量子情報の数学的基礎：量子測定理論と量子集合論

小澤 正直　（名大・情報）

1　はじめに

物理学の諸分野は，数学と密接に結びついていて，それぞれの分野における基本原理には，ほとんどの場合，異論の余地のない数学的表現が与えられている．従って，ある分野に属する理論的な主張が正しいかどうかの判断は，実験で検証する以前に，その主張が基本原理から数学的に正しい推論によって導かれたかどうかを検証することで行われる．このような，基本原理の数学的定式化を十分な厳密性のもとで系統的に進めるというのが，ヒルベルトが 23 の問題の第 6 番目の問題として提唱した物理学の公理化である．

一般に，量子力学の公理化は，1932 年の von Neumnn の『量子力学の数学的基礎』という著書 [35] で完成されたと考えられている．確かに，1980 年代まで，非相対論的量子力学に関する問題で，この公理系が不備であることが原因で決着のつかなかった問題はなかったと言ってよいであろう．しかし，1980 年代に起きた重力波の検出限界を巡る論争において，多くの物理学者が論争の結果的に誤った側に回ったことは，この公理系の不備を明らかにしたと言えるであろう．もちろん，von Neumann の公理系は，いわゆるコペンハーゲン解釈と呼ばれる標準的な理解をそのまま数学的に厳密に定式化したものであるので，公理系の不備は，その理解に不備があったと言い替えることができる．

量子力学では,「測定」という概念が重要な役割を果たしているが，von Neumann の公理化において「測定の理論」は未完のまま残された．von Neumann が公理化した量子力学は，対象をある状態に準備し，その対象が既知の相互作用を受けた後，一度だけ特定の物理量を測定するという実験においては，その正しさが完璧に検証されるものであったが，次々に時間的な経過にそって測定を繰り返す場合に，その測定値を正しく予測することに関しては不十分であった．

それで長いこと問題が起こらなかったのは，そのような継続的な測定を理論と比較できるほど精密に行う実験技術がなかったためであるが，1960 年のレーザーの発見以後に進歩した量子制御技術により，そのような実験のプロジェクトが可能になりつつあり，そのことから量子情報技術に関する様々な提案が生まれてきた．その最も初期の典型が重力波検出プロジェクトであった．当時，重力波検出

は，巨大な結晶を共振させて検出する共振器型検出器と，進行方向に垂直な面内にレーザー干渉計を配置し，潮汐力による直交する光路長の差の変化を検出する干渉計型検出器が提案されていた．共振器型検出器を推進する Braginsky [2] や Caves [4] らによって，量子非破壊測定法が提案され，干渉計型検出器には，標準量子限界 (SQL) という感度の限界が存在し，共振器型検出器には，そのような感度の限界が存在しないという説が提唱された．しかし，Yuen [38] は標準量子限界の導出に疑問を投げかけ，収縮状態測定という新しい測定法を提案して，標準量子限界が打破できると主張した．

本講演では，はじめに von Neumann の公理系について述べてから，この論争の顛末について紹介し，その結果，von Neumann の公理系がどのように修正されたのかを解説する．そして，この新しい量子力学の公理系のもとで，古い公理系では不正確な数学的表現が与えられていた Heisenberg の不確定性原理の新しい数学的表現が得られることを示し，そこから導かれる量子計算の精度の限界について述べる．最後に，量子力学の基本原理を更に深めるために有望なアプローチとして現在開発中の量子集合論について紹介する．

2　von Neumann の公理系

von Neumann [35] による公理系は次のように定式化できる．

公理 1．（状態と物理量の定義）各量子力学系に Hilbert 空間が対応し，**状態**はその密度作用素（正値で跡が 1 の作用素）で表現され，**物理量**はその上の自己共役作用素で表現される．

公理 2．（統計公式）状態 ρ において物理量 A を測定すれば，測定値 $\mathbf{x}$ の確率分布は

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} = \mathrm{Tr}[E^A(\Delta)\rho] \tag{2.1}$$

で与えられる．（ここで，Δ は数直線上のボレル集合，E^A は A のスペクトル測度を表す．）

公理 3．（時間発展の公式）時刻 t と $t+\tau$ の間，ハミルトニアン H を持つ系の時刻 t における状態が $\rho(t)$ ならば，時刻 $t+\tau$ における状態 $\rho(t+\tau)$ は

$$\rho(t+\tau) = e^{-iH\tau/\hbar}\rho(t)e^{iH\tau/\hbar} \tag{2.2}$$

で与えられる．（ここで，$\hbar$ は所与の単位系における Planck 定数を 2π で割った値である．）

これらの公理のもとで，過去の状態から未来の測定結果が確率的に予測できる．しかし，その予測は，一回きりの測定に関して有効で，同一の系に測定を何回も

くり返す場合には測定後の状態をきめる公理が必要である．そのために，従来，次の公理が採用されてきた．

公理 5A．（測定公理） 状態 ρ において離散的物理量 A を測定して，測定値が $\mathbf{x} = x$ であれば，測定直後の状態 $\rho_{\{\mathbf{x}=x\}}$ は

$$\rho_{\{\mathbf{x}=x\}} = \frac{E^A(\{x\})\rho E^A(\{x\})}{\mathrm{Tr}[E^A(\{x\})\rho]} \tag{2.3}$$

で与えられる．

この測定公理は，von Neumann-Lüders の射影仮説とも呼ばれる [9].

