多様体の微分同相群

坪井　俊（東大数理）

多様体の定式化は２０世紀前半におこなわれた．現在，多くの数学研究が多様体あるいはその上の構造を扱っている．多様体論は大学の数学科の講義の定番といってよいと思う．その上で，複素多様体論，リーマン多様体論，リー群論，ファイバー束の理論，ゲージ理論などが，次世代に必要な数学として教えられているものと思われる．この講演では，その中に微分同相群論というものがあってもよいのではないかという期待を持って，微分同相群論の内容の一部となるべき結果および残された問題を，２つの話題について紹介する．

1. 微分同相群

$1 \leqq r \leqq \infty$ または ω として，n 次元 C^r 級コンパクト多様体 M^n の C^r 級微分同相全体のなす群を $\mathrm{Diff}^r(M^n)$ と書く．写像 $f : M^n \longrightarrow M^n$ が C^r 級微分同相であるとは，全単射であり，f, f^{-1} がともに C^r 級であることである．$\mathrm{Diff}^r(M^n)$ は，写像の結合について群をなしている．C^ω 級とは実解析的であることである．逆写像定理から，$\mathrm{Diff}^r(M^n)$ は，M^n から M^n 自身への写像全体のなす空間において，C^1 位相について開集合である．この位相についての $\mathrm{Diff}^r(M^n)$ の恒等写像の（弧状）連結成分を $\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ と書く．$\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ は正規部分群で，商の群は連結成分のなす群 $\pi_0(\mathrm{Diff}^r(M^n))$ である．微分同相群の研究を $\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ の研究と，$\pi_0(\mathrm{Diff}^r(M^n))$ の研究に分けて始めることもできる．今回は，講演者が研究してきた $\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ を扱うのであるが，連結成分のなす群 $\pi_0(\mathrm{Diff}^r(M^n))$ ももちろん重要で，それは次のような事柄からも納得されると思う．６次元球面 S^6 に対して，$\pi_0(\mathrm{Diff}^r(S^6)) \cong \boldsymbol{Z}/28\boldsymbol{Z}$ は７次元球面の微分可能構造のなす群であり，種数 g のリーマン面 Σ_g^2 に対して，$\pi_0(\mathrm{Diff}^r(\Sigma_g^2))$ はリーマン面 Σ_g^2 の写像類群である．

ここで扱う C^r 級多様体 M^n は，C^∞ 級あるいは実解析的多様体としてよい．このとき，$\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ は局所可縮な空間で，恒等写像の近傍は，M^n 上の C^r 級ベクトル場のなす実ベクトル空間 $\mathcal{X}^r(M^n)$ の 0 の近傍と同一視できる．$r = \infty, \omega$ ならば，$\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ は $\mathcal{X}^r(M^n)$ をモデルとする多様体の構造をもつ．ベクトル場が生成するフローは微分同相の族であるが，恒等写像の近傍の微分同相が，常にあるフローに含まれる訳ではない．時刻に依存するベクトル場が生成する微分同相の族を**アイソトピー**と呼ぶ．恒等写像の近傍の微分同相は常にあるアイソトピーに含まれる．このことから，$\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ は，非可算個の元をもつことがわかる．

$\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ の各元 $f : M^n \longrightarrow M^n$ がどのようなふるまいをするか，あるいはどのようなふるまいが一般的かという問は，力学系理論の中心的な問題である．次元 n が２以上のときは，一般に複雑極まりないふるまいをする．それだけ複雑な元があることが，群 $\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ の思いがけない単純さの原因となっている．

この研究の一部は日本科学振興会，科学研究費補助金基盤研究 (A)16204004, 20244003, 萌芽研究 18654008 および東京大学２１世紀ＣＯＥプログラム，グローバルＣＯＥプログラム拠点形成費の援助により遂行されています．ご援助に感謝します．

近年，微分同相群の部分群についての研究が大きく進展している．また，シンプレクティク構造，接触構造，体積要素を保つ微分同相群の研究も進展している．それらは，この講演とも深く関係しているが，今回は触れないことにする．

2. 微分同相群の完全性と単純性

同相群について，1947 年に Ulam-von Neumann が次のことを述べている．

定理 2.1 (Ulam-von Neumann ([40]))**.** 球面 S^2 の向きを保つ同相群は単純群である．ある自然数 N があって，$f,\, g \in \mathrm{Homeo}(S^2)_0 \setminus \{\mathrm{id}\}$ に対し，g は，N 個以下の，f の共役の積で書かれる．

その後，1958 年に Anderson が次を示した．

定理 2.2 (Anderson ([1]))**.** $f,\, g \in \mathrm{Homeo}(S^n)_0 \setminus \{\mathrm{id}\}$ $(n = 1, 2, 3)$ に対し，g は，6 個以下の，f または f^{-1} の共役の積で書かれる．

さらに，1960 年に Fisher は，3 次元以下の連結閉多様体 M に対し，$\mathrm{Homeo}(M)_0$ は単純群であることを示している ([8])．

また，1970 年に Epstein は，$r \leqq \infty$ の C^r 級微分同相群など，fragmentation ができる群に対して，完全群ならば単純群であることを示した ([7], [3], [33])．

