集合論の宇宙
Universe と Multiverse

薄葉 季路

早稲田大学理工学術院

日本数学会 2017 年度年会 首都大学東京

2017 年 3 月 24 日

概要

- 巨大基数, 強制法などの現代集合論の紹介
- Universe, Multiverse の考え方の紹介
- 独立命題の考え方
- (超数学的種々の困難を避けるため, 種々の概念は正確さを犠牲にして多分に単純化しています)

お品書き

ZFC 公理系

- 集合論の標準的な公理系
- 現代数学の大部分は ZFC 公理系の下で行える.
- 数学的に証明可能 $\approx$ ZFC から証明可能

(公理的) 集合論の目的

- 数学の基礎づけ.
- 数学を行うためのフレームワークを与える.
- 集合論観点からの数学的構造の研究.
  - 実数構造, ○○を満たす数学的構造の濃度...
- 集合論手法の他の分野への応用.
  - 一般位相空間, 抽象代数,...
- 集合の宇宙の構造を解明する.

集合の宇宙

- 集合すべてからなる集まりを (集合論の) 宇宙と呼び, V で表す.
- V は集合ではない.

Fact (V の構造 (von Neumann 階層))

V は, 空集合から始めて, その冪集合を取る操作を超限回取ることで構成される:

1. $V_0 = \emptyset$.
2. α が順序数の時, V_α が定義されているとして
   $V_{\alpha+1} = V_\alpha$ の冪集合 $\mathcal{P}(V_\alpha)$.
3. α が極限順序数の時, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$.
4. V は $\bigcup_\alpha V_\alpha$ である.

- V では ZFC の各公理が成り立つ.
- 特に, 通常の数学的オブジェクトはすべて V の要素とみなせる.

独立命題

Fact

- *(Gödel) ZFC+CH(連続体仮説)は無矛盾である.*
- *(Cohen) ZFC+ $\neg$CH は無矛盾である.*

- したがって, 宇宙 V で CH が成り立っているかどうかは ZFC から決定できない.

現在数学は, 基本的に集合論 (ZFC) をベースに行われている.
$\Rightarrow$ CH は数学的に真とも偽とも決定できない命題である.

Question

ZFC の独立命題が存在する, という事実をどう考えればよいか?

Universe View

1. 唯一の, 究極の集合論の宇宙 (the Universe) が存在する.
2. 究極的な真偽とは, The Universe における真偽である.
3. 独立命題が存在するのは, 我々がその究極の宇宙を把握するだけの能力を現状欠いているに過ぎない.
4. しかしながら, 究極の宇宙の全貌は集合的観点から把握できるはずである.
5. 集合論の研究とは "the Universe の研究" である.
6. (Gödel) 巨大基数公理は the Universe では真であり, 巨大基数公理を仮定することで the Universe のことがよりよく判るはずである.
7. (Gödel) the Universe では CH は偽であろう ($2^{\aleph_0} = \aleph_2$ か?)

巨大基数

- 最小の無限基数 $\aleph_0$ が持つ性質を一般化する形で定義される.
- ある意味で "あってもおかしくない" 基数.
- 非常に大きな基数であるゆえに, ZFC からその存在は証明できない.

集合 x に対して, その濃度を $|x|$ で表すことにする.

Fact

可算無限濃度 $\aleph_0$ は次の性質を持つ:

1. x が有限集合 ($|x| < \aleph_0$) ならばその冪集合 $\mathcal{P}(x)$ も有限集合 ($|\mathcal{P}(x)| < \aleph_0$) である.
2. 有限集合からなる有限集合族の和集合も有限集合である: $|x_i| < \aleph_0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow \left|\bigcup_{i \leq n} x_n\right| < \aleph_0$.

到達不能基数

Definition (Hausdorff)

次を満たす非可算無限基数 κ を到達不能基数という:

1. $|x| < \kappa$ ならば $|\mathcal{P}(x)| < \kappa$.
2. $|I| < \kappa$ かつ $|x_i| < \kappa$ $(i \in I)$ ならば $\left|\bigcup_{i \in I} x_i\right| < \kappa$.

Remark

到達不能基数の存在はグロタンディーク宇宙と同値である.

