群測度 VON NEUMANN 環の分類 —作用素環と非可換調和解析—

小沢 登高（おざわ なるたか）
東京大学大学院数理科学研究科

2009 年 3 月

1. はじめに

私は最近, **von Neumann 環の分類**を中心に研究をしている. 離散群やその確率空間への保測作用から, von Neumann 環を作ることができるが, できた von Neumann 環がいつ同型になるかはよく分かっていない. これを見分けようというのが, 群測度 von Neumann 環の分類問題である. 一般的にいって, ある原料から製品を作る方法が知られているときに, 製品がどの程度原料や製造工程に依存するかを考えるのは自然なことであろう. 例えばワインに興味がある人であれば, ワインを味わうときには, 原料となったブドウの種類や生産者を知ろうとするのではないか. しかし von Neumann 環の分類は, ワイルドな問題であって, そもそも完全に分類することは「原理的に不可能」だとされている. それでも出来る限り見分けてみようというのが研究の目的である. ちなみに群測度 von Neumann 環の分類は, それ自体が目標であって, 分類結果がほかの事に役立つことは基本的にない. それでもそこで使われる技術や道具にはエルゴード理論や記述集合論などの他分野における応用がいくつかあることを後で述べる. 講演ではもっぱら群測度 von Neumann 環の分類について述べるつもりだが, この予稿では作用素環という分野の紹介も兼ねて, （離散）群に関連する作用素環の話題を C^* 環論からも一つ選んで書くことにする.

2. 群論に対する解析的アプローチ

群は離散であってもなくてもよいのだが, 簡単のため離散とする. 群論に対する（関数）解析的アプローチとは, 端的にいえば, 群 Γ, あるいはその複素群環 $\mathbb{C}\Gamma$ に関する問題に, $\mathbb{C}\Gamma$ を適当な位相で完備化した位相環 (Banach 環) 内において, 解析的テクニックを援用して取り組むことである. 位相の存在により, 代数学的・幾何学的な問題に対しても解析的アプローチが有効に使えるのである. 位相環の例として, 絶対総和可能列のなす Banach 環 $\ell_1\Gamma$ が最も簡単ではあるが, より良い性質を持つ例に $\mathbb{C}\Gamma$ を Hilbert 空間 $\ell_2\Gamma$ 上の畳み込み作用素として表現（正則表現という）して得られる**作用素環**がある. 作用素環には $\mathbf{C^*}$ **環**と **von Neumann 環**の２種類あり, 目的・用途によって使い分けられる. そもそも作用素環とは Hilbert 空間（大抵は複素係数, 可分無限次元のものを考える）の上の有界線形作用素のなす代数のことである. 通常, 複素数の共役にあたる $*$-演算で閉じていることのほかに, しかるべき位相で閉じていることを要請する. その位相として作用素ノ

ルム位相（Hilbert 空間の単位球上一様収束）を考えたものが C* 環であり, 強収束位相（各点収束位相）を考えたものが von Neumann 環である.

正則表現. Γ を離散群とし, $\mathbb{C}\Gamma$ をその複素群環とする. $\mathbb{C}\Gamma$ は Γ 上の複素関数 f で台 $\mathrm{supp}\, f$ が有限なものからなり, 畳み込みと $*$-演算により $*$-代数となる:

$$(f * g)(t) = \sum_{s\in\Gamma} f(s)g(s^{-1}t), \qquad f^*(t) = \bar{f}(t^{-1}).$$

$\{\delta_t : t \in \Gamma\}$ を $\mathbb{C}\Gamma$ の標準基底とするとき（$\delta_t(t) = 1$, $\delta_t(s) = 0$ for $s \neq t$）, 上の式はそれぞれ

$$\delta_s * \delta_t = \delta_{st}, \qquad\qquad (\alpha\delta_t)^* = \bar{\alpha}\delta_{t^{-1}}$$

となる. 複素群環 $\mathbb{C}\Gamma$ の自分自身に対する左掛け算作用（**左正則表現**）を λ で表すことにする: $\lambda(f)g = f * g$. さらに, 単位元 e における値をはかることにより, 複素群環 $\mathbb{C}\Gamma$ 上の跡 τ を定義する: $\tau(f) = f(e)$. これで群の三要素, 積・逆元・単位元が有効利用できたことになる. 基底の上でチェックすれば容易に分かるように, 線形汎関数 τ は跡の性質 $\tau(f * g) = \tau(g * f)$ を満たす.

