathbf{Y}_t^{m,\diamondsuit i}, \mathbf{X}_t^{m*})).$$

IFC: 両立性を持つ無限個の有限次元方程式/弱解 $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ を用いた、新しい方程式の列

For $m = 1$

$$dY_t^{1,1} = \sigma^{1,1}(\mathbf{Y}^1, \mathbf{X}^{1*})_t dB_t^1 + b^{1,1}(\mathbf{Y}^1, \mathbf{X}^{1*})_t dt. \qquad (m = 1)$$

For $m = 2$

$$\begin{aligned} dY_t^{2,1} &= \sigma^{2,1}(\mathbf{Y}^2, \mathbf{X}^{2*})_t dB_t^1 + b^{2,1}(\mathbf{Y}^2, \mathbf{X}^{2*})_t dt \\ dY_t^{2,2} &= \sigma^{2,2}(\mathbf{Y}^2, \mathbf{X}^{2*})_t dB_t^2 + b^{2,2}(\mathbf{Y}^2, \mathbf{X}^{2*})_t dt. \end{aligned} \qquad (m = 2)$$

For $m = 3$

$$\begin{aligned} dY_t^{3,1} &= \sigma^{3,1}(\mathbf{Y}^3, \mathbf{X}^{3*})_t dB_t^1 + b^{3,1}(\mathbf{Y}^3, \mathbf{X}^{3*})_t dt \\ dY_t^{3,2} &= \sigma^{3,2}(\mathbf{Y}^3, \mathbf{X}^{3*})_t dB_t^2 + b^{3,2}(\mathbf{Y}^3, \mathbf{X}^{3*})_t dt \\ dY_t^{3,3} &= \sigma^{3,3}(\mathbf{Y}^3, \mathbf{X}^{3*})_t dB_t^3 + b^{3,3}(\mathbf{Y}^3, \mathbf{X}^{3*})_t dt. \end{aligned} \qquad (m = 3)$$

For $m = 4$

$$\begin{aligned} dY_t^{4,1} &= \sigma^{4,1}(\mathbf{Y}^4, \mathbf{X}^{4*})_t dB_t^1 + b^{4,1}(\mathbf{Y}^4, \mathbf{X}^{4*})_t dt \\ dY_t^{4,2} &= \sigma^{4,2}(\mathbf{Y}^4, \mathbf{X}^{4*})_t dB_t^2 + b^{4,2}(\mathbf{Y}^4, \mathbf{X}^{4*})_t dt \\ dY_t^{4,3} &= \sigma^{4,3}(\mathbf{Y}^4, \mathbf{X}^{4*})_t dB_t^3 + b^{4,3}(\mathbf{Y}^4, \mathbf{X}^{4*})_t dt \\ dY_t^{4,4} &= \sigma^{4,4}(\mathbf{Y}^4, \mathbf{X}^{4*})_t dB_t^4 + b^{4,4}(\mathbf{Y}^4, \mathbf{X}^{4*})_t dt. \end{aligned} \qquad (m = 4)$$

拡張可能性

- $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$での古典的確率解析を展開.
- 確率微分方程式（山田-渡辺理論）
- Dirichlet形式論（測度のない空間のDirichlet形式）
- Dirchlet形式の一意性と非一意性 (in progress)

–古典確率解析の諸問題は無限粒子系に移行できる(スローガン)–

- 今後可能性のある展開
- 非平衡解の構成，解の出発点に関する「滑らかさ」
- Stochastic flowの構成：$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$の対称な部分空間の微分同相写像
- 確率力学のエルゴード性，空間のエルゴード分解

- 他の確率力学のクラス（干渉ブラウン運動を超えて）
- $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$のJump過程 (非局所Dirichlet形式)–江崎さん，種村さん
- 格子気体：$(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$の確率力学
- ブラウン運動$\Rightarrow$分数ブラウン運動.（非マルコフな確率力学）

ランダム行列の力学的普遍性 (with 河本)