1. U がグロタンディーク宇宙ならば, $|U|$ は到達不能基数である.
2. 到達不能基数 κ が存在するならば, $|U| = \kappa$ となるグロタンディーク宇宙が存在する: V_κ がグロタンディーク宇宙になる.

可測基数

Fact

集合ブール代数 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 上に非単項超フィルター U が存在する:

1. $\mathbb{N} \in U$, $\emptyset \notin U$.
2. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $\{n\} \notin U$.
3. $X \in U$, $X \subseteq Y \Rightarrow Y \in U$.
4. $X_0, \ldots, X_n \in U \Rightarrow \bigcap_{i \leq n} X_i \in U$.
5. $X \in U$ または $\mathbb{N} \setminus X \in U$.

可測基数

Definition (Ulam)

非可算基数 κ が次を満たすとき, κ は可測基数と呼ばれる: 任意の濃度が κ である集合 S に対して, $\mathcal{P}(S)$ 上の κ-完備非単項超フィルター U が存在する.

1. $S \in U$, $\emptyset \notin U$.
2. 任意の $s \in S$ について, $\{s\} \notin U$.
3. $X \in U$, $X \subseteq Y \Rightarrow Y \in U$.
4. $|I| < \kappa$, $X_i \in U$ $(i \in I) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} X_i \in U$.
5. $X \in U$ または $S \setminus X \in U$.

- もともと可測基数は測度問題の考察から得られた基数である.

Fact

次を満たす $\mathbb{R}$ 上の完全加法的測度 $\mu : \mathbb{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ は存在しない:

1. $\mu(\mathbb{R}) = \infty$, $\mu(\mathbb{R}) = 0$.
2. 勝手な $r \in \mathbb{R}$ に対して $\mu(X) = \mu(\{x + r : x \in X\})$.
3. $X_0, X_1, \ldots$ が互いに素ならば $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(X_i)$.

測度問題 (Banach)

非可算集合 S 上に次を満たす完全加法的測度 $\mu : \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$ は存在するか?

1. $\mu(S) = 1$, $\mu(\emptyset) = 0$.
2. 任意の $s \in S$ に対して $\mu(\{s\}) = 0$.
3. $X_0, X_1, \ldots$ が互いに素ならば $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(X_i)$.

Fact (Ulam)

1. 可測基数 κ が存在するならば, 濃度 κ の集合上に上のような完全加法的測度が存在する.
2. もし上のような完全加法的測度を持つ集合が存在するならば, 可測基数に近い基数が存在する *(詳しくは後述)*
3. *(Solovay)* 実際, $\mathbb{R}$ 上に上のような完全加法的測度が存在することがあり得る.

Fact

1. κ が可測基数ならば到達不能基数である.
2. κ が可測基数ならば, κ より小さい到達不能基数が κ 個存在する.

射影集合

- 実数の部分集合のうち, 簡単に定義可能な集合

Definition (Luzin, Sielpinski)

$\mathbb{R}^k$ 上の Σ^1_n, Π^1_n 集合を次のように帰納的に定義する:

1. $X \subseteq \mathbb{R}^k$ が $\Sigma^1_1 \iff X$ は $\mathbb{R}^{k+1}$ のボレル集合の $\mathbb{R}^k$ への射影として表せる.
2. $X \subseteq \mathbb{R}^k$ が $\Pi^1_1 \iff \mathbb{R}^k \setminus X$ が Σ^1_1 集合.
3. $X \subseteq \mathbb{R}^k$ が $\Sigma^1_{n+1} \iff X$ は $\mathbb{R}^{k+1}$ の Π^1_n 集合の $\mathbb{R}^k$ への射影として表せる.
4. $X \subseteq \mathbb{R}^k$ が $\Pi^1_{n+1} \iff \mathbb{R}^k \setminus X$ は Σ^1_{n+1}.

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^1_n \cup \Pi^1_n$ の要素を射影集合と呼ぶ.

Fact

1. $\Sigma^1_n \cup \Pi^1_n \subsetneq \Sigma^1_{n+1} \cap \Pi^1_{n+1} \subsetneq \Sigma^1_{n+1}, \Pi^1_{n+1}$.
2. *(Suslin)* $X \subseteq \mathbb{R}^k$ がボレル $\iff$ X は Σ^1_1 かつ Π^1_1.
3. *(Luzin)* 任意の Σ^1_1 集合はルベーグ可測, よって Π^1_1 集合もルベーグ可測.
4. *(Suslin)* 任意の Σ^1_1 集合は高々可算か, カントール集合のコピーを含み, 特に連続体濃度を持つ *(*弱い連続体仮説*)*
5. *(*経験的事実*)* 実解析で現れる大抵の実数の集合は Σ^1_2, Π^1_2 あたりの非常に低いレベルの射影集合である.