3 von Neumann の測定モデル

測定公理は，理想的な測定に関する記述であるが，被測定量が連続スペクトルをもつ場合には適用できない．von Neumann [35] は，位置測定の例として，次のようなモデルを示している．

測定対象 **S** はある直線上を運動する質点で，その位置を $\hat{x}$，運動量を $\hat{p}_x$ とする．測定対象は，時刻 t から $t + \Delta t$ まで装置内のプローブと相互作用し，時刻 $t+\Delta t$ に対象は装置から自由になるとする．von Neumann のモデルでは，プローブ **P** は対象と同様に一次元運動をする質点で，その位置を $\hat{y}$，運動量を $\hat{p}_y$ とし，測定値を与えるメータは，プローブの位置 $\hat{y}$ とする．ここで，対象とプローブの測定相互作用は，

$$H_{\mathbf{SP}} = K\hat{x}\hat{p}_y \tag{3.4}$$

で与えられ（$K\Delta t = 1$），時間間隔 $(t, t + \Delta t)$ における対象とプローブの合成系の時間発展は，ユニタリ作用素 $U = e^{-i\hat{x}\hat{p}_y/\hbar}$ で表される．測定直前の対象とプローブの波動関数を $\psi(x), \xi(y)$ として，Schrödinger 方程式を解くと，測定直後の合成系の波動関数 $\Psi = U(\psi \otimes \xi)$ は，

$$\Psi(x, y) = \psi(x)\xi(y - x) \tag{3.5}$$

となる．従って，時刻 $t + \Delta t$ にメータ $\hat{y}$ を測定して，測定値 a を得る確率密度は，

$$p(a) = \int |\psi(x)\xi(a - x)|^2\, dx \tag{3.6}$$

であり，このときの測定直後の対象の波動関数 ψ_a は，

$$\psi_a(x) = \frac{1}{(\int |\psi(x)\xi(a - x)|^2\, dx)^{1/2}}\psi(x)\xi(a - x) \tag{3.7}$$

で与えられる．

4 Heisenberg の不確定性原理

1927 年に Heisenberg [6] は，有名なガンマ線顕微鏡の思考実験で，位置の測定精度 ΔQ と運動量の擾乱の大きさ ΔP の間に

$$\Delta Q \Delta P \sim \hbar \tag{4.8}$$

という関係があることを示し，これは正準交換関係 $[Q, P] = i\hbar$ の数学的帰結であると述べて，形式的証明を試みている．その証明には，ガウス型波動関数の位置の標準偏差 $\sigma(Q)$ と運動量の標準偏差 $\sigma(P)$ の積が一定の下限を持つという事実が利用されている．この関係

$$\sigma(Q)\sigma(P) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{4.9}$$

は，直ちに Kennard [8] によって任意の波動関数に対して証明された．この不等式は，1929 年に Robertson [32] によって，

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}|\langle [A, B] \rangle| \tag{4.10}$$

と任意の物理量 A, B に一般化された．ここで，$\langle \cdots \rangle$ は期待値を表す．その後，多くの教科書では，Robertson の不等式 (4.10) を不確定性原理と呼ぶようになり，その数学的証明のあとで，この不等式の物理的意味は位置を正確に測定すればするほど，それに反比例して運動量が大きく乱されることであるという説明がなされ，前述のガンマ線顕微鏡の思考実験が引き合いに出される．

しかしながら，不等式 (4.9) が測定における測定精度と擾乱の関係を表していないことは，標準偏差の概念が測定装置の存在と無関係に，いわば被測定系の状態だけから決まる概念であることから明らかであろう．実際，Heisenberg の証明は，次のようなものであった．Heisenberg は，暗黙のうちに次の仮定をおいている．

（P）測定精度 ΔQ で位置を測定した直後の状態は，標準偏差が $\sigma(Q) \leq \Delta Q$ を満たす．

この仮定のもとで，不等式 (4.9) から，$\sigma(P) \geq \frac{\hbar}{2\Delta Q}$ が得られ，精度のよい測定をすれば，測定後の運動量の標準偏差がそれに反比例して大きくなるのは，測定による運動量の擾乱の大きさ ΔP が (4.8) を満たすためであると結論している．この証明で用いられた仮定（P）は正しくない．このことは，1980 年代になって，重力波の検出に不確定性原理から導かれる検出限界が存在するかという問題を巡る論争の中で明らかになった．以下では，その論争と測定の限界を表す不確定性原理の正しい定式化について解説する．

5　自由質点の位置の反復測定に関する標準量子限界

自由質点の位置の反復測定に関する標準量子限界 (SQL) は，通常次のように述べられる：時間間隔 τ で自由質点 m の位置 x を２回反復して測定すると，２回目の測定の結果は $(\hbar\tau/m)^{1/2}$ より小さい不確定さで予言することができない．干渉計型重力波検出器は，自由質点である鏡の位置の継続測定と見なされるので，これから，干渉計型重力波検出器の感度の限界が導かれた．

標準的な議論 [2, 4] では，$t=0$ を最初の測定の直後の時刻とし，$t=\tau$ を次の測定の（直前の）時刻として，Robertson の不等式 (4.10) が位置と運動量の不確定さ $\sigma(\hat{x}(0))$，$\sigma(\hat{p}(0))$ に適用される．その結果，$\hat{x}$ の分散は次のように増加するとされる．

$$\sigma(\hat{x}(\tau))^2 \;\geq\; \sigma(\hat{x}(0))^2+\sigma(\hat{p}(0))^2\tau^2/m^2 \geq 2\sigma(\hat{x}(0))\sigma(\hat{p}(0))\tau/m \geq \frac{\hbar\tau}{m}. \tag{5.1}$$