複素群環 $\mathbb{C}\Gamma$ 上に ℓ_2-norm を

$$\|f\|_2 = \tau(f^* * f)^{1/2} = \Big(\sum_{t\in\Gamma} |f(t)|^2\Big)^{1/2}$$

で定義し, その完備化として得られる 2 乗総和可能列のなす Hilbert 空間を $\ell_2\Gamma$ と書くことにする. $\{\delta_t : t \in \Gamma\}$ は $\ell_2\Gamma$ の標準正規直交基底となる. 以後, 左正則表現 λ を群環 $\mathbb{C}\Gamma$ の, $\ell_2\Gamma$ 上の有界線形作用素による $*$-表現とみなすことにする. （この表現は $\lambda(f)^* = \lambda(f^*)$ を満たす. ）群 Γ に制限すると, $\lambda_s = \lambda(\delta_s)$ は $\ell_2\Gamma$ 上に左平行移動のユニタリ作用素として作用している. こちらも群 Γ の左正則表現という. Hilbert 空間 $\ell_2\Gamma$ 上の有界線形作用素全体のなす C* 環を $\mathbb{B}(\ell_2\Gamma)$ と書くことにする. $*$-部分代数 $\lambda(\mathbb{C}\Gamma) \subset \mathbb{B}(\ell_2\Gamma)$ の作用素ノルムによる閉包を $C^*_\lambda\Gamma$ と書き, **既約群 C* 環**と呼ぶ. 作用素の強収束位相（各点収束位相）による閉包を $L\Gamma$ と書き, **群 von Neumann 環**と呼ぶ. von Neumann の定理によれば,

$$L\Gamma = \{\lambda(f) : f \in \ell_2\Gamma,\ \|\lambda(f)\| < \infty\}$$

である. （ℓ_2 を ℓ_p に置き換えたときも, この類似は（ほとんどの群に対して）正しいと予想されている. 反例は知られていない.）

可換群の場合. $\Gamma = \mathbb{Z}$ のときを考える. Fourier 変換により $\ell_2\mathbb{Z} \cong L^2(\mathbb{T}, \mu)$ である. このユニタリ同型のもと $\ell_2\mathbb{Z}$ 上の畳み込み作用素 $\lambda(f)$ は三角多項式 $\widehat{f}$ による掛け算作用素になる. 従って, 既約群 C* 環 $C^*_\lambda\mathbb{Z}$ は連続関数環 $C(\mathbb{T})$ と同型, 跡 τ は Lebesgue 測度 μ による積分, 群 von Neumann 環 $L\mathbb{Z}$ は L^∞ 関数環 $L^\infty(\mathbb{T}, \mu)$ と同型となる. 一般の可換離散群 Γ に対しても, Fourier 変換により

$$\ell_2\Gamma \cong L^2(\widehat{\Gamma}, \mu), \quad C^*_\lambda\Gamma \cong C(\widehat{\Gamma}), \quad L\Gamma \cong L^\infty(\widehat{\Gamma}, \mu), \quad \tau(\lambda(f)) = \int_{\widehat{\Gamma}} \widehat{f}\, d\mu$$

となる. ここで, $\widehat{\Gamma}$ は Γ の Pontrjagin 双対であり, μ はコンパクト群 $\widehat{\Gamma}$ 上の Haar 測度である. より一般に単位元を持つ可換 C* 環 A は, Gelfand の双対定理によ

り, コンパクト空間 $\widehat{A}$ 上の連続関数環 $C(\widehat{A})$ と同型で, 任意の A から B への $*$-準同型写像は $\widehat{B}$ から $\widehat{A}$ への連続写像により与えられる. つまり, 単位元を持つ可換 C* 環の研究はコンパクト位相空間の研究と同値であるといえる. 一方, 可換 von Neumann 環は適当な測度空間 (Ω, μ) 上の L^∞ 関数環と同型になる. 適当な可分性の仮定のもと, 測度空間は原子の数で完全に分類されることが知られている. 特に, Γ が可算無限可換離散群ならば, $(\widehat{\Gamma}, \mu) \cong ([0,1], \mathrm{Lebesgue})$ であり, $L^\infty(\widehat{\Gamma}, \mu)$ はすべて同型となる. このような背景から, C* 環論は**非可換位相空間論**, von Neumann 環論は**非可換測度論**とも呼ばれる. こうした思想の延長上に Connes の**非可換幾何学**([Co]) が存在するのである. （もっとも, これは単なる対外的スローガンであって, 普通の作用素環研究者には可換作用素環論の非可換化を研究しているという意識はない. むしろまったく新しい現象を研究しているのである. これは一般の群論研究者が可換群論の非可換化を研究しているのではないということと同様である. しかし, このアナロジーがまったく無効かというとそうでもなく, 特に K 理論などの (コ) ホモロジー理論においては重要な役割を果たすことも多い. ）

従順性. 可換群の群作用素環についてはもう全て分かったことにして（可換群自体の研究は作用素環論の枠組みの中ですることでない）, 次に扱いやすい群のクラスを考えることにする. それが**従順群**のクラスである. （離散）群 Γ が従順であるとは, 有界数列のなす Banach 空間 $\ell_\infty\Gamma$ 上に, 平行移動不変な正値汎関数で 0 でないものが存在するときをいう. これは, 群 Γ 上の関数に対して「平均」がとれることを意味し, Γ の勝手なコンパクト凸集合への作用が固定点を持つことと同値である. この定式化のもと, 角谷不動点定理は可換群が従順であることを意味していることになる. 従順性は群の解析的取り扱いにおいて最もに重要な概念であり, 多くの場合, 群が従順なら良い振る舞いをし, 非従順なら著しく悪い振る舞いをするという dichotomy が成り立つ. 従順群のクラスは, 有限群や可換群をすべて含み, さらに部分群, 商群, 拡大, 増大和などの操作に閉じている. とくに可解群はすべて従順である. 従順群のクラスには他にも数え切れないほど多くの特徴付けが存在するが, ここではもうひとつ述べるにとどめる. 群 Γ が従順であることとは, Γ 上の台が有限な半正定値関数の列で 1 に各点収束するものが存在することと同値である. これは, $\Gamma = \mathbb{Z}$ のときは, Fourier 解析における Fejér の定理を意味する. 実際, ξ_n を $\mathbb{T}$ 上の Fejér 核とすると, $\mathbb{Z}$ 上の関数 $\hat{\xi}_n(k) = (1 - k/n) \vee 0$ は正定値であって 1 に各点収束する. Fejér の定理が調和解析において果たす役割を考えれば, 従順性が**非可換調和解析**において果たす役割の重要性が分かると思う.

