離散群のエルゴード理論の諸相

木田 良才 (東京大学)

2018年3月19日

学部の数学から

(1) ユニタリ行列の対角化

(2) フーリエ級数展開: $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$.

どちらも, あるユニタリ表現の「既約表現への分解」と見なせる.

群のユニタリ表現

$\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間とする.

$\mathcal{H}$ の**ユニタリ作用素** $=$ $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への線型同型で内積を保つもの.

群 G の $\mathcal{H}$ への**ユニタリ表現** $=$ G からユニタリ作用素の群への準同型.

既約な表現 $=$ G-不変な閉部分空間が $\{0\}$ と $\mathcal{H}$ のみである表現.

既約表現への分解

(1) ユニタリ行列の対角化 $=$ $\mathbb{Z}$ の有限次元表現の分解

(2) フーリエ級数展開: $f \in L^2(\mathbb{T}) \rightsquigarrow f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}$

$=$ シフト表現 $\mathbb{T} \curvearrowright L^2(\mathbb{T})$ の分解

1930, 40頃: コンパクト群, 可換群に対する一般論

Mackey's question (1957)

コンパクト群と可換群 G については,

$$\boxed{G\text{ の表現} \quad \longleftrightarrow \quad \text{「既約表現の空間 }\widehat{G}\text{」上の}\textbf{測度}}$$

例. $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T} = \{|z| = 1\}$. $\mathbb{T}$ 上の測度 $\mu \rightsquigarrow$ ユニタリ作用素 U_μ :

$$(U_\mu f)(z) = zf(z), \quad f \in L^2(\mathbb{T}, \mu).$$

これは一般の局所コンパクト群 G に対しても可能か?

Glimm's dichotomy (1961)

(1) $\widehat{G}$ が**標準ボレル空間**ならば O.K.

(2) そうでなければ, $\widehat{G}$ の元を常識的にパラメータ付けることは**不可能**.
さらに G の表現で既約表現への分解の仕方が**複数ある**ものが存在する
(Dixmier 1964).

(1) の G は**テイム**であるといい, (2) の G は**ワイルド**であるという.

具体例 (Dixmier, Kirillov, Harish-Chandra, Thoma,...)

(A) 連結な位相群に対し,

コンパクト群, 可換群, べき零リー群, 半単純リー群はテイム.

(B) 可算離散群 G に対し,

$$G \text{ はテイム} \iff G \text{ は有限指数の可換部分群を含む.}$$

$\rightsquigarrow$ **興味深い可算群の多くはワイルド!**

1961年

ワイルド

Glimm (1961)

テイム

ユニタリ表現とフォンノイマン（vN）環

群 G の $\mathcal{H}$ への表現 π に対し，

$$\pi(G)' := \{\, T \in B(\mathcal{H}) \mid \forall g \in G \;\; \pi(g)T = T\pi(g) \,\}.$$

π の性質は vN 環 $\pi(G)'$ に反映される．例えば:

$$\text{分解 } \pi = \int_X^{\oplus} \pi_x \, d\mu(x) \;\; \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \;\; \text{可換部分 vN 環 } A \subset \pi(G)'$$

$$\text{すべての } \pi_x \text{ が既約} \iff A \text{ は maximal abelian (masa)}$$

$\boxed{\text{vN 環 } \pi(G)' \text{ は } \pi \text{ の複雑さを測る尺度である．}}$

フォンノイマン環の一般論 (Murray-von Neumann 1936/43)

$\{$I 型環$\}$ $\quad\subset\quad$ $\{$AFD 環 (approx. finite dim)$\}$

vN 環の中で最もシンプル　　　　次にシンプル

Glimm (61): G はテイム $\Longleftrightarrow \forall\pi\ \pi(G)'$ は I 型.

Connes (76), Schwartz (63), 羽毛田-富山 (67),...:

可算離散群 G に対し,

G は**従順** (amenable) $\Longleftrightarrow$ $\forall\pi\ \pi(G)'$ は AFD.

1961年

ワイルド

Glimm (1961)

テイム

1976年

超ワイルド

非従順群

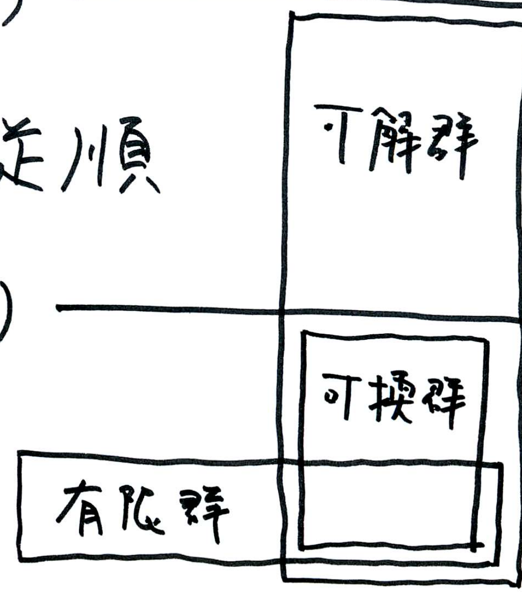
- 自由群
- $SL_3(\mathbb{Z})$
- MCG
- ⋮

Connes (1976)