ここから，SQL が得られる．

Yuen [38] は 1983 年にこの標準的な議論に重大な不備があることを指摘した．自由質点の時間発展は，

$$\hat{x}(t)=\hat{x}(0)+\hat{p}(0)t/m \tag{5.2}$$

で与えられるので，時刻 τ における $\hat{x}$ の分散は，次式で与えられる．

$$\sigma(\hat{x}(\tau))^2 \;=\; \sigma(\hat{x}(0))^2+\sigma(\hat{p}(0))^2\tau^2/m^2+\langle\delta\hat{x}(0)\delta\hat{p}(0)+\delta\hat{p}(0)\delta\hat{x}(0)\rangle\tau/m. \tag{5.3}$$

ここで，$\delta\hat{x}=\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle$ などとおいた．従って，標準的議論はこの式 (5.3) の最後の項（相関項）が非負であることを暗黙のうちに仮定していることになる．負の相関項を持つ状態は，時間発展によって波束が収縮するので，収縮状態と呼ばれる．Yuen の主張 [38] は質点の位置 $\hat{x}$ の測定で，測定後の状態を収縮状態にすることが可能であるということである．そのような測定は，Heisenberg の不確定性原理 (4.8) と矛盾するため，実現可能かどうかを巡って論争が起きた．

6　Caves による SQL の擁護

Yuen [38] の提案がなされた後，Caves は SQL に関する更に進んだ分析 [3] を発表して，SQL を擁護する論陣を張った．そこで，彼は次のような SQL の定式化の改良を行った：自由質点 m がその位置 x の，同一の測定装置による，２回の測定の間，時間 τ にわたって，ユニタリな時間発展を受けるとする．このとき，第１回の可能な結果について平均すると，$(\hbar\tau/m)^{1/2}$ より小さい不確定さで，第２回の測定結果を予測することはできない．

Caves [3] は von Neumann の測定モデルに対して，この SQL が成立していることを示し，SQL の妥当性に関する発見法的証明を与えた．彼の論点は，測定装置がもつ不完全な分解能 σ という概念にある．　しかしながら，測定の分解能に関する彼の定義は曖昧であり，結果的に，前述の仮定（P）をおいたことに相当する．この仮定は von Neumann の測定モデルでは満たされているが，一般的な正当化は与えられていない．

SQL の定式化の改良によって，自由質点を収縮状態にする測定というアイディアが直ちに SQL を打ち破るというわけにはいかなくなった．とはいっても，Caves の発見法的証明を免れる可能性は残されている．仮定（P）が含まれているからである．にもかかわらず，この仮定を免れるような測定の実現可能なモデルを構成することは，難しい問題に思われた．そこで，Yuen [39] は，1986 年の国際会議で物理的に実現可能な測定を数学的に特徴づけるという問題を提案した．次節で解説するように，この問題は 1984 年に発表された文献 [12] によって既に解決していたのである．

7　測定公理の一般化

測定公理で述べられている測定は，極めて限定されていて，次の問題点がある．(1) 連続スペクトルをもつ物理量に公理を一意的に拡張することができない [12, 14]．(2) 離散的物理量の測定でも，公理を満たさない測定が存在する（光子数計測等）．(3) 測定値が被測定系の物理量の値とは限らない測定が存在する（近似測定等）．したがって，これらの場合を含む物理的に可能なもっとも一般的な測定を特徴付ける公理に拡張する必要がある．

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の跡族作用素の空間 $\tau c(\mathcal{H})$ 上の線形変換 T は，任意の有限列 $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n \in \tau c(\mathcal{H})$ に対して，次の条件をみたすとき**完全正写像**と呼ばれる．

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_i T(A_i A_j^\dagger) B_j^\dagger \geq 0 \tag{7.4}$$

縮小的完全正写像は，**オペレーション**と呼ばれる．数直線のボレル集合体 $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ で定義され，強作用素位相で可算加法的なオペレーション値の測度 $\mathcal{I}$ で

$$\mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\mathbf{R})\rho] = \mathrm{Tr}[\rho] \tag{7.5}$$

をみたすものを**インストルメント**という．この定義は文献 [12] で導入された．(インストルメントという用語自体は，Davies-Lewis [5] で最初に導入された．そこでは，完全正値性の代わりに正値性だけが要求された.）観測公理の一般化の問題は，次の公理によって解決された [11, 12].

公理 5B.（一般測定公理）各測定にはインストルメントが対応し，状態 ρ においてインストルメント $\mathcal{I}$ をもつ測定を行えば，測定値 $\mathbf{x}$ の確率分布は

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} = \mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho] \tag{7.6}$$

であり，$\mathbf{x} \in \Delta$ が生起するという条件のもとで，測定直後の状態 $\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}$ は

$$\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}} = \frac{\mathcal{I}(\Delta)\rho}{\mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho]} \tag{7.7}$$

で与えられる．

この公理の整合性を示すために，測定の一般的な数学モデルを導入する．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$（で記述される系）に対する**測定過程**とは，Hilbert 空間 $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ の状態ベクトル ξ，$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素 U, $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素 M からなる 4 つ組 $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ のことである．$\mathcal{K}$ は測定装置のプローブ系の状態空間を表し，ξ はプローブ系の初期状態，U は対象とプローブの相互作用による時間発展，M はメータ物理量を表す．測定過程 $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ は，

$$\mathcal{I}(\Delta)\rho = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[(1 \otimes E^M(\Delta))U(\rho \otimes |\xi\rangle\langle\xi|)U^\dagger] \tag{7.8}$$