従順でない群の例の筆頭として非可換自由群 $\mathbb{F}_r$ が挙げられる. 自由群は次のような**病的分解**を持つ: $\mathbb{F}_2$ を a, b で生成される階数 2 の自由群とし,

$$\begin{aligned} A_+ &= \{a \text{ から始まる既約語全体 }\}, \\ A_- &= \{a^{-1} \text{ から始まる既約語全体 }\}, \\ B_+ &= \{b \text{ から始まる既約語全体 }\} \setminus \{b, b^2, \cdots\}, \\ B_- &= \{b^{-1} \text{ から始まる既約語全体 }\} \cup \{e, b, b^2, \cdots\} \end{aligned}$$

とおくと,

$$\mathbb{F}_2 = A_+ \sqcup A_- \sqcup B_+ \sqcup B_-$$

$$
\begin{aligned}
&= A_+ \sqcup a \cdot A_- \\
&= B_+ \sqcup b \cdot B_-
\end{aligned}
$$

を満たす．もし $\ell^\infty(\mathbb{F}_2)$ 上に左平行移動不変な正値汎関数 m があれば, 上の病的分解を考えることにより,

$$m(\mathbf{1}) = m(\chi_{A_+} + \chi_{A_-} + \chi_{B_+} + \chi_{B_-}) = m(\chi_{A_+ \sqcup a \cdot A_-} + \chi_{B_+ \sqcup b \cdot B_-}) = 2m(\mathbf{1})$$

となり, $m = 0$ でなければならない．群 $\mathbb{F}_2$ を球面回転群 $SO(3) \cong S^2$ に埋め込み, 上の左剰余類分解を考えれば, 病的分解は有名な Banach–Tarski の逆理となる（実際は, $SO(3)$ の S^2 への作用が自由ではないのでその分を補正する必要がある (参照 [Wi])）．実際, 従順性の概念は Banach–Tarski の逆理を説明するために von Neumann が考え出したものである．非可換自由群 $\mathbb{F}_r$ を部分群として含む群はすべて非従順であるが, 非従順群のなかには捩れ群など, 自由群を部分群として含まないものもある．

強 Novikov 予想と Baum–Connes 予想. 唐突であるが, M を滑らかな閉多様体, D を M 上の楕円型偏微分作用素とする．このとき Fredholm 指数 $\operatorname{Ind} D$ が考えられるが, より多くの情報を捉える「指数」として次のようなものを考えることができる．準同型写像 $\pi_1(M) \to \Gamma$ をひとつ固定し (例えば $\Gamma = \pi_1(M)$), $C^*_{\mathrm{r}}\Gamma$-ベクトル束 $\mathcal{E} = \widetilde{M} \times_{\pi_1(M)} C^*_{\mathrm{r}}\Gamma \to M$ を考える．楕円型偏微分作用素 D は $\mathcal{E}$ の切断の間の作用素 D_Γ に持ち上がり, $\ker D_\Gamma$ と $\operatorname{coker} D_\Gamma$ は $C^*_{\mathrm{r}}\Gamma$-加群となる．適当な処理を施すと, これらはともに有限生成かつ射影的となるので, **Γ-指数**

$$\operatorname{Ind}_\Gamma D = [\ker D_\Gamma] - [\operatorname{coker} D_\Gamma] \in K_0(C^*_{\mathrm{r}}\Gamma)$$

を定義することができる (Mishchenko, Kasparov)．実は, C^* 環としていわゆる全群 C^* 環 $C^*\Gamma$ を取る方が一般的であるが, ここではその差異は無視することにする．Γ として単位群 1 を取ったものが, 通常の Fredholm 指数 $\operatorname{Ind} D$ である．($K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ であることに注意.) また, $\operatorname{Ind}_\Gamma D$ の跡を取ることでも, $\operatorname{Ind} D$ を得ることができる．C^* 環の K 理論は, ホモトピー不変性などの良い性質を持つものの, 大抵の場合, 計算が困難である．Γ-指数 $\operatorname{Ind}_\Gamma D$ が良い性質を持つことの証左として以下の二定理が挙げられる．

定理 (Kasparov 1983)**.** 向き付け可能な閉多様体上の符号作用素 D の Γ-指数 $\operatorname{Ind}_\Gamma D$ は, 向き付けられたホモトピーに対して不変である．