Question

Σ^1_2, Π^1_2 集合のルベーグ可測性はどうか?もっと上の集合はどうか？Π^1_1 集合に関しては弱い連続体仮説は成り立つか?

Fact (Gödel)

1. Σ^1_2 かつ Π^1_2 集合で非可測な集合が存在することは無矛盾である.
2. Π^1_1 集合に対する弱い連続体仮説の否定は無矛盾である.

Fact (Solovay)

すべての射影集合がルベーグ可測, かつ射影集合に対する弱い連続体仮説が成り立つことは無矛盾である.

巨大基数と射影集合

Fact (Woodin)

もし *Woodin* 基数が n 個存在し, かつそれより大きい可測基数が存在するならばすべての Σ^1_{n+1} 集合はルベーグ可測であり, かつ弱い連続体仮説が成り立つ.

- Woodin 基数: 可則基数よりずっと強い巨大基数のひとつ.
- その他, 巨大基数が存在するだけで, (実数の射影構造に関する) 様々な命題の真偽が決定されることが判明した.
- (Gödel) 巨大基数公理は the Universe では真であり, 巨大基数公理を仮定することで the Universe のことがよりよく判るはずである.
- Gödel の予想の傍証.
- では, 連続体仮説は?

集合論のモデル

Definition

1. 集合 M が推移的 $\iff \forall x \in M \forall y \in x\,(y \in M)$.
2. $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$: $\in$ と $=$ のみを用いて書かれている論理式,
   M: 推移的集合, $x_1, \ldots, x_n \in M$.
   $M \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ($\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が M で真) $\iff$ φ 中の $\exists v, \forall v$ を $\exists v \in M, \forall v \in M$ と書き換えた論理式 $\varphi'(x_1, \ldots, x_n)$ が真であること.
3. 推移的集合 M が ZFC のモデル $\iff$ ZFC の各公理が M で真である:
   - (対の公理) $x, y \in M \Rightarrow \{x, y\} \in M$.
   - (分出公理) $x \in M$, 論理式 $\varphi(v)$ に対して $\{y \in x : M \models \varphi(y)\} \in M$.
   - (冪集合公理) $x \in M \Rightarrow \exists y \in M \forall z \in M(z \subseteq x \iff z \in y)$.

- ZFC の推移的モデルは, “小宇宙”, 宇宙 V の “おもちゃ”, “模型” のようなものであり, ZFC の推移的モデルの中のみで数学は展開可能である.
- 一方, 様々な ZFC の推移的モデルが存在しえるので, 各モデルが必ずしも V の構造を反映しているわけではない.
- しかし, Levy の反映定理, および, Löwenheim-Skolem の定理により, V に必要なだけ “近い” 可算な推移的モデルが構成できる (と思ってよい).

無矛盾性?

- 命題 φ が無矛盾 $\iff$ ZFC+φ から矛盾が導かれない

  $\iff$ ZFC+φ から矛盾を導く形式的証明図が存在しない.
- 無矛盾性を示すには:
  - 形式的証明を精査して, 実際に矛盾が導かれないことを示す.
  - ZFC+φ を満たすモデルを構成する, つまり $M \models ZFC + \varphi$ となる M が作れることを示す.
- 現代的な集合論における, 殆どすべての独立性証明はモデルを構成することで行われている.
  - (Gödel) ZFC+CH のモデルが構成できる.
  - (Cohen) ZFC+¬CH のモデルが強制法によって構成できる.

強制法

- コーエンによって開発された, ZFC のモデルを拡張, 構成する一般的方法.

Definition

1. $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ が *poset* $\iff$ $\leq$ は $\mathbb{P}$ 上の推移的かつ反射的な関係.
2. $D \subseteq \mathbb{P}$ が *dense* $\iff$ $\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in D\,(q \leq p)$.
3. $F \subseteq \mathbb{P}$ がフィルター $\iff$
    1. $F \neq \emptyset$.
    2. $p \in F,\ p \leq q \Rightarrow q \in F$.
    3. $p, q \in F \Rightarrow \exists r \in F\,(r \leq p, q)$.