- ランダム行列の極限として得られる点過程の普遍性(Yau, Tao その他多数)
- 点過程から自然に決まる確率力学の普遍性
- 典型例の計算：SDE ギャップ
- 力学的普遍性に関する一般論
- 例：Airy 干渉ブラウン運動、Ginibre 干渉ブラウン運動

ランダム行列と干渉ブラウン運動

- GUE(ガウス型ランダム行列) $M^N = [m_{ij}]_{i,j=1}^N$ とは，Hermit対称からくる制約を除いて独立同分布なガウス確率変数を成分に持つランダム行列．
- 分散と平均を標準的に選べば M^N の固有値の分布は

$$m_2^N(dx_N) = \frac{1}{Z}\{\prod_{i<j}^N |x_i - x_j|^2\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N |x_k|^2\right\} dx_N, \qquad (14)$$

- $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度全体の空間を $\mathcal{P}$ とおく．$m_2^N(dx_N)$ の下で $\mathcal{P}$ 値確率変数

$$\mathbb{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i/\sqrt{N}}$$

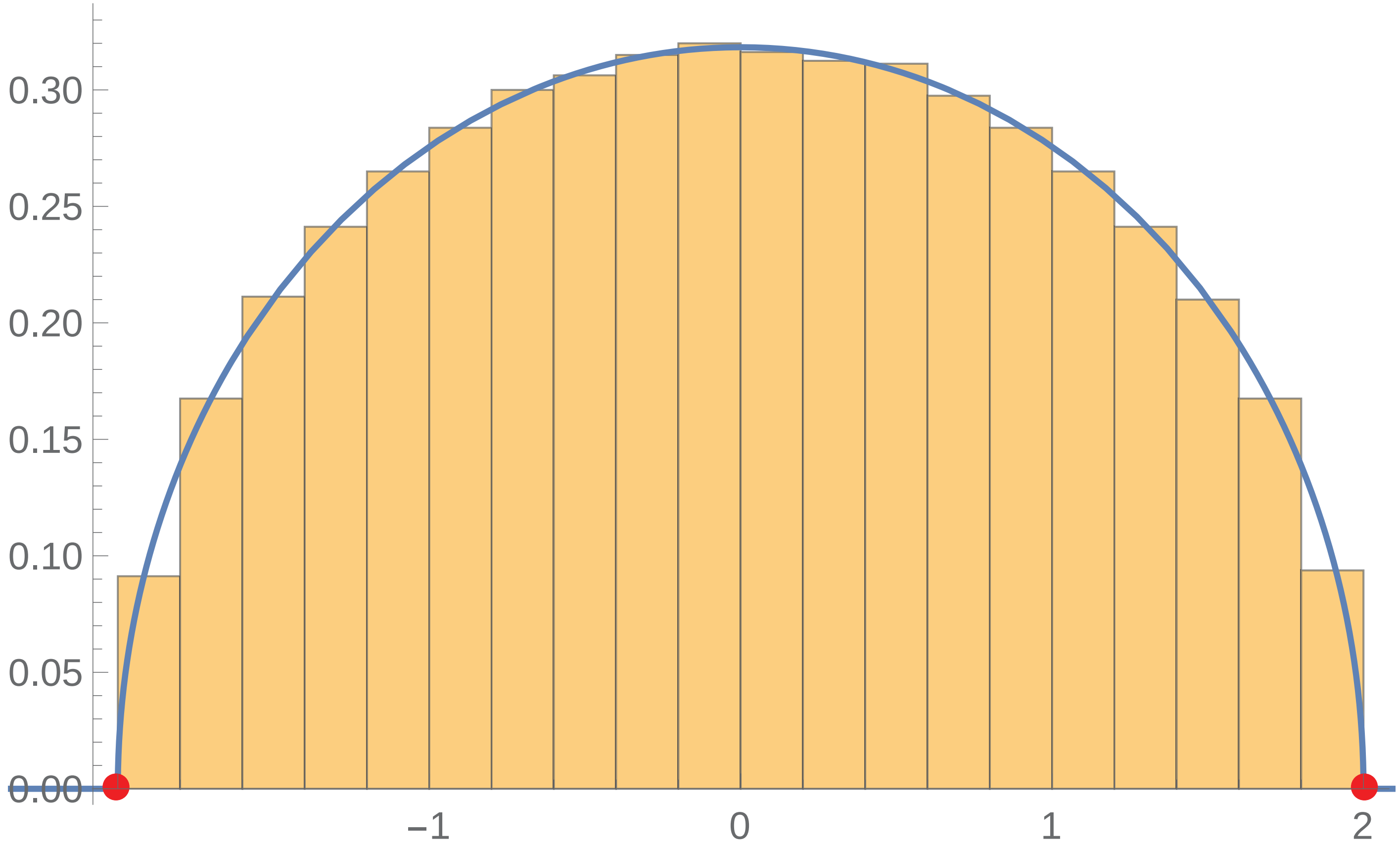
を考え，μ_2^N をその分布とする．定義から μ_2^N は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度全体の空間 $\mathcal{P}$ の上の確率測度である．$\mathcal{P}$ の元 $\sigma_{\mathrm{semi}}(x)dx$ を