定理 (Rosenberg 1983)**.** 閉スピン多様体が正のスカラー曲率計量を持てば, その多様体上の Dirac 作用素の Γ-指数 $\operatorname{Ind}_\Gamma D$ は 0 である．

一般に Γ-指数が 0 でないことを判定するのはとても難しい．もし判定できなかったり, 常に 0 になるというのであれば上の定理は無意味ということになるが, そうでないことを保証するのが**強 Novikov 予想**である．$E\Gamma \to B\Gamma$ を群 Γ の分類空間とその普遍被覆空間とする．ここで, $B\Gamma$ はコンパクトであると仮定する．このとき, $\mathcal{E} = E\Gamma \times_\Gamma C^*_{\mathrm{r}}\Gamma$ とおくと, $\mathcal{E}$ は $B\Gamma$ 上の $C^*_{\mathrm{r}}\Gamma$-ベクトル束であって, $[\mathcal{E}] \in K_0(C(B\Gamma, C^*_{\mathrm{r}}\Gamma))$ を定める．この $[\mathcal{E}]$ を掛けることによって得られる準同型写像 $\mu\colon K_\bullet(B\Gamma) \to K_\bullet(C^*_{\mathrm{r}}\Gamma)$ は組み立て写像と呼ばれる．この μ が有理的に単射であることを主張するのが強 Novikov 予想である．さらに適当な意味で (例

えば Γ が捩れのない群のとき) μ が同型写像であることを主張するのが **Baum–Connes 予想**である．強 Novikov 予想が正しければ, 次の Novikov 予想が従う: $[D] \in K_n(B\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$ は向き付けられたホモトピーに対して不変である．強 Novikov 予想の帰結には他にも, 安定的 Gromov–Lawson–Rosenberg 予想などの重要な予想がいくつか存在する．一方 Baum–Connes 予想からは, Γ が捩れのない群のとき複素群環 $\mathbb{C}\Gamma$ は非自明な巾等元を持たないという Kaplansky 予想などが従う．Baum–Connes 予想には係数付き Baum–Connes 予想という強いバージョンがあり, これについては反例が知られている（とされる）が, Baum–Connes 予想そのものや強 Novikov 予想に対する反例は知られていない．

Baum–Connes 予想は長いこと夢のような話だと思われてきたが, 90 年代後半に Higson–Kasparov([HK]) によるブレイクスルーがあり, **すべての従順群に対して成り立つ**ことが証明された．実は従順**亜群**についても亜群に対する Baum–Connes 予想が成り立つ．従順群の概念を一般化したものに**完全群**(exact group) というものがある．完全群は従順亜群に埋め込めるので, 強 Novikov 予想が成り立つ．幾何学への応用は, 大抵, 強 Novikov 予想で足りるので, どのような群が完全であるかを調べることは重要なことである．

完全群, 粗い距離空間. 私は完全群の特徴付けを発見することにより, 有名な群の多くが完全であること, しかし完全でない群も存在する（らしい）ことなどを示した ([Oz1, Gr2]). その後も与えられた群の完全性を適当な部分群の完全性に帰着する手法を開発したりと, 完全群の研究を続けている．特に, 樹木や性質の良い双曲グラフなどに作用する群の完全性は, 固定化群の完全性に帰着できることが分かった．いろいろな人の研究によって現在では, 従順群, 自由群, 線形群 ([GHW]), 相対的双曲群 ([Oz4]), 写像類群 ([Ki1]) などはすべて完全であることが分かっている．

完全群は距離空間としても特徴付けられる．群 Γ が有限生成なら, 生成系 S に関する語長 ℓ_S を $\ell_S(x) = \min\{n : x \in (S \cup S^{-1})^n\}$ で定義する．このとき $d_S(x,y) = \ell_S(xy^{-1})$ は右不変な距離となる．一般に, 勝手な右不変距離 d で任意の有界集合が有限集合となるようなものを考える．このような条件を満たす距離 d と d' は次の意味で同値である: $d(x_n,y_n) \to \infty \Leftrightarrow d'(x_n,y_n) \to \infty$. 従って, 各群 Γ に対して, 距離空間 (Γ, d) の同値類がただひとつ定まる．Gromov([Gr1]) はこのような距離空間の同値類を**粗い距離空間**と名付け, その研究を推進した．上記の同値条件は名前の通り非常に粗いと思われるかもしれないが, 実は完全性を含め群 Γ のいろいろな性質が粗い距離空間 (Γ, d) に反映されるのである．粗い距離空間に対する指数理論 (作用素環を利用する) や, 粗い幾何学も存在して, 興味深い発展を遂げている ([Roe]). こうした視点に立った私の最近の結果として, 群 $\Gamma = \langle S \rangle$ が双曲的ならば, 半群 $\phi_t(x) = e^{-t\ell_S(x)}$ に対して, 核 $\left[\phi_t(xy^{-1})\right]_{x,y\in\Gamma}$ が $\mathbb{B}(\ell_2\Gamma)$ 上の Schur 乗数作用素として一様有界になる, 特に既約群 C* 環 $C^*_\lambda\Gamma$, あるいは群 von Neumann 環 $L\Gamma$ に制限すれば, 乗数作用素 $\lambda(f) \mapsto \lambda(\phi_t f)$ が一様有界であるというものがある ([Oz5]). この半群は双曲群上の非可換調和解析において Fejér 核の代わりとなるもので, この定理は双曲群は従順ではないもののそれに準じる良い性質を持つことを意味している．ここで扱ったような群の解析的有限近似については, 著書 [BO] にまとめてある．