定義を述べておくと，群 G が**単純**とは，G の正規部分群が G と単位群 $\{e\}$ にかぎることである．また，群 G が**完全**とは，G のアーベル化が単位群となることである．

群 G の元 g に対して C_g を g の共役類と g^{-1} の共役類の和集合とする：$C_g = \{hgh^{-1} \mid h \in G\} \cup \{hg^{-1}h^{-1} \mid h \in G\}$．$g$ を含む最小の正規部分群（正規化群）は，$\bigcup_{k=1}^{\infty}(C_g)^k$ であたえられるが，単純群とは，g が単位元 e でないとき，$G = \bigcup_{k=1}^{\infty}(C_g)^k$ となるというものである．単純群 G に対して，集合 $\{C_g \mid g \in G \setminus \{e\}\}$ 上に，

$$d(C_f, C_g) = \log \min\{k \mid C_f \subset (C_g)^k \text{ and } C_g \subset (C_f)^k\}$$

で定まる距離が入る．この距離の性質は無限単純群の性質として興味深い．

無限群が単純群ならば，それは完全群であるが，Epstein の結果から，$r \leqq \infty$ の C^r 級微分同相群などでは，その逆が成立する．

コンパクトとは限らない n 次元多様体 M^n に対しては，その微分同相群 $\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ は，台がコンパクトな微分同相のなす部分群の恒等写像成分 $\mathrm{Diff}^r_c(M^n)_0$ を正規部分群として含む．ここで，微分同相 $f : M^n \longrightarrow M^n$ の**台** $\mathrm{supp}(f)$ は，$\{x \in M^n \mid f(x) \neq x\}$ の閉包として定義される．従って，コンパクトでない多様体 M^n に対して $\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ は単純群ではないが，$\mathrm{Diff}^r_c(M^n)_0$ は完全群となり，M^n が連結ならば，Epstein の結果により単純群となる．これは次の結果による．

定理 2.3 (Herman-Mather-Thurston ([22], [33]))**.** $1 \leqq r \leqq \infty,\ r \neq n+1$ のとき，$\mathrm{Diff}^r_c(M^n)_0$ は完全群である．M^n が連結ならば，$\mathrm{Diff}^r_c(M^n)_0$ は単純群である．

このような研究の動機には，葉層構造の理論，葉層構造の分類空間の位相の問題があった．葉層構造の分類空間と微分同相群の分類空間を結びつける Mather-Thurston の定理は次のように述べられる．分類空間とは，多様体上の構造が分類空間への写像による引き戻しで得られるという性質を持つ空間で，分類空間のコホモロジー類はこのような構造の特性類を与える．

定理 2.4 (Mather-Thurston ([21], [33], [23]))**.** $1 \leqq r \leqq \infty$ のとき，

$$H_*(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c(\boldsymbol{R}^n);\boldsymbol{Z}) \cong H_*(\Omega^n B\overline{\Gamma}^r_n;\boldsymbol{Z}).$$

ここで，Ω^n は n 重ループ空間を表し，多様体 M^n に対し，$B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c(M^n)$ は，葉層 M^n 束の分類空間 $B\mathrm{Diff}^r_c(M^n)^\delta$ から M^n 束の分類空間 $B\mathrm{Diff}^r_c(M^n)$ への写像のホモトピー・ファイバーであり，葉層 M^n 積を分類する．$B\overline{\Gamma}^r_n$ は，余次元 n 葉層構造の分類空間 $B\Gamma^r_n$ から葉層のの法束を分類する $BGL(n;\boldsymbol{R})$ への写像のホモトピー・ファイバーであり，自明な法束を持つ葉層構造を分類する．

上の 2 つの定理を結びつけると，次の系が得られる．

系 2.5. $1 \leqq r \leqq \infty$ のとき，$B\overline{\Gamma}^r_n$ $(1 \leqq r \leqq \infty,\ r \neq n+1)$ は $n+1$ 連結である．

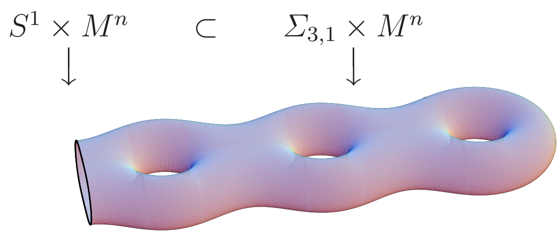
この方向の研究では，$r = 0,\ 1$ のとき $B\overline{\Gamma}^r_n$ が可縮であること，r が 1 に近づくときに $B\overline{\Gamma}^r_n$ の連結性が上がること，C^r $(r > 2 - 1/(n+1))$ では葉層構造の特性類が $H^{2n+1}(B\overline{\Gamma}^r_n;\boldsymbol{Z})$ の元として定義されることなどがわかっている ([20], [34], [35])．

3. 一様完全性と一様単純性

群 G のアーベル化は，交換子 $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$ で生成される交換子群 $[G,G]$ による，G の商の群であるから，G が完全群ならば，$g \in G$ は交換子の積の形に書かれる．コンパクト n 次元多様体 M^n に対して $\mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ が完全群であること，すなわち，$f \in \mathrm{Diff}^r(M^n)_0$ が交換子の積 $f = [a_1,b_1]\cdots[a_k,b_k]$ に書かれることは，幾何的には次のことを意味している．$S^1 \times M^n$ 上のホロノミーが f で与えられる葉層（積）構造

$$(S^1 \times M^n, \mathcal{F}_f) = (\boldsymbol{R} \times M^n, \boldsymbol{R} \times \{*\}_{*\in M^n})/\sim$$