ワイルドだけど従順

Glimm (1961)

テイム



同値関係とフォンノイマン環

G の表現 π を既約表現に直積分分解する: $\pi = \int_X^{\oplus} \pi_x \, d\mu(x)$.
X 上の同値関係 $\mathcal{R}$ が定まる: $x\mathcal{R}y \overset{\text{def}}{\iff} \pi_x \simeq \pi_y$.

竹崎 (1963): $\mathcal{R}$ は組 $L^\infty(X) \subset \pi(G)'$ から読み取れる.

表現のことを忘れると...

Feldman-Moore (1977): **測度付き離散同値関係**を導入.

$$\text{測度付き離散同値関係 } \mathcal{R} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \text{vN 環の組 } A \subset M.$$

ここで A は M の masa である条件を満たすもの.

vN 環の組 $A \subset M$ の例

$X = \{1, 2, 3\}$. $\mathcal{R} =$ 3 点すべて同値. すると,

$$M = M_3(\mathbb{C}), \quad A = \{\text{対角行列}\}.$$

一般に $\mathcal{R} \subset X \times X$ であり, $\mathcal{R}$ は "積" $(x, y)(y, z) = (x, z)$ をもつ.

$$M = \{\mathcal{R}\ \text{上の関数}\}, \quad A = \{\Delta\ \text{上の関数}\}.$$

測度付き同値関係の例 (私の研究対象)

可算群による測度を保つ作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ に対し,

$$\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X} = \{ (\gamma x, x) \in X \times X \mid \gamma \in \Gamma, \, x \in X \} \quad \text{(軌道同値関係)}.$$

ここ30年ほどでの進展

具体例に対し，その興味深い性質を見出す技術が爆発的に進歩した.

Mackey's virtual group viewpoint (1966)

群 G に対し,

$$\text{部分群 } H < G \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \text{推移的作用 } G \curvearrowright G/H.$$

一般の作用 $G \curvearrowright X$ は G の部分群みたいなもの.

モストウ型剛性とその一般化

G をある単純リー群 ($PSL_{n\geq 3}(\mathbb{R})$ など) とし, Γ_i を G の lattice とする.

$$\textbf{Mostow-Margulis 剛性}: \quad \forall\pi \quad \begin{array}{ccc} G & \overset{\exists}{\simeq} & G \\ \cup & & \cup \\ \Gamma_1 & \overset{\pi}{\simeq} & \Gamma_2 \end{array}$$

Zimmer (1980): 推移的作用 $G \curvearrowright G/\Gamma_i$ による言い換えを経て, 確率測度を保つ G の作用に一般化.

系. 自由な作用に限ると, 軌道同値関係から作用は復元可能. 正確には:

確率測度を保つ自由な作用 $G \curvearrowright X$, $G \curvearrowright Y$ に対し,

$$\mathcal{R}_{G\curvearrowright X} \simeq \mathcal{R}_{G\curvearrowright Y} \;\Rightarrow\; G \curvearrowright X \simeq G \curvearrowright Y \text{ (共役)}.$$

木田 (2008/10): 曲面の写像類群に対してもこの話は展開できる.

曲面 S の写像類群の簡単なプロフィール

定義は MCG(S) = Homeo(S)/ 連続変形.

- 個性抜群な可算群です.
- $SL_n(\mathbb{Z})$ の親戚です. $\leftarrow$ MCG(トーラス) $\simeq SL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$
- でも "ご先祖様" $SL_2(\mathbb{Z})$ だけは特別です.
- モストウ型剛性 (genus(S) ≥ 2 のとき, Ivanov 1997).
- その一般化, 軌道同値関係から作用が復元可能 (木田).
- 復元可能性が示された**最初**の可算群.

  $\leftarrow$ Margulis 超剛性の幻影を打ち破った!