によって，インストルメント $\mathcal{I}$ を定義する．ここで，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}$ は $\mathcal{K}$ 上の部分跡である．このとき，インストルメント $\mathcal{I}$ は測定過程 $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ で**実現可能**であるという．このとき，次の定理が得られる [11, 12]．

定理.（インストルメントの表現定理）任意のインストルメント $\mathcal{I}$ は，ある測定過程 $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ で実現可能である．

$\mathcal{B}(\mathbf{R})$ 上の正作用素値測度 Π で $\Pi(\mathbf{R}) = 1$ をみたすものを**確率作用素値測度** (probability operator-valued measure, POVM) と呼ぶ．$\mathcal{I}$ をインストルメントとする．$\mathcal{I}(\Delta)$ の共役変換 $\mathcal{I}(\Delta)^*$ は有界作用素の空間 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の超弱連続な完全正写像であり，各 Δ に対して，

$$\Pi(\Delta) = \mathcal{I}(\Delta)^* 1 \tag{7.9}$$

とすると，POVM Π が定まる．これを $\mathcal{I}$ の POVM と呼ぶ．逆に，任意の POVM はあるインストルメントの POVM になっている．公理 5B に，(7.9) の関係を代入すると，次の定理が得られる．

定理．（一般化統計公式）各測定には POVM が対応し，状態 ρ において POVM Π をもつ測定をすれば，測定値 $\mathbf{x}$ の確率分布は

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} = \mathrm{Tr}[\Pi(\Delta)\rho] \tag{7.10}$$

で与えられる．

対応する POVM が物理量 A のスペクトル測度である測定を**物理量 A の測定**と呼ぶ．一般化統計公式に，$\Pi = E^A$ という付帯条件を付ければ，公理 A2 が導かれる．A を離散的物理量とする．任意の跡族作用素 ρ に対して，

$$\mathcal{I}^A(\Delta)\rho = \sum_{x\in\Delta} E^A(\{x\})\rho E^A(\{x\}) \tag{7.11}$$

とおくと，インストルメント $\mathcal{I}^A$ が定義される．これを，**物理量 A の射影測定のインストルメント**と呼ぶ．このとき，$\mathcal{I}^A$ の POVM は E^A であり，公理 5B に $\mathcal{I} = \mathcal{I}^A$ という付帯条件をつければ，公理 5A が導かれる．

インストルメントに基づく測定理論は [11, 12, 14, 13, 15, 17, 20, 21] などで展開されている．

8　測定誤差と擾乱

$\mathcal{I}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ で記述される系 $\mathbf{S}$ に対するインストルメントとし，$(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ をその測定過程とする．A, B を系 $\mathbf{S}$ の物理量とする．状態 ρ において，インストルメント $\mathcal{I}$ で物理量 A を測定するときの，**（平方根平均 2 乗）誤差** $\epsilon(A)$ と物理量 B の**（平方根平均 2 乗）擾乱** $\eta(B)$ が次のように定義される．まず，**誤差作用素**と**擾乱作用素**を

$$N(A) = U^\dagger(I\otimes M)U - A\otimes I, \quad D(B) = U^\dagger(B\otimes I)U - B\otimes I \tag{8.12}$$

と定義する．**平均誤差**と**平均擾乱**は,

$$\langle N(A)\rangle = \mathrm{Tr}[N(A)(\rho\otimes|\xi\rangle\langle\xi|)], \quad \langle D(B)\rangle = \mathrm{Tr}[D(B)(\rho\otimes|\xi\rangle\langle\xi|)] \tag{8.13}$$

と定義され，誤差 $\epsilon(A)$ と擾乱 $\eta(B)$ は,

$$\epsilon(A) = \mathrm{Tr}[N(A)^2(\rho\otimes|\xi\rangle\langle\xi|)]^{1/2}, \quad \eta(B) = \mathrm{Tr}[D(B)^2(\rho\otimes|\xi\rangle\langle\xi|)]^{1/2} \tag{8.14}$$

と定義される．これは，インストルメントだけに依存し，測定過程によらない．以下，誤差と擾乱の関係式

$$\epsilon(Q)\eta(P) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{8.15}$$

を **Heisenberg の不等式**と呼ぶ.

9　von Neumann の測定モデルと不確定性原理

プローブの初期状態を ξ とすると，von Neumann の位置測定のモデルは，測定過程 $(L^2(\mathbf{R}), \xi, e^{-i\hat{x}\hat{p}_y/\hbar}, \hat{y})$ に対応し，インストルメントは

$$\mathcal{I}(\Delta)\rho = \int_\Delta \xi(x1 - \hat{x})\rho\xi(x1 - \hat{x})^\dagger dx \tag{9.16}$$

で与えられる． このモデルの誤差作用素と擾乱作用素は，$N(\hat{x}) = \hat{y}(t)$, $D(\hat{p}_x) = -\hat{p}_y(t)$ となるので，測定の時刻のプローブの位置と運動量の標準偏差を $\sigma(\hat{y})$ 及び $\sigma(\hat{p}_y)$ とすると，Kennard の不等式 (4.9) から，

$$\epsilon(\hat{x})\eta(\hat{p}_x) \geq \sigma(\hat{y})\,\sigma(\hat{p}_y) \quad \geq \quad \frac{\hbar}{2} \tag{9.17}$$

がえらる．従って，von Neumann の測定モデルは，SQL を満たすだけでなく，Heisenberg の不等式 (8.15) も満たしている [25].