$((t+m,x) \sim (t, f^m(x))(m \in \boldsymbol{Z}))$ を考える．種数 k, 境界成分が 1 個の向きを持つコンパクト連結曲面 $\Sigma_{k,1}$ に対して，$\Sigma_{k,1} \times M^n$ の境界 $\partial\Sigma_{k,1} \times M^n$ に与えられた葉層（積）構造 $(S^1 \times M^n, \mathcal{F}_f)$ が $\Sigma_{k,1} \times M^n$ の葉層（積）構造に拡張する．これは $\pi_1(\Sigma_{k,1})$ が $2k$ 元生成自由群で境界 $\partial\Sigma_{k,1}$ は，$\pi_1(\Sigma_{k,1})$ において交換子積に対応することによる．このような構成を考えると，f を書き表すために必要な交換子の個数の最小値（f の交換子長）に興味を持つことになる．任意の元の交換子長が一様に評価される群を一様完全群と呼ぶ．



すなわち群 G が**一様完全**とは，ある自然数 N が存在し，G の任意の元 g は，高々N 個の交換子の積に書かれる事である．

最初に述べた Anderson の定理 2.2 に関連して，群 G が**一様単純**であることを次のように定義する．ある自然数 N が存在し，G の任意の元 f, 任意の単位元ではない g に対し，f は高々N 個の g または g^{-1} の共役の積に書かれることである：$G = \bigcup_{k=0}^N (C_g)^k$．これは $\{C_g \mid g \in G \setminus \{e\}\}$ が距離 d について有界であることである．

一様単純な無限群は一様完全である．一様完全であるが一様単純でない群は存在する．例えば，交代群の順極限 A_∞ がそうである．これから述べるような微分同相群については，一様完全性の証明から一様単純性を導くことが出来る．

この節で紹介するのは次の定理である．

定理 3.1 (Burago-Ivanov-Polterovich([4]), T. ([37], [39]))**.** 任意の $f \in \mathrm{Diff}^r(S^n)_0$ $(1 \leqq r \leqq \infty,\ r \neq n+1)$ は３個の交換子の積に書かれる．

これは，次のように一般化される．

定理 3.2 (T. ([37]))**.** M^{2m} をコンパクト多様体で，指数 m のハンドルのないハンドル分解を持つものとする．このとき，任意の $f \in \mathrm{Diff}^r(M^{2m})_0$ $(1 \leqq r \leqq \infty,$ $r \neq 2m+1)$ は４個の交換子の積に書かれる．

定理 3.3 (Burago-Ivanov-Polterovich for $m = 1$([4]), T. ([37], [39]))**.** M^{2m+1} をコンパクト多様体とする．このとき，任意の $f \in \mathrm{Diff}^r(M^{2m+1})_0$ $(1 \leqq r \leqq \infty,$ $r \neq 2m+2)$ は５個の交換子の積に書かれる．

これらの定理で解決されてない，特に交叉形式が非自明であるような偶数次元の多様体 M^{2m} に対して，$\mathrm{Diff}^r(M^{2m})_0$ が一様完全かどうかは非常に興味のある問題である．実射影平面 $\boldsymbol{R}P^2$，２次元トーラス T^2，２次元球面の直積 $S^2 \times S^2$, 複素射影平面 $\boldsymbol{C}P^2$ などに対して，上の定理の証明の重要なステップはどれもうまくいかない.（追記：$2m \geqq 6$ の場合に一様完全であることが，その後わかった.）

問題 3.4. M^{2m} を交差形式が自明でない偶数次元多様体とする．$2m = 2, 4$ の場合，$\mathrm{Diff}^r(M^{2m})_0$ は一様完全でないことを示せ.

上の定理の系として次が得られる．一様単純であることは，B-I-P [4] に大体書かれているが、共役の個数の評価は，[39] による．

系 3.5 (T. ([39]))**.** $\mathrm{Diff}^r(S^n)_0 \setminus \{\mathrm{id}\}$ $(1 \leqq r \leqq \infty,\ r \neq n+1)$ の元 f, g に対し，f は，12 個以下の，g または g^{-1} の共役の積に書かれる．

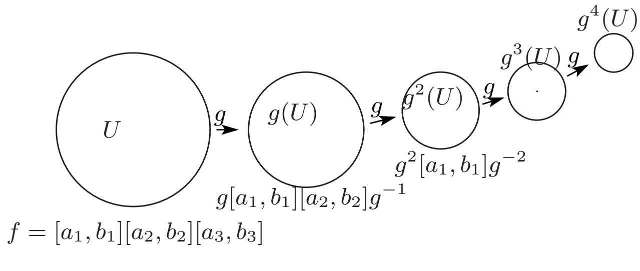
この系は，Anderson の定理 2.2 と同様に，１つの微分同相を知っていれば座標を 12 回取り換えて，この微分同相を掛ければすべての微分同相が得られるということを述べている．

系 3.6 (T. ([39]))**.** M^n をコンパクト連結多様体で，指数 $n/2$ のハンドルのないハンドル分解を持つものとする．このとき，$\mathrm{Diff}^r(M^n)_0 \setminus \{\mathrm{id}\}$ $(1 \leqq r \leqq \infty, r \neq n+1)$ の元 f, g に対し，f は，$16n+28$ 個以下の，g または g^{-1} の共役の積に書かれる．

4. 一様完全性，一様単純性の証明の方法

まず，次を示す.