3. 群測度 von Neumann 環

本予稿のメイントピックである**群測度 von Neumann 環**について述べる．この分野は, エルゴード理論における軌道同値関係の理論 ([KM]) や, 集合論における分類理論・記述集合論 ([Hj]), それに**測度論的群論**([Ga, Sh, Fu2]) と最近名付けられた分野と密接な関係を持ち, 主に UCLA の S. Popa の大活躍 ([Po2]) のおかげで急速な発展を遂げている．

可算離散群 Γ の標準的確率空間 (X, μ) への保測作用 $\Gamma \curvearrowright X$ を考える．確率空間 (X, μ) は各点の測度が 0 であるとする．このとき, ゆるい可分性の仮定（「標準的」と呼ばれる）のもと, (X, μ) は測度空間として $([0, 1], \mathrm{Lebesgue})$ に同型となる．以下, 群作用といったらこのようなもののみを考え, いちいち可測性について注意しないことにしよう．群作用 $\Gamma \curvearrowright X$ は自然に X の上に**軌道同値関係**$\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$ を引き起こす.

$$\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X} = \{(sx, x) : x \in X,\ s \in \Gamma\} \subset X \times X.$$

群作用 $\Gamma \curvearrowright X$ と $\Lambda \curvearrowright Y$ が**軌道同型**であるとは, 引き起こされる軌道同値関係が同型なときをいう．つまり, 保測本質的全単射 $F \colon X \to Y$ で

$$(x, y) \in \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X} \iff (F(x), F(y)) \in \mathcal{R}_{\Lambda \curvearrowright Y}$$

となるものがあるときをいう．「本質的」とは X や Y の零集合を無視してもよいことを意味する．零集合を無視しないより厳しい軌道同型は Borel 軌道同型と呼ばれる．確率空間 X 上の軌道同値関係（あるいはもっと一般の同値関係）$\mathcal{R}$ から, Krieger 構成法によって, 軌道同値関係 von Neumann 環 $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$ というものが作られる．これは関数環 $L^\infty(X)$ を, **Cartan 部分環**と呼ばれる, 特別な位置に含んでおり, 軌道同値関係 $\mathcal{R}$ から von Neumann 環のペア $L^\infty(X) \subset \mathrm{vN}(\mathcal{R})$ への対応は一対一となっている ([FM])．つまり, von Neumann 環 $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$ において, 抽象的に与えられた Cartan 部分環を $L^\infty(X)$ と同定することは, von Neumann 環 $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$ から軌道同値関係 $\mathcal{R}$ の情報を復元することに等しい．群作用 $\Gamma \curvearrowright X$ が本質的に自由[1]であるときは, 上記構成法は Murray–von Neumann による群測度 von Neumann 環の構成法に一致する．今後, 群 Γ の情報が軌道同型 $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$ によく反映されることを期待して, 群作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の本質的自由性を仮定する．以上のことを図にまとめると以下のようになる.

$$\boxed{\text{群作用}\quad \Gamma \curvearrowright X} \rightsquigarrow \boxed{\text{軌道同型}\quad \begin{array}{c}\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X} \\ L^\infty(X) \subset \mathrm{vN}(\mathcal{R})\end{array}} \rightsquigarrow \boxed{\text{von Neumann 環}\quad \mathrm{vN}(\mathcal{R})}$$

$$\boxed{\text{群}\quad \Gamma} \rightsquigarrow \boxed{\text{von Neumann 環}\quad L\Gamma}$$

どのような状況において, von Neumann 環 $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$ から軌道同値関係 $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$ の情報が, あるいは軌道同値関係 $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$ から群作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の情報が, どれくらい