$$\sigma_{\mathrm{semi}}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{4 - x^2}\mathbf{1}_{(-2,2)}(x) \qquad (15)$$

で定義する．$\sigma_{\mathrm{semi}}(x)dx$ は形から半円分布と呼ばれる．Wignerの半円法則とは，$\{\mu_2^N\}$ がノンランダムな測度 $\delta_{\sigma_{\mathrm{semi}}(x)dx}$ に弱収束することを主張する．

ランダム行列と干渉ブラウン運動

半円分布 $\sigma_{\mathrm{semi}}(x)dx$ を考察した $\mathbb{R}$ の各点をマクロな位置とよぶ．各マクロな位置 $\theta \in \mathbb{R}$ において意味のある極限があるように，適切に (16) をリスケールする．これは $|\theta| < 2$ と $\theta = \pm 2$ の場合に可能で前者を Bulk，後者を Soft Edge の位置と呼ぶことにする．



GUE の固有値分布（N=4000）と Wigner の半円分布

Bulk 極限と (小さな) 普遍性

- Bulk の位置 $\{|\theta| < 2\}$ のスケーリングを Bulk 極限という．このとき (14) を

$$x_i \mapsto \frac{s_i + \theta N}{\sqrt{N}}$$

とスケーリングする．すると $m_2^N(d\mathbf{s}_N)$ の分布は

$$\widetilde{m}_2^N(d\mathbf{s}_N) = \frac{1}{Z}\{\prod_{i<j}^{N} |s_i - s_j|^2\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} |\frac{s_i + \theta N}{\sqrt{N}}|^2\right\} d\mathbf{s}_N. \qquad (16)$$

対応する配置空間 $\mathfrak{S}$ の分布を $\mu_{2,\theta}^N$ と表すと，極限 $\mu_{2,\theta}$ は核関数

$$K_\theta(x,y) = \frac{\sin\{\sqrt{4-\theta^2}(x-y)\}}{\pi(x-y)}.$$

をもつ $\mathrm{Sine}_{2,\theta}$ 点過程になる．つまり，

$$\lim_{N\to\infty} \mu_{2,\theta}^N = \mu_{2,\theta} \qquad \text{(相関関数のコンパクト一様収束)}.$$

- 収束先がすべて同じ (定数倍密度は違うが) 点過程，という意味で小さな普遍性が成立する．

Bulk 極限と (小さな) 力学的普遍性

- N 粒子系 $\mathbf{X}^N = (X^{N,i})_{i=1}^N$ の確率微分方程式は (16) から部分積分をして与えられる.