命題 4.1. $\mathrm{Diff}^r_c(\boldsymbol{R}^n)_0$ $(1 \leqq r \leqq \infty,\ r \neq n+1)$ の元は２つの交換子の積に書かれる．



Herman-Mather-Thurston の定理 2.3 により，$\mathrm{Diff}_c^r(\boldsymbol{R}^n)_0$ は完全群だから，$f \in \mathrm{Diff}_c^r(\boldsymbol{R}^n)_0$ は交換子の積に書かれる：$f = [a_1, b_1] \cdots [a_k, b_k]$．有界な球体 U を $\mathrm{supp}(a_i), \mathrm{supp}(b_i) \subset U$ となるようにとり，$g \in \mathrm{Diff}_c^r(\boldsymbol{R}^n)_0$ で $g^j(U)$ $(j \in \boldsymbol{Z})$ が交わらないようなものをとる．$F = \prod_{i=1}^k g^{k-i}([a_1, b_1] \cdots [a_i, b_i])g^{i-k}$ とおく．

$$
\begin{aligned}
F^{-1}gFg^{-1} &= ([a_1, b_1] \cdots [a_k, b_k])^{-1} \textstyle\prod_{i=0}^{k-1} g^{k-i}[a_{i+1}, b_{i+1}]g^{i-k} \\
&= f^{-1} \textstyle\prod_{i=0}^{k-1} g^{k-i}[a_{i+1}, b_{i+1}]g^{i-k} \\
&= f^{-1} \big[\textstyle\prod_{i=0}^{k-1} g^{k-i}a_{i+1}g^{i-k}, \prod_{i=0}^{k-1} g^{k-i}b_{i+1}g^{i-k} \big].
\end{aligned}
$$

だから，$A = \prod_{i=0}^{k-1} g^{k-i}a_{i+1}g^{i-k}$, $B = \prod_{i=0}^{k-1} g^{k-i}b_{i+1}g^{i-k}$ とおけば，$f = [A, B][g, F^{-1}]$ となる．

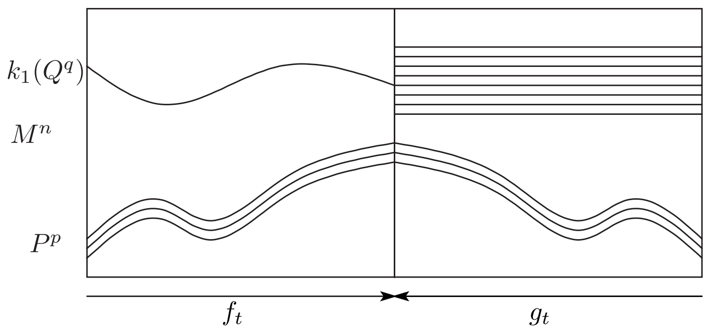
この証明は，$g^j(U)$ $(j \in \boldsymbol{Z})$ が交わらないこと，任意の元がある開集合 U（内の球体）に台を持つ交換子積に書かれることだけを使っているので，次が示される．

命題 4.2. M^n を指数 $(n-1)/2$ 以下のハンドルによるハンドル分解をもつコンパクト多様体の内部とするとき，$\mathrm{Diff}_c^r(M^n)_0$ $(1 \leqq r \leqq \infty, r \neq n+1)$ の元は 2 つの交換子の積に書かれる．

多様体 M^n の k 次元部分複体 K^k と，ℓ 次元単体複体 L^ℓ からの微分可能写像 $f : L^\ell \longrightarrow M^n$ に対して，一般位置の原理（横断性あるいはサードの定理）から，$k+\ell+1 \leqq n$ ならば，K^k をアイソトピー $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ $(h_0 = \mathrm{id})$ で動かして，$h_1(K^k)$ と $f(L^\ell)$ を交わらないようにすることができる．これを使って次が示される．

特に k 次元部分複体 K^k に対し, $k \leqq (n-1)/2$ ならば，K^k を K^k に交わらないように動かすアイソトピーが存在する．このとき，K の近傍 U とアイソトピー $\{g_t : M^n \longrightarrow M^n\}_{t\in[0,1]}$ で $(g_1)^j(U)$ $(j \in \boldsymbol{Z})$ が交わらないものが構成できる（命題 4.2 で使っている）．

また，P^p, Q^q をコンパクト多様体 M^n の交わらない部分複体とし，$p+q+2 \leqq n$ とすると，アイソトピー $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ $(f_0 = \mathrm{id})$ は，$f_1 = g_1 \circ h_1$ と 2 つのアイソトピー $\{g_t\}_{t\in[0,1]} \subset \mathrm{Diff}_c^r(M^n \setminus k_1(Q^q))_0$ $(g_0 = \mathrm{id})$, $\{h_t\}_{t\in[0,1]} \subset \mathrm{Diff}_c^r(M^n \setminus P^p)_0$ $(h_0 = \mathrm{id})$ の積に分解される．ここで，$\{k_t\}_{t\in[0,1]}$ は P^p の近傍を動かさないアイソトピーである．