10　収縮状態測定のモデル

Yuen [38] の提案した収縮状態測定は次のモデルで実現でき，実際に SQL が打破されることが示された [16, 18, 19, 22]．測定対象，プローブ，相互作用の時間など，相互作用の形以外は von Neumann モデルと共通とし，相互作用は次の形で与えられるとする．

$$H_{\mathbf{SP}} = \frac{K\pi}{3\sqrt{3}}\{2(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{p}_x\hat{y}) + (\hat{x}\hat{p}_x - \hat{y}\hat{p}_y)\}. \tag{10.18}$$

この収縮状態測定のモデルは，測定過程

$$(L^2(\mathbf{R}), \xi, \exp[-i\frac{\pi}{3\sqrt{3}\hbar}\{2(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{p}_x\hat{y}) + (\hat{x}\hat{p}_x - \hat{y}\hat{p}_y)\}], \hat{y})$$

に対応する．このときインストルメントは，

$$\mathcal{I}(\Delta)\rho = \int_\Delta e^{-ix\hat{p}_x/\hbar}|\xi\rangle\langle\xi|e^{ix\hat{p}_x/\hbar}\mathrm{Tr}[E^{\hat{x}}(dx)\rho] \tag{10.19}$$

で与えられる．このモデルの誤差作用素と擾乱作用素は，$N(\hat{x}) = 0$, $D(\hat{p}_x) = -\hat{p}_y(t) - \hat{p}_x(t)$ となる．したがって，

$$\epsilon(\hat{x})\eta(\hat{p}_x) = 0 \tag{10.20}$$

となる．よって，このモデルは，SQL を満たさないだけでなく，Heisenberg の不等式 (4.8) も満たさない [25].

11　普遍的不確定性原理

それでは，任意の測定で成立する誤差と擾乱の関係はどのようなものであろうか．次の定理が一般的に成立する [28, 26, 29].

定理.（普遍的不確定性原理） 任意のインストルメントに対して，

$$\epsilon(A)\eta(B)+\epsilon(A)\sigma(B)+\sigma(A)\eta(B)\geq\frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle| \tag{11.21}$$

が成立する．ここで，$\langle\cdots\rangle$ は入力状態における期待値を表す．さらに，平均誤差と平均擾乱が対象の状態によらなければ，Heisenberg の不等式が成立する．

上の定理から，Heisenberg の不等式が破られる次の二つの典型的なケースがあり，それぞれのケースで全く新しいトレードオフの関係が成り立つ．

１．$\eta(B)=0$ となる場合，A の測定精度と B の標準偏差の間に次の関係が成り立つ．

$$\epsilon(A)\sigma(B)\geq\frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|. \tag{11.22}$$

2. $\epsilon(A)=0$ となる場合，B の擾乱と A の標準偏差の間に次の関係が成り立つ．

$$\sigma(A)\eta(B)\geq\frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|. \tag{11.23}$$

前者を無擾乱測定，後者を無雑音測定と呼ぶ．収縮状態測定のモデル (10.18) は，無雑音測定の例であり，重力波検出の量子限界を打破する測定の可能性を明かにした．

12　Wigner-Araki-Yanase の定理の定量化

1950 年代から 1960 年代初頭にかけて，Wigner, 荒木，柳瀬 によって，加法的保存量と非可換な物理量の測定に測定装置のサイズに依存する制約があることが明らかにされ [36, 1, 37]，この主張は Wigner-Araki-Yanase（WAY）の定理と呼ばれている．この定理で述べられている保存則のもとでの測定精度の限界について，無擾乱測定に関する不確定性関係 (11.22) から，一つの定量的表現が得られる [23, 27].

定理.（WAY 定理の定量化公式） 測定過程 $(\mathcal{K},\xi,U,M)$ に対して，対象のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の物理量 L_1 と $\mathcal{K}$ 上の物理量 L_2 が　$[U,L_1+L_2]=0$ かつ $[M,L_2]=0$ をみたすならば，対象の物理量 A に対する測定誤差に関して，

$$\epsilon(A)^2\geq\frac{|\langle[A,L_1]\rangle|^2}{4\sigma(L_1)^2+4\sigma(L_2)^2} \tag{12.24}$$

が成り立つ．

式 (12.24) から明らかなように，不可避な誤差は装置系が持つ保存量の分散に反比例する．精度の高い現実の装置は巨視的なサイズを持ち，大きな保存量を貯えているので，この限界を免れていると考えられる．一方，量子計算素子による集積回路の構成においては，要素的計算素子が巨視的でない単体として高い精度で機能するかは興味のある問題である

13　量子計算実現に関する量子限界

1994 年における Shor [33] の量子アルゴリズムの発見以来，量子計算機が物理的に実現可能かどうかを巡って，活発な研究が進められている．実現可能性の問題の主要部分は，環境や制御系との相互作用に由来するデコーヒーレンスと呼ばれる雑音の問題である．前述の Wigner-Araki-Yanase の定理から，量子状態制御一般において，制御系からのデコーヒーレンスが不可避であろうと考えられる理由として，自然界がもつ保存法則が考えられる．

現在，量子計算素子を実現するためのプロジェクトの背景にあるパラダイムは以下のように要約することができる [10].

(1) スピン 1/2 系のスピン成分で 1 量子ビットを表現.

(2) 1 量子ビットの回転ゲートと 2 量子ビットの CNOT を物理相互作用で実現.

(3) 実現の目標精度は誤り確率 $10^{-5} - 10^{-6}$.