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{1}{N} X_t^{N,i} dt - \theta dt.$$

この確率微分方程式で N を形式的に飛ばした極限は

$$dX_t^{\infty,i} = dB_t^i + \sum_{j\neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^{\infty,i} - X_t^{\infty,j}} dt - \theta dt.$$

この方程式は $\theta = 0$ 以外では正しい極限を与えない．実際，極限は常に

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j| < r,\ j\neq i} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt. \tag{17}$$

定理 **7** (河本-O.'18). アンラベル粒子の初期分布を $\mu_{2,\theta}^N$ で与え，初期のラベルを適切に設定すると，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{X}^N = (X^{N,i})_{i=1}^N$ の最初の m 個は $C([0,\infty);\mathbb{R}^m)$ に於いて，(17) の解の最初の m 個に弱収束する.

Soft Edge極限，Airy干渉ブラウン運動

- 半円分布の両端点$\theta = \pm 2$でのスケーリングをSoft Edge極限という．この時，

$$x \longmapsto 2\sqrt{N} + \frac{s}{N^{1/6}}. \tag{18}$$

- $\mu^N_{\mathrm{Ai},2}$の$N \to \infty$の極限は，$\mu_{\mathrm{Ai},2}$となる．N粒子系の分布$\mu^N_{\mathrm{Ai},2}(d\mathbf{s})$は，

$$\mu^N_{\mathrm{Ai},2}(d\mathbf{s}_N) = \frac{1}{Z}\{\prod_{i<j}^{N} |s_i - s_j|^2\} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} |2\sqrt{N} + \frac{s_k}{N^{1/6}}|^2 \right\} d\mathbf{s}_N.$$

- N粒子系$\mathbf{X}^N = (X^{N,i}_t)_{i=1}^N$ が満たす確率微分方程式は

$$dX^{N,i}_t = dB^i_t + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \frac{1}{X^{N,i}_t - X^{N,j}_t} dt - \left\{ N^{1/3} + \frac{1}{2N^{1/3}} X^{N,i}_t \right\} dt.$$

- 係数は$-N^{1/3}dt$という発散項を含む．しかし解$\mathbf{X}^N$は(19)の解に収束する．

$$dX^i_t = dB^i_t + \frac{\beta}{2} \lim_{r\to\infty} \left\{ \left(\sum_{j\neq i,\ |X^j_t|<r} \frac{1}{X^i_t - X^j_t} \right) - \frac{2\sqrt{r}}{\pi} \right\} dt. \tag{19}$$

- $N^{1/3}$がきっちりキャンセルする理由は，$\mu_{\mathrm{Ai},2}$や$\mu^N_{\mathrm{Ai},2}$の「剛性」である．

ランダム行列/クーロンガスの普遍性(sine, Airy, Bessel, Ginibre 点過程)

- ランダム行列の成分の分布を，ガウス分布から，一般化する.
- モーメントの条件だけで，固有値からなる点過程の極限の点過程を導出する.
- Taoのグループ

- クーロンガス（対数ガス）の普遍性
- H-T.Yauのグループ. V に対して、

$$\mu^N = \frac{1}{\mathcal{Z}} \prod_{j<j}^{N} |s_i - s_j|^{\beta} e^{-\sum_k^N V_N(s_k)} d\mathbf{s}. \qquad (20)$$

- Tao, Yauの結果は非常に一般的.
- しかし，収束の意味は，相関関数の「弱収束」

- 他にも多くの研究.

- 相関関数の「強収束」を示した結果がある.

ランダム行列/クーロンガスの力学的普遍性

- $(\mathcal{E}^{\mu,\mathrm{lwr}}, \mathcal{D}^{\mu,\mathrm{lwr}})$ を$\{s \in \mathbb{R}^d; |s| \le R\}$で反斜壁境界条件を課したDirichlet形式の単調増大極限とする．$(\mathcal{E}^{\mu,\mathrm{lwr}}, \mathcal{D}^{\mu,\mathrm{lwr}})$ は$(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu})$の拡張となっており$\mu$に対して自然に定義される．一般に

$$\mathcal{E}^{\mu,\mathrm{lwr}}(f,f) \le \mathcal{E}^{\mu}(f,f), \quad \mathcal{D}^{\mu,\mathrm{lwr}} \supset \mathcal{D}^{\mu}$$