[1]単位元でない任意の $s \in \Gamma$ に対して $\mu(\{x : sx = x\}) = 0$ が成り立つ

取り出せるか？というのがこの分野の研究主題である．特に, von Neumann 環 $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$ が群 Γ と作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の情報を完全に覚えているような, **von Neumann 超剛的**と呼ばれる例を探すのが課題である．群作用を考えずに, 群 von Neumann 環 $L\Gamma$ からどれくらい群 Γ の情報を取り出せるか？というのもある．例えば, 同値関係や von Neumann 環にも従順性の概念があり（超有限や漸近的有限次元とも呼ばれる）, (1) 群 Γ が従順であること, (2) 同値関係 $\mathcal{R}_{\Gamma\curvearrowright X}$ が従順であること, (3) von Neumann 環 $L\Gamma$, もしくは $\mathrm{vN}(\mathcal{R}_{\Gamma\curvearrowright X})$ が従順であること, の三条件は同値であることが知られている ([HT, Sa])．より著しく, Connes の Fields 賞受賞定理 (1976) によれば, **従順な von Neumann 環は（modulo 中心で）すべて同型**というものがある．von Neumann 環は中心に関して直積分分解できるので, 大抵の場合, 中心は trivial としてよい．中心が trivial な von Neumann 環を**因子環**[2]という．この定理のエルゴード理論版は, （エルゴード的で）**従順な軌道同値関係 $\mathcal{R}_{\Gamma\curvearrowright X}$ はすべて同型**, さらに従順因子環の Cartan 部分環は唯一, というものになる ([OW, CFW])．つまり, 群 Γ が従順な場合, 群 von Neumann 環 $L\Gamma$ や群測度 von Neumann 環 $\mathrm{vN}(\mathcal{R}_{\Gamma\curvearrowright X})$ は, 群 Γ が従順であったということ以外ほとんど何も覚えていないということになる．従順群は可解群すべてを含むそれなりに大きなクラスであるが, それをまったく見分けられないというのであれば von Neumann 環はたいした情報を持っていないのではないかと思うかもしれない．しかし非従順な世界ではまったく事情が異なるということが最近分かってきた．

群 von Neumann 環. Connes の定理により従順な群因子環はすべて同型だが, von Neumann 環論における**最大の問題**は, 自由群 $\mathbb{F}_r$ の群因子環 $L\mathbb{F}_r$ の同型類が $r = 2, 3, \ldots$ に依存するか？というものである．Voiculescu はこの問題を解くために自由確率論を創ったが, 未だに決定的な結果は得られていない．（例えば, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ が可算無限従順群のとき, 自由積群因子環 $L(\Gamma_1 * \cdots * \Gamma_n)$ は自由群因子環 $L\mathbb{F}_n$ に同型であるというようなことが分かった.）私は, 自由群をより一般的にした双曲的群因子環の研究に幾何学的群論と C^* 環論を使うことで, 部分環 $B \subset L\mathbb{F}_r$ が有限次元直和成分を持たなければ, $L\mathbb{F}_r$ における B の相対的可換子環 $\{x \in L\mathbb{F}_r : [x, B] = 0\}$ が従順になることを示した ([Oz2])．これは特に, $L\mathbb{F}_r$ の非従順部分環は非自明なテンソル積に分解しないことを意味する．von Neumann 環の研究に C^* 環論が本質的に使われたのはこれが初めてである．さらに, Popa との共同研究で双曲的群因子環のテンソル積が本質的に一意なテンソル積分解を持つことも分かった ([OP1])．また, 群の自由積における Kurosh の定理の類似として, （弱い仮定のもと）非従順テンソル積因子環 $M_1, \ldots, M_n$ の自由積 $M_1 * \cdots * M_n$ からもとの因子環 M_i と n を復元できることを示した ([Oz3])．これは自由群因子環の同型問題に洞察を与えるものである．ここでは触れていない多くの研究者の努力の結果, 最近では従順性が絡まない限り群 von Neumann 環は基本的に非同型なのではないかという雰囲気になってきた．しかしながら, $L\Gamma$ から Γ を復元できるような**超剛的な**例, つまり $\forall\Lambda\ (L\Gamma \cong L\Lambda \Rightarrow \Gamma \cong \Lambda)$ が成り立つような群 Γ の例はまだ知られていない．Zimmer の超剛性定理に触発された Connes 予想によれば, $\mathrm{SL}(n \geq 3, \mathbb{Z})$ などの高階格子はみなそうだとされるが, 現時点では証明の手がかりすらない状況である．

[2]現在の設定で出てくる因子環は有限な跡が定義できるので, 分類上, II_1 型因子環と呼ばれる．

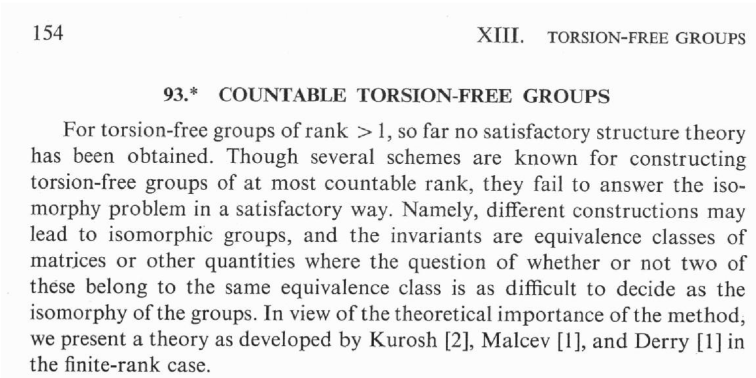
軌道同値関係. ここで少し脱線をして, 零集合を無視しない Borel 軌道同値関係の一結果に触れることにしよう．この理論は主に記述集合論における**分類理論**で取り扱われる．分類理論とは分類問題そのものを研究対象にする理論, あるいは各種の**分類問題を分類する**理論のことである．事の起こりは, 捩れのない階数 1 の可換群を分類した Baer の定理 (1937) まで遡る．有限生成可換群の分類定理は誰もが知る重要な定理である．有限生成の次の目標は, 捩れのない有限階数[3]の可換群の分類ということになろう．可換群 A の階数 1 のとき, すなわち $A \hookrightarrow \mathbb{Q}$ のとき, 任意の $x \in A$ に対してその特性関数 $h_x \colon \{\text{素数}\} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を

$$h_x(p) = \sup\{n \in \mathbb{N} : A \text{ において, } x \text{ は } p^n \text{ で割り切れる}\}$$