ジェネリックフィルター

Definition

M: ZFC の推移的モデル, $\mathbb{P} \in M$.

フィルター $G \subseteq \mathbb{P}$ が M-ジェネリック

$\iff \forall D \in M\,(D$ が $\mathbb{P}$ の dense set $\Rightarrow G \cap D \neq \emptyset)$.

Remark

1. 一般に M-ジェネリックフィルターが存在するとは限らず, 存在してもそれは一般に M の要素にはならない.
2. M が可算モデルならば, 任意の poset $\mathbb{P} \in M$ に対して M-ジェネリックフィルターが存在する (が M の要素とは限らない)

強制拡大

Definition

M: ZFC の推移的モデル, $\mathbb{P} \in M$: poset, $G \subseteq \mathbb{P}$: M-ジェネリックフィルター. このとき, 次を満たす ZFC の推移的モデル N が存在する:

1. $M \subseteq N$.
2. $G \in N$.
3. N は 1.,2. を満たす推移的モデルの中で最小なもの.

N を M の $\mathbb{P}$ による**強制拡大**と呼び, $M[G]$ で表すことにする. 逆に, M を $M[G]$ の**基礎モデル**と呼ぶ.

Fact (Cohen)

M: ZFC の推移的モデル, $\mathbb{P} \in M$: poset, G: M-ジェネリックフィルター このとき, M の強制拡大 $M[G]$ が存在する.

- $M[G]$ の構造は $\mathbb{P}$ の代数的構造に大きく依存する.
- よって, $\mathbb{P}$ をうまく選ぶことで $M[G]$ の構造をコントロールすることが可能になる.
- "独立であることを示す" $\approx$ "モデルを作る" $\approx$ "poset の解析"

Fact (Cohen)

M: ZFC の推移的モデル.
この時, $\mathbb{P} \in M$ で, すべての M-ジェネリックフィルター G に対して $M[G]$ が連続体仮説の否定のモデルになるものが存在する.

- この $\mathbb{P}$ はコーエン強制と呼ばれ, $\mathbb{R}$ の位相的構造と密接に絡んでいることが知られている.

- 強制法は, 直ちに非常に強力な手法であることが明らかになり, 様々なモデルが強制法によって構成されていった.

Fact (Solovay)

M を ZFC+ "到達不能基数が存在する" の推移的モデルとする. このとき, poset $\mathbb{P} \in M$ で次を満たすものが存在する: G を M-ジェネリックフィルターとする.

1. *$M[G]$ は ZFC+ "すべての射影集合はルベーグ可測" + "射影集合に関する弱い連続体仮説" のモデルである.*
2. *$M \subseteq N \subseteq M[G]$ で, N は ZF+従属選択公理+ "すべての実数の集合はルベーグ可測" のモデルになるものが存在する.*

- その他, 様々な命題が独立であることが強制法によって証明された.

強制法と巨大基数

- Solovay の定理の前提にある ZFC+ “到達不能基数が存在する” のモデルの存在は ZFC から証明できない.
- しかし, このモデルの存在は実際必要不可欠であることが明らかになった.

Fact (Gödel)

もし *ZFC+* “すべての非可算 Π^1_1 集合がカントール集合のコピーを含む” のモデルが存在するならば, *ZFC+* “到達不能基数が存在する” のモデルが存在する.

Fact (Shelah)

もし *ZF+*従属選択公理+ “すべての Σ^1_3 集合がルベーグ可測である” モデルが存在するならば, *ZFC+* “到達不能基数が存在する” のモデルが存在する.

- Π^1_1 集合の弱い連続体仮説 $\iff$ 到達不能基数
- Σ^1_3 集合の可測性 $\iff$ 到達不能基数

その他, 数多くの独立命題 φ に対して,

φ を満たすモデルが存在する $\iff$ ある巨大基数が存在するモデルが存在する

といった現象が確認されており, 独立命題と "同値" となる巨大基数がいくつも発見された.