定理 3.2，定理 3.3 の証明は，次のように行われる．

コンパクト多様体のハンドル分解から，定理 3.2 の仮定の下で，$P^{m-1}, Q^{m-1} \subset M^{2m}$ で，P^{m-1} は $M^{2m} \setminus Q^{m-1}$ の変形収縮，Q^{m-1} は $M^{2m} \setminus P^{m-1}$ の変形収縮となるものがとれる．これにより，$f \in \mathrm{Diff}^r(M^{2m})_0$ は，$f = g \circ h, g \in \mathrm{Diff}_c^r(M^{2m} \setminus k(Q^{m-1}))_0, h \in \mathrm{Diff}_c^r(M^{2m} \setminus P^{m-1})_0$ と分解される．g, h は，それぞれ，P^{m-1} の近傍, $k(Q^{m-1})$ の近傍に台を持つ微分同相に共役で，それぞれ 2 個の交換子の積に書かれる．従って，f は 4 個の交換子の積に書かれる．

定理3.3の場合は，P^m, Q^m で，P^m は $M^{2m+1}\setminus Q^m$ の変形収縮，Q^m は $M^{2m+1}\setminus P^m$ の変形収縮となるものはとれる．$f\in \mathrm{Diff}^r(M^{2m+1})_0$ の分解は自明ではないが，Whitneyの定理([42]), B-I-P([4])のアイデアを用いて，P^m のアイソトピーの像$(m+1$次元$)$と $k(Q^m)$ の交わり方を解析して，$f=a\circ g\circ h$, ここで，a は球体の直和に台を持つ１つの交換子で，$g\in \mathrm{Diff}^r_c(M^{2m+1}\setminus k(Q^m))_0$, $h\in \mathrm{Diff}^r_c(M^{2m+1}\setminus k'(P^m))_0$ という形でできることが示される．このことから，f は５個の交換子の積に書かれることが従う.

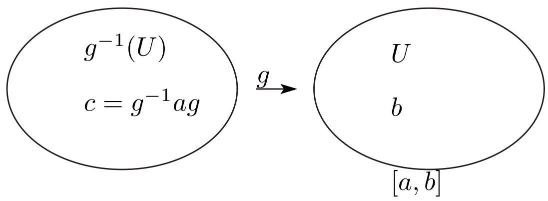
完全性から単純性が従う理由を述べよう.

命題 4.3. $g\in \mathrm{Diff}^r_c(M^n)_0$ に対し，開集合 U が $U\cap g^{-1}(U)=\emptyset$ を満たすとする．このとき，$\mathrm{Diff}^r_c(U)_0$ の交換子 $[a,b]$ は，４個の，g または g^{-1} の共役の積に書かれる.

実際，$c=g^{-1}ag$ とおくと，$cb=bc$ だから

$$\begin{aligned} aba^{-1}b^{-1} &= gcg^{-1} \qquad bgc^{-1} \qquad g^{-1}b^{-1} \\ &= gcg^{-1}c^{-1}cbgc^{-1}b^{-1}bg^{-1}b^{-1} \\ &= g(cg^{-1}c^{-1})(bcgc^{-1}b^{-1})(bg^{-1}b^{-1}). \end{aligned}$$

となる.



系3.5は，定理3.1の交換子が球体に台を持つことから従う．系3.6は，$K^k\subset M^n$ $(k\leqq(n-1)/2)$ に対して構成した，$g^j(U)$ $(j\in \boldsymbol{Z})$ が交わらないような g が，$k+1$ 個の球体に台を持つ微分同相の積に書かれることを用いて示される.

5. 実解析的微分同相群

２つ目の話題は，実解析的多様体 M^n の実解析的微分同相群 $\mathrm{Diff}^\omega(M^n)_0$ の完全性である．これについては，1974年，Hermanが，n 次元トーラス T^n の場合に次を示している.

定理 5.1 (Herman ([15])). $\mathrm{Diff}^\omega(T^n)_0$ は単純群である.

Hermanは，任意のコンパクト連結実解析的多様体 M^n に対して，$\mathrm{Diff}^\omega(M^n)_0$ は単純群であることを予想したが，その後，３０年以上進展がなかった．それに対して，より弱い次の予想を考えた.

予想 5.2. コンパクト実解析的多様体 M^n に対して，$\mathrm{Diff}^\omega(M^n)_0$ は完全群である.

これに対する現在の結果は，次のものである.

定理 5.3 (T. ([38])). コンパクト実解析的多様体 M^n が $U(1)$ 主束の全空間であるとする．このとき，$\mathrm{Diff}^\omega(M^n)_0$ は完全群である.

コンパクト実解析多様体 M^n が特殊半自由 $U(1)$ 作用を持つことを次で定義する．N を境界 ∂N を持つコンパクト $(n-1)$ 次元多様体とする．M^n を $N\times U(1)$ において，$x\in\partial N$ に対し $\{x\}\times U(1)$ を１点に同一視して得られる多様体とする．M^n は，実解析的多様体の構造と実解析的 $U(1)$ 作用をもつ.