と定義する．0 でない $x, y \in A$ に対して, h_x と h_y は次の意味で同値であることが容易に分かる: $\sum_p |h_x(p) - h_y(p)| < \infty$. Baer の定理はこの逆が正しいこと, h_x の同値類が捩れのない階数 1 の可換群に対する完全不変量であることを主張する．すなわち A, B がともに捩れのない階数 1 の可換群で, $0 \neq x \in A$, $0 \neq y \in B$ であるとき, $A \cong B \Leftrightarrow h_x \sim h_y$. Baer の定理はすぐに高階数の場合にまで拡張されたが, 得られた不変量は数列の代わりに行列の列となり, 不変量間の同値関係は極めて複雑なものとなってしまった．つまり, 不変量が同値かどうかを判定するのが, もとの群が同型かどうかを判定するのと同程度に難しくなってしまったのである（左参照）．それ以降も決定的な成果はなく, 階数 2 以上の可換群を満足のいく形で**分類することは不可能なのではないか**と思われた．実際に, 適当な意味で, それが不可能であることが分類理論の枠内で証明される．捩れのない階数 n の可換群は $\mathbb{Q}^n$ の部分群に同型なので, べき集合 $2^{\mathbb{Q}^n}$ の点と見なせる．このとき, 捩れのない階数 n の可換群の集合 $R(n)$ は, べき集合 $2^{\mathbb{Q}^n}$ の積位相で閉じているので, コンパクト距離空間になる．この枠組みのもと, 不変量とは「計算可能な」関数

$$F \colon R(n) \to (\text{不変量の空間 with 同値関係 } \sim)$$

で, $A \cong B \Rightarrow F(A) \sim F(B)$ となるもののことである．$A \cong B \Leftrightarrow F(A) \sim F(B)$ ならば完全不変量といえる．ここで「計算可能な」という条件がなければ, 選択公理により単なる濃度の比較となってしまう．これより「計算可能な」関数は「構成可能な」関数, つまり Borel 写像を意味することにする．この設定で, 階数 2 以上の可換群に対するまともな不変量が存在しないことを主張するのが Thomas の定理 ([Th]) である．証明のアイディアは, $(R(n), \cong)$ が軌道同値関係であること


154 XIII. TORSION-FREE GROUPS

93.* COUNTABLE TORSION-FREE GROUPS

For torsion-free groups of rank > 1, so far no satisfactory structure theory has been obtained. Though several schemes are known for constructing torsion-free groups of at most countable rank, they fail to answer the isomorphy problem in a satisfactory way. Namely, different constructions may lead to isomorphic groups, and the invariants are equivalence classes of matrices or other quantities where the question of whether or not two of these belong to the same equivalence class is as difficult to decide as the isomorphy of the groups. In view of the theoretical importance of the method, we present a theory as developed by Kurosh [2], Malcev [1], and Derry [1] in the finite-rank case.

L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups* vol. II (1973)

[3]可換群の階数は $\mathbb{Z}$ 上線形独立な元の最大個数に等しい: $\mathrm{rank}(A) \leq n \Leftrightarrow A \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$.

（$A \cong B \Leftrightarrow \exists g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ s.t. $g(A) = B$）及び, $R(n)$ 上に $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$-不変測度がたくさん存在することの 2 つを利用して, Lie 群の保測作用に対する Zimmer の**超剛性定理**を適用することにある. 大雑把にまとめると, 可換群の分類が階数 1 では可能なのに, 階数 2 以上では不可能であるのは, 軌道同値関係を与える群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ が $n = 1$ では従順だが, $n \geq 2$ ではそうでないからである.

測度論的な話に戻ると, 従順な場合と正反対にいくつかの場合では, **軌道同型超剛性**が成り立つことが最近になって分かってきた. つまりいくつかの例においては, 軌道同値関係 $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$ から群 Γ 及び群作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の情報を完全に復元することが可能である ([Fu1, Po1, Ki2, OP3]). また, von Neumann 環を研究する過程で最近得られた道具・結果のいくつかはエルゴード理論や記述集合論における主要な問題を解決するの役立っているが, これは驚くべきことといえる.

群測度 von Neumann 環. 私は Popa との共同研究 ([OP2, OP3]) で, 抽象的な Cartan 部分環を取り扱う手法を開発し, いくつかの非従順な群測度因子環 $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$ も唯一の Cartan 部分環を持つことを示した. すなわち, 群測度因子環 $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$ から軌道同値関係 $\mathcal{R}$ の情報を完全に復元できる例をいくつか見つけた. 残念ながら現在のところでは, これらの例と軌道同型超剛的な例の間に共通部分がない. 従って, von Neumamm 超剛的な例, つまり群測度因子環 $\mathrm{vN}(\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X})$ が群 Γ と作用 $\Gamma \curvearrowright X$ を完全に覚えているような例を見つけるのは今後の課題である.