スピン系の上の任意の回転や，CNOT はスピンを保存しないユニタリ変換なので，角運動量を保存する一般の物理的相互作用で実現するためには，WAY 定理と同等の誤差が生じるということがこのパラダイムから帰結される [24]．ただし，量子ゲートが必ずしも測定装置と同じ役割を果たすとは限らないし，SWAP ゲートのように角運動量を保存するゲートも存在するので，WAY 定理を定量化した不等式からただちにそのような誤り確率が計算できるとは限らないが，いくつかのゲートについて，うまい評価法が見つかっている．

例えば，Hadamard ゲートはスピンの方向を 90 度変換するゲートなので，角運動量を保存する相互作用だけでアダマール・ゲートを近似すると，その近似ゲートと他のスピンを保存するゲート，例えば，スワップ・ゲートを使って，角運動量（とりわけ，x 成分）を保存する相互作用だけで，σ_z を近似測定する回路を構成することができる．この回路は，WAY 定理の定量化公式の仮定をみたすので，不等式 (12.24) が得られる．この測定誤差 $\epsilon(\sigma_z)$ と Hadamard ゲートの誤り確率 P_e は，$\epsilon(\sigma_z) = 4P_e$ の関係を満たす．$[A, L_1] = [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$ および

$\sigma(L_1) = \sigma(\sigma_x) \leq 1$ より，最大誤り確率は

$$\max P_e \geq \frac{1}{4 + 4\sigma(L_x)^2} \tag{13.25}$$

を満たす [27]．ただし，$L_2 = L_x$ は制御系の角運動量の x 成分（$\hbar = 2$）を表す．

電磁場を制御系とする場合，制御系の状態はレーザー発振器から出たコヒーレント光で，スピンとの双極子相互作用でスピン系を制御すると考えられるので，円偏光の光が運ぶ角運動量とスピンの合成角運動量を保存する．そこで，制御光を円偏光をもつ平均光子数 $\langle N \rangle$ のコヒーレント光とすると，$\sigma(L_2) = \hbar\sqrt{\langle N \rangle}$ となり，次の不等式が得られる [27]．

$$\max P_e \geq \frac{1}{4 + 16\langle N \rangle} \tag{13.26}$$

同様の評価が，CNOT ゲート，Fredkin ゲート，Toffoli ゲート, NOT ゲートについても成り立つ [24, 7]．

14　量子集合論

1963 年にコーエンによって，連続体仮説が ZFC 集合論から独立な命題であることが証明された．1966 年にスコットとソロベイは，強制法と呼ばれるコーエンの証明法を集合論のブール代数値モデルによって再構成して，非常に扱いやすい理論に書き換えた．1981 年に竹内外史 [34] は，このブール代数値モデルの構成法を量子論理に一般化して，量子集合論を導入した．以下では，この構成法を任意の完備オーソモジュラー束 $\mathcal{Q}$ に拡張したモデル $V^{(\mathcal{Q})}$ について解説する．これは，$\mathcal{Q}$ が完備ブール代数の場合には，スコットとソロベイのブール代数値モデルに一致し，$\mathcal{Q}$ が量子論理の場合には，竹内外史の量子集合論に一致する．また，$\mathcal{Q} = \mathbf{2}(= \{0, 1\})$ の場合は，集合論の通常の 2 値論理による解釈に帰着する．

$\mathcal{Q}$ を完備オーソモジュラー束とする．$\mathcal{Q}$ を真理値の体系とするとき，$\perp$ は否定の真理値，$\wedge$ は連言の真理値，$\vee$ は選言の真理値を表す．一般に，条件文の真理値を表す演算 $\rightarrow$ は，多義的であるが，本稿では，$a \rightarrow b = a^{\perp} \vee (a \wedge b)$ によって定義する．

集合論の $\mathcal{Q}$ 値モデル（$\mathcal{Q}$ 値集合論）$V^{(\mathcal{Q})}$ は, その部分類 $V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})}$ に関する次の超限帰納法で定義される.（α は順序数を表わし，On は順序数の全体を表す.）

(i) $V_0^{(\mathcal{Q})} = \emptyset$.　(ii) $V_{\alpha+1}^{(\mathcal{Q})} = \{u |\ u : \mathcal{D}(u) \rightarrow \mathcal{Q},\ \mathcal{D}(u) \subseteq V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})}\}$.

(iii) 極限順序数 α に対して，$V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})} = \bigcup_{\beta<\alpha} V_{\beta}^{(\mathcal{Q})}$.　(iv) $V^{(\mathcal{Q})} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})}$.

$V^{(\mathcal{Q})}$ の元を $\mathcal{Q}$ 値論理における集合（$\mathcal{Q}$ 値集合）という．この定義から，$\mathcal{Q}$ 値集合 u は $\mathcal{Q}$ 値集合からなる集合 $\mathcal{D}(u)$ 上で定義された $\mathcal{Q}$ に値をもつ関数であり，

$u(x)$ は近似的に（性質のいい u については）$x \in u$ の真理値を表す．$\mathcal{Q}$ 値集合 $u,\ v$ に対して，原子命題 $u = v$ と $u \in v$ の真理値が次のように定められる．

(i) $[\![u = v]\!] = \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} (u(u') \to [\![u' \in v]\!]) \wedge \bigwedge_{v' \in \mathcal{D}(v)} (v(v') \to [\![v' \in u]\!])$.

(ii) $[\![u \in v]\!] = \bigvee_{v' \in \mathcal{D}(v)} (v(v') \wedge [\![u = v']\!])$.