そこで次の命題を考える．

$$(\mathcal{E}^{\mu,\mathrm{lwr}}, \mathcal{D}^{\mu,\mathrm{lwr}}) = (\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}^{\mu}). \tag{21}$$

定理 **8** (河本-O.-種村 [18+])．
無限次元確率微分方程式の解が一意ならば，(21) が成立．

定理 **9** (河本-O.)．μ^Nの相関関数がμの相関関数に局所一様収束し，かつ，極限の相関関数の零点の*capacity*がゼロとする．さらに，(21) を仮定する．
　このときN粒子系の確率力学は極限の確率力学にパス空間で弱収束する．

予想： Tao や H-T.Yau たちの結果は、強収束まで精密化できる。
特に対応する確率力学が極限に収束する。

Ginibre干渉ブラウン運動の普遍性 (Akemannの「強非エルミット」モデル)

- $\gamma \geq 0$, $K_p \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0,1)$ に対し N 次正規行列の空間 $\mathcal{J}(N)$ 上の確率測度

$$\sigma(J) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\Big\{ -\frac{N}{1-\tau^2} \mathrm{Tr}(JJ^* - \frac{\tau}{2}(J^2 + J^{*2})) - \gamma(\mathrm{Tr}JJ^* - NK_p)^2 \Big\}$$

を考える．この時，固有値の分布密度は次の関数の定数倍となる．

$$\prod_{i<j}^{N} |z_i - z_j|^2 \times \exp\Big\{ -\frac{N}{1-\tau^2}\Big(\sum_{i=1}^{N} |z_i|^2 - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{N} (z_i^2 + \bar{z}_i{}^2) \Big) - \gamma\Big(\sum_{i=1}^{N} |z_i|^2 - NK_p \Big)^2 \Big\}$$

c_1, c_2, $c_3 > 0$ は K_p, γ, τ に依存する定数,

$$E = \{z \in \mathbb{C}; c_1(\Re z)^2 + c_2(\Im z)^2 < 1\}$$

補題 **11** (Akemann et al). $\zeta \in E$, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \rho_N^1(\zeta) = \frac{c_3}{\pi} 1_E(\zeta),$$

$$\frac{1}{(c_3 N)^k} \rho_N^k\Big(\zeta + \frac{z_1}{\sqrt{c_3 N}}, \dots, \zeta + \frac{z_k}{\sqrt{c_3 N}} \Big) = \rho_{\mathrm{gin}}^k(z_1, \dots, z_k) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{N}} \Big).$$

Ginibre干渉ブラウン運動の普遍性 (Akemannの「強非エルミット」モデル)

- N 粒子系の確率微分方程式を計算すると，$(i=1,\dots,N)$ に対して

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{1}{2}\Big\{\Big(\sum_{j\neq i}^{N} \frac{2(X_t^{N,i}-X_t^{N,j})}{|X_t^{N,i}-X_t^{N,j}|^2}\Big) - \frac{\tau N}{1-\tau^2}\Big(\zeta + \frac{X_t^{N,i}}{\sqrt{c_3 N}}\Big)\frac{1}{\sqrt{c_3 N}}$$
$$+ \frac{\tau N}{1-\tau^2}\Big(\zeta + \frac{X_t^{N,i}}{\sqrt{c_3 N}}\Big)^{\dagger}\frac{1}{\sqrt{c_3 N}}$$
$$- \Big(\zeta + \frac{X_t^{N,i}}{\sqrt{c_3 N}}\Big)\frac{2\gamma}{\sqrt{c_3 N}}\Big\{\sum_{k=1}^{N}\Big|\zeta + \frac{X_t^{N,k}}{\sqrt{c_3 N}}\Big|^2 - NK_p\Big\}dt.$$

ここで $(x,y)^{\dagger} = (y,-x) \in \mathbb{R}^2$.

定理 12 (河本-O.)**.**
上の解は，$N\to\infty$ で *Ginibre*干渉ブラウン運動 (23) に収束する.