4. 最後に

作用素環の世界において非従順な対象はワイルドで完全な分類は原理的に不可能である. 世の数学者には, 分類リストのような整然としたものを好む人と, ごちゃごちゃした多様性を好む人がいると思うが, 私は間違いなく後者である. 実際, 私が興味をもっている分野は Banach 空間論, 離散群論, 作用素環論と, どれも変な例がいくらでもある[4]（と信じられている）分野である. 最後に, この予稿では私の研究対象である非従順な作用素環に焦点を当てたが, 実は作用素環研究者の大半は（非従順）群作用素環とは関係なく, 従順で分類可能と目される作用素環・部分環, あるいはその上の群作用（の分類）を研究しているということを注意しておく.

References

[BO] N. Brown and N. Ozawa, *C*-algebras and Finite-Dimensional Approximations.* Graduate Studies in Mathematics, 88. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Co] A. Connes, *Noncommutative geometry.* Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.

[CFW] A. Connes, J. Feldman and B. Weiss, An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. *Ergodic Theory Dynamical Systems* **1** (1981), 431–450 (1982).

[FM] J. Feldman and C. C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **234** (1977), 289–359.

[Fu1] A. Furman, Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices. *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1059–1081.

[Fu2] A. Furman, A survey of Measured Group Theory. Preprint. arXiv:0901.0678

[4]Gromov の「原理」によれば, すべての離散群について成り立つ命題は trivial か間違いであるということになっている.

[Ga] D. Gaboriau, On orbit equivalence of measure preserving actions. *Rigidity in dynamics and geometry* (Cambridge, 2000), 167–186, Springer, Berlin, 2002.

[Gr1] M. Gromov, Asymptotic invariants for infinite groups. *Geometric Group Theory*, vol. 2, 1–295, G. Niblo and M. Roller, eds., Cambridge University Press, 1993.

[Gr2] M. Gromov, Random walk in random groups. *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), 73–146.

[GHW] E. Guentner, N. Higson and S. Weinberger, The Novikov conjecture for linear groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* No. **101** (2005), 243–268.

[HT] J. Hakeda and J. Tomiyama, On some extension properties of von Neumann algebras. *Tôhoku Math. J. (2)* **19** (1967) 315–323.

[HK] N. Higson and G. Kasparov, E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. *Invent. Math.* **144** (2001), 23–74.

[Hj] G. Hjorth, *Classification and orbit equivalence relations.* Mathematical Surveys and Monographs, 75. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[KM] A. S. Kechris and B. D. Miller, *Topics in orbit equivalence.* Lecture Notes in Mathematics, 1852. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Ki1] Y. Kida, *The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory.* Mem. Amer. Math. Soc. **196** (2008), no. 916.

[Ki2] Y. Kida, *Measure equivalence rigidity of the mapping class group. Ann. of Math. (2)*, to appear.

[OW] D. S. Ornstein and B. Weiss, Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma. *Bull. Amer. Math. Soc.* **2** (1980), 161–164.

[Oz1] N. Ozawa, Amenable actions and exactness for discrete groups. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), 691–695.

[Oz2] N. Ozawa, Solid von Neumann algebras. *Acta Math.* **192** (2004), 111–117.

[Oz3] N. Ozawa, A Kurosh type theorem for type II_1 factors. *Int. Math. Res. Not.*, Volume 2006, Article ID97560.

[Oz4] N. Ozawa, Boundary amenability of relatively hyperbolic groups. *Topology Appl.*, **153** (2006), 2624–2630.

[Oz5] N. Ozawa, Weak amenability of hyperbolic groups. *Groups Geom. Dyn.* **2** (2008), 271–280.

[OP1] N. Ozawa and S. Popa, Some prime factorization results for type II_1 factors. *Invent. Math.*, **156** (2004), 223–234.

[OP2] N. Ozawa and S. Popa, On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra. *Ann. of Math. (2)*, to appear.

[OP3] N. Ozawa and S. Popa, On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra II. Preprint. arXiv:0807.4270

[Po1] S. Popa, Cocycle and orbit equivalence superrigidity for malleable actions of w-rigid groups. *Invent. Math.* **170** (2007), 243–295.

[Po2] S. Popa, Deformation and rigidity for group actions and von Neumann algebras. *International Congress of Mathematicians.* Vol. I, 445–477, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[Roe] J. Roe, *Lectures on coarse geometry.* University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Sa] S. Sakai, On the hyperfinite II_1-factor. *Proc. Amer. Math. Soc.* **19** (1968) 589–591.

[Sh] Y. Shalom, Measurable group theory. *European Congress of Mathematics*, 391–423, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[Th] S. Thomas, Simon Borel superrigidity and the classification problem for the torsion-free abelian groups of finite rank. *International Congress of Mathematicians.* Vol. II, 93–116, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[Wi] `http://en.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski_paradox`