集合論の論理式 ϕ は原子論理式と論理記号 $\neg, \wedge, \vee, \to, (\forall x \in y), (\exists x \in y)\ (\forall x)$, $(\exists x)$ から構成される．特に，量化記号として $(\forall x \in y)$ および $(\exists x \in y)$ の形のものだけを含む論理式を有界論理式と呼ぶ．集合論の命題 ϕ の真理値は原子命題の真理値と次の規則によって定められる．

(i) $[\![\neg\phi]\!] = [\![\phi]\!]^{\perp}$.　(ii) $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \wedge [\![\phi_2]\!]$.　(iii) $[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \vee [\![\phi_2]\!]$.

(iv) $[\![\phi_1 \to \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \to [\![\phi_2]\!]$.　(v) $[\![(\forall u' \in u)\phi(u')]\!] = \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} [\![\phi(u')]\!]$.

(vi) $[\![(\exists u' \in u)\phi(u')]\!] = \bigvee_{u' \in \mathcal{D}(u)} [\![\phi(u')]\!]$.　(vii) $[\![(\forall x)\phi(x)]\!] = \bigwedge_{u \in V^{(\mathcal{Q})}} [\![\phi(u)]\!]$.

(viii) $[\![(\exists x)\phi(x)]\!] = \bigvee_{u \in V^{(\mathcal{Q})}} [\![\phi(u)]\!]$

によって定まる．

２値論理にもとづく通常の集合の普遍類を V とすると，各 $a \in V$ に対応する $\mathcal{Q}$ 値集合 $\check{a}$ が存在する．実際，$\check{a}$ は $\mathcal{D}(\check{a}) = \{\check{x} |\ x \in a\}$ かつ $x \in a$ ならば $\check{a}(\check{x}) = 1$ となるものとして定まる．すると，通常の集合 a, b 間の関係は $\mathcal{Q}$ 値集合 $\check{a}, \check{b}$ の間の関係と同型である．つまり，$a \in b$，$a \notin b$，$a = b$，$a \neq b$ はそれぞれ $[\![\check{a} \in \check{b}]\!] = 1$，$[\![\check{a} \in \check{b}]\!] = 0$，$[\![\check{a} = \check{b}]\!] = 1$，$[\![\check{a} = \check{b}]\!] = 0$ と同等である．

こうしてできる $\mathcal{Q}$ 値集合論でどんな命題が成立しているかを研究することは，基本的重要性をもつ．$\mathcal{Q}$ が完備ブール代数 $\mathcal{B}$ の場合は，ZFC の定理から $V^{(\mathcal{B})}$ で真な命題への次の移行原理が成り立つ：論理式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ が ZFC 集合論で証明可能なら，任意の $u_1, \ldots, u_n \in V^{(\mathcal{B})}$ に対して，$[\![\phi(u_1, \ldots, u_n)]\!] = 1$ が成り立つ．

$\mathcal{Q}$ が分配的でない場合には，上の移行原理は成立しない．たとえば，等号の推移律，代入法則などの最も基本的な性質でさえ一般に成立しない．しかし，命題間の同時決定可能性の概念を持ち込むことにより，$\mathcal{Q}$ 値集合論が実は極めて豊かな構造をもっていることがわかる．$\mathcal{Q}$ の部分集合でその任意の２元が互いに交換可能であるものを可換系という．$\mathcal{Q}$ 値集合 $u_1, \ldots, u_n$ に対して，これらを構成するために用いた $\mathcal{Q}$ の元の集合を $L(u_1, \ldots, u_n)$ とする．$\mathcal{Q}$ の元 p で $L(u_1, \ldots, u_n)$ のすべての元と可換で，$p \wedge L(u_1, \ldots, u_n)$ が可換系になる最大の p を $\underline{\vee}(u_1, \ldots, u_n)$ で表す．すると，一般の完備オーソモジュラー束 $\mathcal{Q}$ に対して，次の移行原理が成立する：有界論理式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ が ZFC 集合論で証明可能なら，任意の $u_1, \ldots, u_n \in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，$[\![\phi(x_1, \ldots, x_n)]\!] \geq \underline{\vee}(u_1, \ldots, u_n)$ が成り立つ [30, 31]．

$V^{(\mathcal{Q})}$ の自然数の全体は $\check{\omega}$ に対応し，有理数の全体は $\check{\mathbf{Q}}$ に対応する．$V^{(\mathcal{Q})}$ の実数の全体 $\mathbf{R}_{\mathcal{Q}}$ は，$V^{(\mathcal{Q})}$ で定義される有理数のデデキント切断の全体として定義される．すると，$[\![\check{\mathbf{R}} \subseteq \mathbf{R}_{\mathcal{Q}}]\!] = 1$ となる．

$\mathcal{Q}$ が状態空間 $\mathcal{H}$ をもつ量子力学系 $\mathbf{S}$ の量子論理（射影作用素からなる束）のとき，$[\![u \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}}]\!] = 1$ となる u に対して，$E_\lambda = [\![u \le \check{\lambda}]\!]$ は射影作用素の族として単位の分解になり，u は自己共役作用素 $\hat{u} = \int_{\mathbf{R}} \lambda\, dE_\lambda$ と一対一に対応する．よって，この関係により $V^{(\mathcal{Q})}$ の実数と量子力学系 $\mathbf{S}$ の物理量が一対一に対応する．つまり，量子物理量とは量子集合論における実数のことであり,「物理量 A の値は λ 以下である」という観測命題の真理値は量子集合論の命題 $A \le \check{\lambda}$ の真理値 $[\![A \le \check{\lambda}]\!]$ のことである．このことから，von Neumann の公理 1 と公理 2 を量子集合論というより上位の理論に還元することができる．したがって，量子集合論によって統一的に量子力学の解釈を拡張することができ，量子力学における整合的な実在像を記述するのに重要な役割を果たすことが期待できる．

参考文献

[1] H. Araki and M. M. Yanase, Measurement of quantum mechanical operators, Phys. Rev. **120** (1960), 622–626.