- 巨大基数が ad hoc なものでないことの証左
- Gödel の予想の部分的実現

Fact (Gödel)

ZFC+ “ Σ^1_2 かつ Π^1_2 集合でルベーグ非可測な集合が存在する” のモデルが存在する.

Fact (Martin-Solovay)

M: *ZFC* の推移的モデル
このとき *poset* $\mathbb{P} \in M$ で, 任意の *M*-ジェネリックフィルターに対して $M[G]$ が *ZFC*+ “すべての Σ^1_2 集合がルベーグ可測である” のモデルになるものが存在する.

この $\mathbb{P}$ はランダム強制と呼ばれ, $\mathbb{R}$ の測度論的構造を用いて定義されている.

測度問題と可測基数

Fact (Solovay)

1. もし $ZFC+$ "可測基数が存在する" のモデルが存在するならば, $ZFC+$ "$\mathbb{R}$ 上に完全加法的測度が存在する" を満たす強制拡大が存在する.
2. $ZFC+$ "$\mathbb{R}$ 上に完全加法的測度が存在する" のモデルが存在するならば, $ZFC+$ "可測基数が存在する" のモデルが存在する.

$\mathbb{R}$ 上に完全加法的測度が存在する $\iff$ 可測基数が存在する.

連続体仮説と巨大基数

Fact (Levy-Solovay)

もし *ZFC*+“可測基数 (あるいは何らかの巨大基数) が存在する” のモデルが存在するならば, *ZFC*+“可測基数 (あるいは何らかの巨大基数) が存在する”+*CH* を満たす強制拡大が存在する. さらに, *ZFC*+“可測基数 (あるいは何らかの巨大基数) が存在する”+*CH* の否定, を満たす強制拡大も存在する.

- 巨大基数が存在すれば, 連続体仮説の否定を witness する集合は, 射影集合のような簡単に構成できるものではないことがわかる.
- しかし, 巨大基数公理では連続体仮説の真偽は決定できない.

- 巨大基数が存在することで, 実数構造などの様々な命題が決定できることが分かった.
- 一方, Cohen による強制法によって, ZFC のモデルの一般的な構成法が確立された.
- それにより, 多くの ZFC からの (自然な) 独立命題が発見された (現在もされている).
    - 独立命題と巨大基数の本質的な関係の発見
- 巨大基数公理によって CH の真偽を決定できないことも発見された.
- このような状況は, 唯一無二の宇宙という考え方に疑問を投げかける.
- $\Rightarrow$ *Multiverse view*

Multiverse view

1. 集合論の世界は, いくつもの宇宙 (universe) の総体である多元宇宙 (the Multiverse) である.
2. Multiverse に属する各宇宙では様々な相反する命題が成り立っている (CH が成り立つ universe, $\neg$CH の universe, $\diamondsuit$, $\neg\diamondsuit$, $\ldots$)
3. 集合の宇宙の研究は各宇宙で何が成り立つかの研究である, つまり "集合論のモデルの研究" である.

独立命題の意味

Universe view

1. 各命題は真偽は the Universe での真偽である.
2. 独立命題の真偽も究極的には決まるはずである.

Multiverse view

1. 命題が独立であるのは, 単に "成り立つ universe" "成り立たない universe" が存在するだけである.
2. 命題の各 universe での真偽は定まるが, それが絶対的に真か偽かであることを問うのはあまり意味がない.

連続体仮説の真偽

Universe 的観点

- どちらかである．また，偽であることを示唆する現象もいくつか見つかっている．
  - 強制法公理
  - 強制法による絶対性の研究
- 何らかの "真であることが自然" な命題が見つかり，それが連続体仮説を決定してくれる．

Multiverse 的観点

- 強制法のような，連続体仮説の肯定否定を自由にコントロールするような理論が見つかっている．この理論が連続体仮説の答えである．

- 集合論の研究および強制法のテクニックが爆発的に発達した結果, 様々な命題が独立であり, 様々なモデルが構成可能あることが判明した.
- 集合論の "唯一無二の宇宙" をもはや想像できず, (the Univserse での) 絶対的真偽というものがもはや支持できない.
- 集合の世界とは, いくつもの universe(数学) の総体である the Multiverse である.
- "数学の基礎としての集合論" ではなく, "数学としての集合論" (集合論の代数化).
  - "どの命題が独立か", "どのような集合論のモデルが存在するか" は " どのような群が存在するか?" と同じような意味である.
  - 結局, 独立命題は単純に "成り立つモデル", "成り立たないモデル" が構成可能であるといっているだけ.