群のユニタリ表現の応用

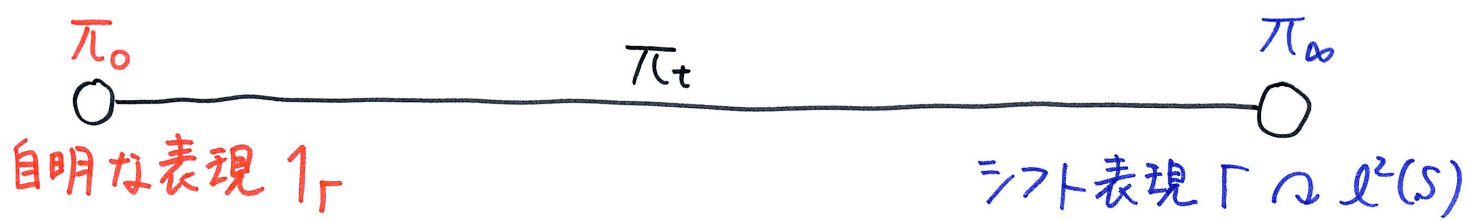
いくつかの具体的な群は，その表現がある特質をもつ (変形・カズダン性).

それらを組み合わせ，群の問題に応用する技術が近年発達してきた.

例 (綿谷 82). $SL_3(\mathbb{R})$ の lattice は融合積に分解しない.

表現の変形

Schoenberg (38): Γ $\curvearrowright$ (S, d) を可算な距離空間への等長作用とする.
$(S, d) \hookrightarrow$ 実ヒルベルト空間ならば, Γ の表現の変形 $(\pi_t)_{t>0}$ が存在して



(π_t の表現空間の内積: $\langle \delta_x, \delta_y \rangle_t = \exp(-td(x,y)^2)$, $x, y \in S$).

Haagerup (79), 綿谷 (82): (ツリー, $\sqrt{d}$) $\hookrightarrow$ 実ヒルベルト空間.

応用 (綿谷 + カズダン性). $SL_3(\mathbb{R})$ の lattice は融合積に分解しない.

カルタン部分環の位置の特定

対応 $\mathcal{R} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} A \subset M$ における A を M の**カルタン部分環**という.

問. M の自己同型は A を保つか? 他に M のカルタン部分環はあるか?

Popa (2006): $SL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^2 \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$.

- 非従順な世界での**最初**の結果.
- $SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ の表現がもつ二つの側面 (変形とカズダン性).
- Connes, Popa (1986) らによる vN 環の表現論.

他にも多数の例: Chifan, Houdayer, Ioana, 小沢, Peterson, Vaes,...

W^*-**superrigidity** (W^*-環 = vN 環 mod 境 56)

特別な群の作用はそれに付随する vN 環から復元可能である:

融合積 $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z}) *_P SL_3(\mathbb{Z})$, $P = \{ (a_{ij}) \mid a_{31} = a_{32} = 0 \}$ を作る.
Λ を可算群とする (**他に仮定はしない**).
確率測度を保つ自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$, $\Lambda \curvearrowright Y$ に対し,

$$\boxed{\Gamma \ltimes L^\infty(X) \simeq \Lambda \ltimes L^\infty(Y)}$$

$$\Downarrow \spadesuit$$

$$\boxed{\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X} \simeq \mathcal{R}_{\Lambda \curvearrowright Y}}$$

$$\Downarrow \heartsuit$$

$$\boxed{\Gamma \curvearrowright X \simeq \Lambda \curvearrowright Y \text{ (共役). 特に } \Gamma \simeq \Lambda.}$$

$\spadesuit$: Houdayer-Popa-Vaes (2013), $\heartsuit$: 木田 (2011).

1976年

超ワイルド

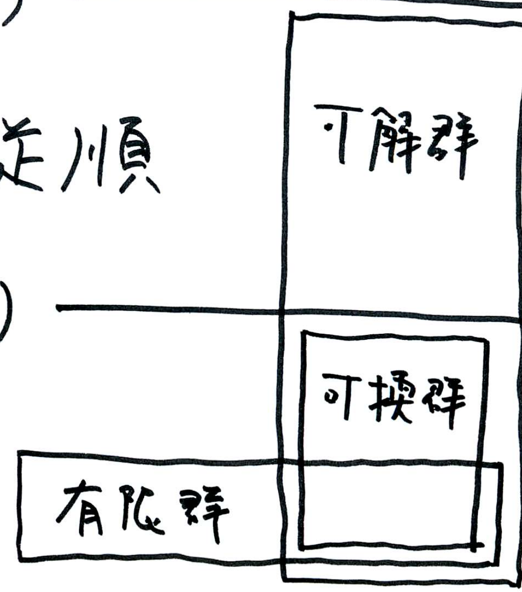
非従順群
- 自由群
- $SL_3(\mathbb{Z})$
- MCG
- ⋮

Connes (1976)

ワイルドだけど従順

Glimm (1961)

テイム



現在

OE & Cartan rigidity

超ワイルド

Connes (1976)

ワイルドだけど従順

Glimm (1961)

テイム