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j|<r, j\neq i} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}dt \quad (i\in\mathbb{N}). \tag{23}$$

- このように有限系は複雑だが，極限は簡明かつ普遍的である.

もう少し例を

GinibreとGAFと渦の方程式

GinibreとGAFと渦の方程式

- GAF (Gaussian analytic function) 平面GAFというガウス確率変数を係数に持つ解析関数Fを考える.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{k!}} z^k.$$

ここで$\{\xi_k\}$は独立同分布，ξ_kの分布は$\frac{1}{\pi}e^{-|z|^2}dz$である.

μ_{GAF}をFの零点からなる$\mathbb{C}$の点過程とする．μ_{GAF}は，平行移動不変かつ回転不変で，Ginibre点過程に大変よく似ているが，より剛性が高いことが知られている．実際，$S_r = \{|x| \le r\}$の外側を条件つけると，中の粒子の平均がランダムでなくなる．μ_{GAF}は準Gibbs測度ではないが，第一理論を拡張することで，Dirichlet形式の可閉性がいえ，拡散過程を構成できる．しかし，μ_{GAF}の「対数微分」は存在は言えるが,「よい表現」はない．少なくとも，2体の干渉ポテンシャルで簡単に記述できるようなものにはならないと思われる.

ランダムな解析関数は様々な状況で考えられるから，それからその零点や極として構成した点過程は興味深いと思われる.

Acta Math., 194 (2005), 1-35,
Y. Peres and B. Virag
Zeros of the i.i.d. Gaussian power series:
a conformally invariant determinantal process

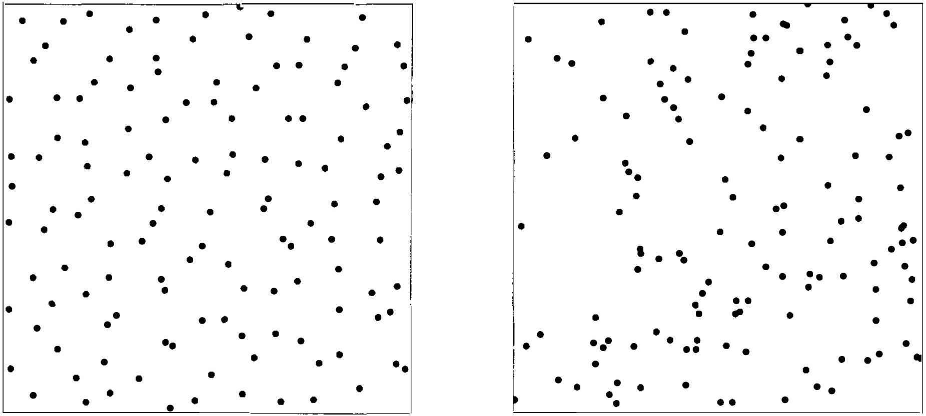


Fig. 1. The translation-invariant root process and a Poisson point process with the same intensity on the plane.