The Multiverse の形式化

- Multiverse を形式化し, multiverse の構造を調べる, という研究プログラムが盛んにおこなわれている:

Multiverse の条件

V: 適当な universe.

1. もし $M \subseteq V$ が *ZFC* の V で定義可能なモデルならば M も universe である.
2. 任意の poset $\mathbb{P} \in V$ に対して, V の $\mathbb{P}$ による generic extension $V[G]$ も universe である.
3. V が M の initial segment M_α となる universe M がある.
4. $V \in M$ で V は M で可算になる universe M がある.
5. $V \subseteq M$ で V は M で ill-founded になる universe M がある.
6. $V \subseteq M$ で $\mathbb{N}^V \neq \mathbb{N}^M$ となる universe M がある.

Generic Multiverse

- 強制拡大に注目した the Multiverse.
- 強制拡大を取る操作, およびその逆操作に関して閉じている.
- “すべての宇宙は強制法でつながっている”, “全ての宇宙は強制法で得られてる”multiverse.

Definition (Woodin)

ZFC の推移的モデルの集まり $\mathcal{M}$ が *Generic Multiverse* とは:

1. M があるモデル $N \in \mathcal{M}$ の基礎モデルならば $M \in \mathcal{M}$.
2. $M \in \mathcal{M}$ ならば, M の強制拡大はすべて $\mathcal{M}$ に属する.
3. $M, N \in \mathcal{M}$ ならば, $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{M}$ で $U_0 = M$, $U_n = N$, かつ U_{i+1} は U_i の強制拡大, あるいはその逆が成り立っている.

射影構造と multiverse

Fact (Woodin)

$\mathcal{M}$: *generic multiverse,*
もし "*Woodin* 基数が非有界に存在する" を満たすモデル $M \in \mathcal{M}$ が有るならば, 射影集合に関する命題 (*e.g.*, Σ^1_2 集合のルベーグ可則性) の真偽は, 全ての $N \in \mathcal{M}$ で一致する.

- もし巨大基数がないならば, このような現象は起きない.
- $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathcal{P}(\aleph_0)$ なので, 最近は $\mathcal{P}(\aleph_1)$ レベルの研究が盛んに行われている.

Generic mutiverse の順序構造

Fact

- *(Woodin) generic multiverse* は上向きに有向ではない*:*
- *(Fuchs-Hamkins-Reitz)* $\subseteq$ に関する最小元を持たない *generic multiverse* が存在する*.*
- その他, 巨大基数がない時には $\mathcal{M}$ の順序構造はクラス強制法を用いてかなり自由にコントロールできる.

Generic mutiverse の順序構造

Fact (Usuba)

generic multiverse $\mathcal{M}$ は下向きに有向である:
任意の $M, N \in \mathcal{M}$ に対して, $W \in \mathcal{M}$ で $W \subseteq M, N$ となるものが存在する.
$\iff M = W[G], N = W[H]$ となる $W \in \mathcal{M}$ が存在する.

Fact (Usuba)

generic multiverse $\mathcal{M}$ のすべての要素の共通部分は *ZFC* の推移的モデルになる.

the Core of the generic Multiverse

Fact (Usuba)

$\mathcal{M}$ が *generic Multiverse* とする．もし $M \in \mathcal{M}$ で M が適当な巨大基数公理を満たすものが存在するならば，$\mathcal{M}$ は最小元 M_0 を持つ，すなわち，$\mathcal{M}$ のすべての元は M_0 の強制拡大になっている．

- 強制法と巨大基数により様々な宇宙が構成可能になったことで multiverse の考え方が生まれた．
- 一方，巨大基数を仮定することで，様々な宇宙が実は一つの宇宙から派生していることが導かれる．
- $M_0 \in \mathcal{M}$ は generic multiverse の core であり，ある意味で The Universe である．

まとめ

強制法+巨大基数

$\Downarrow$

射影集合などの構造の決定

Universe

$\Downarrow$

強制法+巨大基数

$\Downarrow$

Multiverse

$\Downarrow$

強制法+巨大基数

$\Downarrow$

Universe?