[2] V. B. Braginsky, Yu. I. Vorontsov, and K. S. Thorne, Quantum nondemolition measurements, Science **209** (1980), 547–557.

[3] C. M. Caves, Defense of the standard quantum limit for free-mass position, Phys. Rev. Lett. **54** (1985), 2465–2468.

[4] C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg, and M. Zimmermann, On the measurement of a weak classical force coupled with a quantum mechanical oscillator, I, Issues of principle, Rev. Mod. Phys. **52** (1980), 341.

[5] E. B. Davies and J. T. Lewis, An operational approach to quantum probability, Commun. Math. Phys. **17** (1970), 239–260.

[6] W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, Z. Phys. **43** (1927), 172–198.

[7] T. Karasawa and M. Ozawa, Conservation-law-induced quantum limits for physical realizations of the quantum not gate, Phys. Rev. A **75** (2007), 032324.

[8] E. H. Kennard, Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen, Z. Phys. **44** (1927), 326–352.

[9] G. Lüders, Über die Zustandsänderung durch den Messprozess, Ann. Phys. (Leipzig) (6) **8** (1951), 322–328.

[10] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum computation and quantum information, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[11] M. Ozawa, Conditional expectation and repeated measurement of continuous quantum observables, Probability Theory and Mathematical Statistics, Lecture Notes in Math. **1021** (Berlin) (K. Itô and J. V. Prohorov, eds.), Springer, 1983, pp. 518–525.

[12] ———, Quantum measuring processes of continuous observables, J. Math. Phys. **25** (1984), 79–87.

[13] ———, Concepts of conditional expectations in quantum theory, J. Math. Phys. **26** (1985), 1948–1955.

[14] ———, Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. **21** (1985), 279–295.

[15] ———, On information gain by quantum measurements of continuous observables, J. Math. Phys. **27** (1986), 759–763.

[16] ———, Measurement breaking the standard quantum limit for free-mass position, Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 385–388.

[17] ———, Measuring processes and repeatability hypothesis, Probability Theory and Mathematical Statistics, Lecture Notes in Math. 1299 (Berlin) (S. Watanabe and Yu. V. Prohorov, eds.), Springer, 1988, pp. 412–421.

[18] ———, Realization of measurement and the standard quantum limit, Squeezed and Nonclassical Light (New York) (P. Tombesi and E. R. Pike, eds.), Plenum, 1989, pp. 263–286.

[19] ———, Quantum mechanical models of position measurements, Phys. Rev. A **41** (1990), 1735–1737.

[20] ———, Canonical approximate quantum measurements, J. Math. Phys. **34** (1993), 5596–5624.

[21] ———, Mathematical characterizations of measurement statistics, Quantum Communications and Measurement (New York) (V. P. Belavkin, O. Hirota, and R. L. Hudson, eds.), Plenum, 1995, pp. 109–117.

[22] ———, Controlling quantum state reduction, Phys. Lett. A **282** (2001), 336–342.

[23] ———, Conservation laws, uncertainty relations, and quantum limits of measurements, Phys. Rev. Lett. **88** (2002), 050402–(1–4).

[24] ———, Conservative quantum computing, Phys. Rev. Lett. **89** (2002), 057902–(1–4).

[25] ———, Position measuring interactions and the Heisenberg uncertainty principle, Phys. Lett. A **299** (2002), 1–7.

[26] ———, Physical content of Heisenberg's uncertainty relation: limitation and reformulation, Phys. Lett. A **318** (2003), 21–29.

[27] ———, Uncertainty principle for quantum instruments and computing, Int. J. Quant. Inf. **1** (2003), 569–588.

[28] ———, Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement, Phys. Rev. A **67** (2003), 042105–(1–6).

[29] ———, Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements, Ann. Phys. (N.Y.) **311** (2004), 350–416.

[30] ———, Transfer principle in quantum set theory, J. Symbolic Logic **72** (2007), 625–648.

[31] ———, in preparation.

[32] H. P. Robertson, The uncertainty principle, Phys. Rev. **34** (1929), 163–164.

[33] P. W. Shor, Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring, Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Los Alamitos, CA) (G. Goldwasser, ed.), IEEE Computer Society Press, 1994, pp. 124–134.

[34] G. Takeuti, Quantum set theory, Current Issues in Quantum Logic (New York) (E. G. Beltrametti and B. C. van Fraassen, eds.), Plenum, 1981, pp. 303–322.

[35] J. von Neumann, Mathematische grundlagen der quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932.

[36] E. P. Wigner, Die Messung quntenmechanischer Operatoren, Z. Phys. **133** (1952), 101–108.

[37] M. M. Yanase, Optimal measuring apparatus, Phys. Rev. **123** (1961), 666–668.

[38] H. P. Yuen, Contractive states and the standard quantum limit for monitoring free-mass positions, Phys. Rev. Lett. **51** (1983), 719–722, [see also ibid. p. 1603].

[39] ———, Characterization and realization of general quantum measurements, Proc. 2nd Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics (Tokyo) (M. Namiki *et. al.*, ed.), Physical Society of Japan, 1987, pp. 360–363.