Ginibre と GAF と渦の方程式

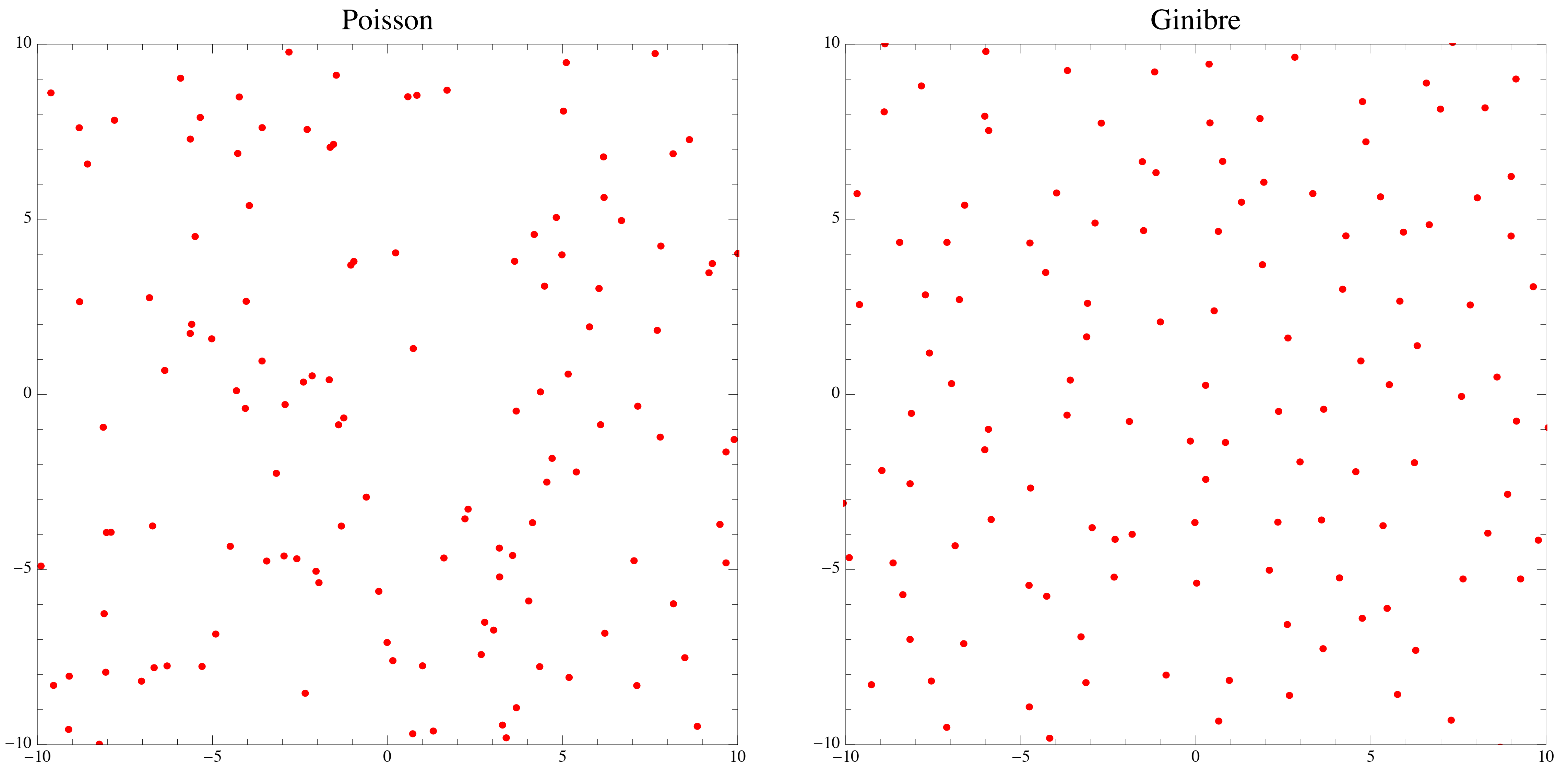
- 渦の方程式最後にまだ解けていない無限次元確率微分方程式を紹介する．粘性のある平面に無限個の渦が運動しているとする．Ginibre に合わせるため，すべて同じ強さの同じ向きの渦とする．$\mathbf{X}_t = (X_t^i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ と書く．定数 (粘性と渦度) を適当に選べば，

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j\neq i}^{\infty} \frac{(X_t^i - X_t^j)^\dagger}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j\neq i}^{\infty} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

「†」以外は Ginibre 干渉ブラウン運動と同じである．しかし背後にある幾何学は非常に異なり，また，力学的にも，これは歪対称な運動を記述する．

- 渦の個数が有限個の場合は，たとえどんな種類の渦度を持つ場合でも，対応する熱方程式を解くことで拡散過程を構成し，さらにそれを用いて確率微分方程式を解ける．これには一般化された発散形式を用いるのだが，実は，学生時代に研究した懐かしい話です．



Poisson
Ginibre
10
5
0
−5
−10
−10
−5
0
5
10

END