定理 5.4 (T. ([38])). M^n が特殊半自由 $U(1)$ 作用を持つならば，$\mathrm{Diff}^\omega(M^n)_0$ は完全群である．

定理 5.5 (T. ([38])). ２次元または３次元コンパクト多様体 M が，非自明な $U(1)$ 作用を持つならば，$\mathrm{Diff}^\omega(M)_0$ は完全群である．

6. 実解析的微分同相群の完全性の証明の方法

Herman の定理 5.1 の証明はトーラスの微分同相の条件付き安定性（Kolmogorov-Arnold-Moser 理論）を用いて行われた．我々の定理の証明も Arnold による次の定理を用いる．

定理 6.1 (Arnold([2])). $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ が *Diophantus* 条件を満たすとする．$\Phi(w)$ $(w \in W)$ を n 次元トーラスの恒等写像に近い実解析的微分同相の実解析族とする．このとき，実解析族 $(\psi(w), \lambda(w)) \in \mathrm{Diff}^\omega(T^n)_0 \times T^n$ で，次を満たすものが存在する．

$$\Phi(w) = R_{\lambda(w)-\alpha} \circ \psi(w) \circ R_\alpha \circ \psi(w)^{-1}$$

ここで，R_* はトーラス $T^n = \boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ の $*$ 回転である．また，$\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ が Diophantus 条件を満たすとは，任意の $n \in \boldsymbol{Z}^n \setminus \{0\}$, $m \in \boldsymbol{Z}$ に対して $|\alpha \bullet n - m| \geq C\|n\|^{-\beta}$ が成立するような正実数 C, β が存在することである．

R_λ は，λ に実解析的に依存する形で $PSL(2;\boldsymbol{R})^n = PSL(2;\boldsymbol{R})\times\cdots\times PSL(2;\boldsymbol{R})$ において，１つの交換子に書かれるので，$\Phi(w)$ は，$w \in W$ に実解析的に依存する形で２つの交換子の積に書かれる．

我々の定理の証明は次のものから成り立っている．

- ヤコビ行列が正則ではない場合の，実解析的逆写像定理.
- 規格化補題.
- 実解析的 Diophantus 回転に対する Arnold の定理および
同心円の Diophantus 回転に対する Arnold 型定理.
- 軌道を保つ $SL(2;\boldsymbol{R})$ 作用.

証明の概要は次のようなものである．

- 実解析的 $U(1)$ 作用の N 個 $(N \geqq n)$ の実解析的微分同相による共役を取り，多様体の各点 x の接空間 T_xM^n が，共役で得られた $U(1)$ 作用を生成するベクトル場で張られるようにする．
- M^n 上の実解析的リーマン計量をとると，n 個の $U(1)$ 作用を生成するベクトル場 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ に対し，正規直交基底 $\partial/\partial x_j$ に対する行列式 $\Delta = \det(\xi_{ij})$ が定まる．ここで，$\xi_i = \sum \xi_{ij}(\partial/\partial x_j)$ である．
- M^n は，$M^n \setminus \{\Delta_k = 0\}$ の形の稠密開集合で被覆される．
- 規格化補題により，恒等写像に近い実解析的微分同相 f は，$f_k - \mathrm{id}$ が Δ_k の冪で割り切れるような実解析的微分同相 f_k の積に分解される．
- 実解析的逆写像定理により，f_k は軌道を保つ実解析的微分同相の積に分解される．
- Arnold の定理と同心円の回転に対する Arnold 型定理により，得られた軌道を保つ実解析的微分同相は，軌道ごとに回転となる実解析的微分同相と軌道を保つ実解析的微分同相群の交換子群を法として等しい．
- 定理で扱う場合には，軌道ごとの $SL(2;\boldsymbol{R})$ 作用の実解析族があって，得られた軌道ごとの回転の実解析族を軌道を保つ実解析的微分同相群のなかで交換子の積に書くことができる．

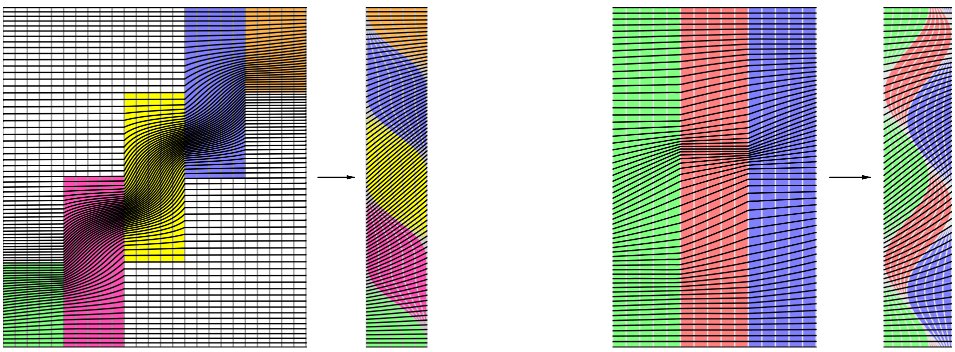
残された紙数で，ヤコビ行列が正則ではない場合の実解析的逆写像定理と規格化補題の意味を説明する．

定理の証明に必要な実解析的逆写像定理は次のようなものである．

定理 6.2. M^n を $\boldsymbol{R}^N$ に埋め込まれた実解析的閉多様体，$\xi^{(1)}$, …, $\xi^{(n)}$ を M^n 上の実解析的ベクトル場，$\varphi_t^{(i)}$ を $\xi^{(i)}$ が生成するフローとする $(i = 1, \ldots, n)$. $\Phi((t_1,\ldots,t_n),x) = (\varphi_{t_1}^{(1)} \circ \cdots \circ \varphi_{t_n}^{(n)})(x)$ で定義される写像 $\Phi : \boldsymbol{R}^n \times M^n \longrightarrow M^n$ を考える．f を恒等写像に近い M^n の実解析的微分同相で $f - \mathrm{id}$ が $\Delta(x)^r$ ($r \in \boldsymbol{Z}$, $r \geqq 3$) で割り切れるものとする．ここで，座標近傍 $(U,(x_1,\ldots,x_n))$ 上で，$\Delta(x) = \det\bigl(\xi_i^{(j)}\bigr)$, $\xi^{(j)} = \sum \xi_i^{(j)}(\partial/\partial x_i)$ であり，$\Delta(x)$ は，恒等的に 0 とはならないとする．このとき，実解析関数 $t_1(x)$, …, $t_n(x)$ で，$f(x) = \Phi((t_1(x),\ldots,t_n(x)),x)$ を満たすものが存在する．

$\Delta(x) \neq 0$ となる点 x の近傍で，局所的に実解析関数 $t_1(x)$, …, $t_n(x)$ が存在するのは，通常の実解析的逆写像定理からわかる．実解析的な写像に対しては，$\Delta(x) = 0$ となっても，$f(x)$ が $\Delta(x)$ の冪で割り切れていれば，$t_1(x)$, …, $t_n(x)$ が存在することを主張している．

規格化補題は，C^r 級の微分同相群の恒等写像成分に対する fragmentation 補題 ([3]) に対応するもので，恒等写像に近い実解析的微分同相を都合のよい固定点成分を持つ実解析的微分同相の積に分解するものである．fragmentation 補題は，C^r 級の微分同相群の恒等写像成分の完全性を示すための鍵となったものの 1 つであり，前半に述べた C^r 級 $(1 \leqq r \leqq \infty)$ の場合には，球体に台を持つ関数による 1 の分割を使うことが重要であった．このような関数は実解析的な場合には使うことが出来ないが，規格化補題は次のように定式化される．



μ_1, …, μ_m を M^n 上の非負実解析的関数で，$\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$ を満たすものとする．$S_k = {\mu_k}^{-1}(0)$ とおき，$\bigcap_{k=1}^m S_k = \emptyset$ を仮定する．さらに $\nu_j = \sum_{i=1}^j \mu_i$ とおく．

$$\Phi : [0,m] \times M^n \longrightarrow [0,1] \times M^n$$

を次で定義される写像とする．

$$\Phi(t,x) = (\nu_{[t]}(x) + (t-[t])\mu_{[t]+1}(x),\ x).$$

この写像は $[j-1,j] \times M^n$ 上で実解析的である．$F : [0,1] \times M^n \longrightarrow M^n$ を実解析的アイソトピーとする．$[0,1] \times M^n$ 上にはアイソトピーのトレースとして葉層構造 $\mathcal{F}$ が定まる．この葉層の (t,x) を通る葉は

$$\{(s,(F(s)\circ F(t)^{-1})(x)) \in [0,1] \times M^n \mid s \in [0,1]\}$$

で与えられる．

命題 6.3 (規格化補題)**.** アイソトピー F が定値アイソトピーに近いとする．このとき $\Phi|\{t\} \times M^n$ は（積葉層に近い）$\mathcal{F}$ に横断的で，$[j-1, j] \times M^n$ $(j = 1, \ldots, m)$. 上で，$\Phi^*\mathcal{F}$ は実解析的アイソトピーである．従って，

$$F(0) \circ F(1)^{-1} = G_1 \circ \cdots \circ G_m,$$

となる．ここで G_j $(j = 1, \ldots, m)$ は $G_j|S_j = \mathrm{id}_{S_j}$ を満たす M^n の実解析的微分同相である．さらに，$G_j - \mathrm{id}$ は μ_j で割り切れる．

定理 5.3, 5.4, 5.5 の証明に鑑みて，非自明 $U(1)$ 作用をもつ多様体の場合の予想 5.2 は，比較的やさしく示されると思われる．一般の多様体に対する予想 5.2 の解決のためには，Arnold の定理 6.1 に代わる現象を他の種類の多様体に見出すことができるかどうかが１つの鍵である．

問題 6.4. 双曲多様体に対し，次の形の条件付き安定性の問題を定式化し，証明せよ．

- 部分群 $\mathcal{D} \subset \mathrm{Diff}^\omega(M^n)_0$ と $\mathcal{D}$ の近傍 U があり，U 上で定義された共役不変量 $\rho : U \longrightarrow \mathcal{D}$ があって，$\mathcal{D}$ の稠密な部分集合 A に対して，$\rho(f) \in A$ ならば，f と $\rho(f)$ は実解析的に共役である．

References

1. R. D. Anderson, *The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Amer. J. of Math. **80** (1958) 955–963.
2. V.I. Arnol'd *Small denominators. I, Mappings of the circumference onto itself*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **25** (1961) 21–86 = Amer. Math. Soc. Translations ser 2. **46** (1965), 213–284.
3. A. Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups,* Mathematics and its Applications, 400, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
4. D.Burago, S.Ivanov and L.Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin*, Advanced Studies in Pure Math. **52** Groups of Diffeomorphisms (2008) 221–250.
5. H. Cartan, *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 61, (1944). 149–197.
6. H. Cartan, *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes*, Bull. Soc. math. France **85** (1957), 77–99.
7. D. B. A. Epstein *The simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Compositio Math. **22**(1970)165–173.
8. G. M. Fisher, *On the group of all homeomorphisms of a manifold*, Transactions Amer. Math. Soc., **97** (1960) 193–212.
9. H. Grauert, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, Ann. of Math. (2) **68** (1958) 460–472.
10. H. Grauert and R. Remmert, *Coherent analytic sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 265. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
11. R. C. Gunning, *Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. II. Local theory.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Monterey, CA, 1990.
12. S. Haller and J. Teichmann, *Smooth perfectness through decomposition diffeomorphisms into fiber preserving ones*, Annals of Global Analysis and Geometry **23**, 53-63 (2003).
13. M. Herman, *Simplicité du groupe des difféomorphismes de classe C^∞, isotopes à l'identité, du tore de dimension n,* C. R. Acad. Sci. Paris **273** (1971), 232–234.
14. M. Herman, *Sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs R-analytiques du tore*, Differential topology and geometry (Proc. Colloq., Dijon, 1974), pp. 43–49. Lecture Notes in Math., Vol. 484, Springer, Berlin, 1975.
15. M. Herman, *Sur le groupe des difféomorphismes R-analytiques de R*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 78 = Indag. Math. 37 (1975), no. 4, 351–355.

16. M. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **49** (1979), 5–233.
17. M. Herman, *Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphere de Riemann.* Bull. Soc. Math. France **112** (1984), no. 1, 93–142.
18. M. Herman et F. Sergeraert, *Sur un théorème d'Arnold et Kolmogorov*, C. R. Acad. Sci. Paris **273** (1971), 409–411.
19. D. Kotschick, *Stable length in stable groups*, Advanced Studies in Pure Math. **52** Groups of Diffeomorphisms (2008) 401–413.
20. J. Mather, *The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms*, Topology **10** (1971), 297–298.
21. J. Mather, *Integrability in codimension* 1, Comm. Math. Helv. **48** (1973) 195–233.
22. J. Mather, *Commutators of diffeomorphisms* I, II and III, Comm. Math. Helv. **49** (1974), 512–528, **50** (1975), 33–40 and **60** (1985), 122–124.
23. J. Mather, *On the homology of Haefliger's classifying space*, C.I.M.E., Differential Topology, (1976), 71–116.
24. S. Matsumoto and S. Morita, *Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 539–544.
25. J. Milnor, *Morse theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J. (1963) vi+153 pp.
26. J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1965) v+116 pp.
27. C. B. Morrey Jr, *The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds.* Ann. of Math. **68** (1958), 159–201.
28. J. Moser, *A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations, I and II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **20** (1966), 265–315 and (3) **20** (1966), 499–535.
29. P. Orlik and F. Raymond, *Actions of* SO(2) *on 3-manifolds*, Proc. Conf. on Transformation Groups (New Orleans, La., 1967) Springer, New York (1968), 297–318.
30. F. Raymond, *Classification of the actions of the circle on* 3*-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **131** (1968) 51–78.
31. H. L. Royden, *The analytic approximation of differentiable mappings*, Math. Annalen **139** (1960), 171–179.
32. C. L. Siegel, *Iteration of analytic functions*, Ann. of Math. (2) **43** (1942), 607–612.
33. W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphism*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 304–307.
34. T. Tsuboi, *On the homology of classifying spaces for foliated products*, Advanced Studies in Pure Math. **5** Foliations (1985), 37–120.
35. T. Tsuboi, *On the foliated products of class C^1*, Annals of Math. **130** (1989), 227–271.
36. T. Tsuboi, On the group of foliation preserving diffeomorphisms, Foliations 2005, Lodz, World Scientific, Singapore (2006) 411–430.
37. T. Tsuboi, *On the uniform perfectness of diffeomorphism groups*, Advanced Studies in Pure Math. **52** Groups of Diffeomorphisms (2008) 505–524.
38. T. Tsuboi, *On the group of real analytic diffeomorphisms*, UTMS preprint series 2008-17.
39. T. Tsuboi, *On the uniform simplicity of diffeomorphism groups*, preprint.
40. S. M. Ulam and J. von Neumann, *On the group of homeomorphisms of the surface of the sphere*, (Abstract) Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947) 508.
41. J.-C. Yoccoz, *Analytic linearization of circle diffeomorphisms*, Dynamical systems and small divisors (Cetraro, 1998), 125–173, Lecture Notes in Math., 1784, Springer, Berlin, 2002.
42. H. Whitney, *The singularities of a smooth n-manifold in* $(2n-1)$*-space*, Ann. of Math., 45(1944), 247–293.

東京大学大学院数理科学研究科
E-mail address: `tsuboi@ms.u-tokyo.ac.jp`