p 進 Simpson 対応

辻 雄 (Takeshi Tsuji)

2017 年 3 月 24 日

Simpson の理論（1990 年前後)

X を連結な射影複素多様体，x を X 上の点，
$\pi_1(X, x)$ を X の x を基点とする基本群とする．

$$X \text{ 上の Higgs 束} \quad \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \quad \pi_1(X, x) \text{ の有限次元 } \mathbb{C} \text{ 表現}$$

(半安定，Chern 類が 0)

Higgs 束とは？

有限型局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{O}_X$ 線型写像 $\theta\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X$
の組 $(\mathcal{M}, \theta)$ で，$\theta \wedge \theta\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^2_X$ が 0 となるもの．

p 進 Simpson 対応は，これの p 進体上の代数多様体における類似．

記号

p: 素数,
K: p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大
$\overline{K}$: K の代数閉包（$\mathbb{Q}_p$ の代数閉包でもある）
$\mathbb{C}_p$: $\overline{K}$ の完備化
O_K, $O_{\overline{K}}$, $O_{\mathbb{C}_p}$: K, $\overline{K}$, $\mathbb{C}_p$ の整数環

$\mathcal{X}$: O_K 上の固有スムース・スキーム
X, $X_{\overline{K}}$, $X_{\mathbb{C}_p}$:
　$\mathcal{X}$ を K, $\overline{K}$, $\mathbb{C}_p$ へ底変換して得られる K, $\overline{K}$, $\mathbb{C}_p$ 上の代数多様体.

$X_{\overline{K}}$ は連結と仮定する．$x \in X_{\overline{K}}$ をとり，　$X_{\overline{K}}$ の代数的基本群

$$\Delta_X := \pi_1(X_{\overline{K}}, x)$$

を考える．これは位相群である．　(埋め込み $\overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ を一つ取ると，Δ_X は $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)$ の有限商の逆極限と同型になる.)

$$
\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} \Delta_X \text{ の有限次元} \\ \text{連続 } \mathbb{C}_p \text{ 表現} \end{pmatrix} \arrow[dr, "\text{忠実充満}", "\text{(A)}"'] & (X_{\mathbb{C}_p} \text{ 上の Higgs 束}) \arrow[d, dashed, leftrightarrow, "\text{(C)}"'] & (\text{small Higgs 束}) \arrow[l, hook'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{(B)}"', "\text{圏同値}"] \\
 & (\mathcal{X} \text{ 上の “一般化表現”}) & (\text{small 表現}) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}
$$

- (B) の圏同値の構成には，$\mathcal{X}$ の $O_{\mathbb{C}_p}$ への底変換 $\mathcal{X}_{O_{\mathbb{C}_p}}$ のある “無限小変形” を一つ取る必要がある．
- $\mathcal{X}/O_K$ が曲線（すなわち相対次元 1）の場合，(C) の圏同値も示されている．

文献

- (A) の忠実充満性は，2005 年より前の Faltings によるあるコホモロジーの比較定理から従う．
この比較定理の証明は Abbes と Gros による 2015 年の preprint：La suite spectrale de Hodge-Tate に詳しく書かれている．

- Faltings の 2005 年の論文は 16 頁ととても短い．
(B) の圏同値については，2016 年に出版された Abbes, Gros と講演者による本：The p-adic Simpson correspondence に詳しい定式化が二通りの方法で与えられている．

Simpson の対応とコホモロジー

射影複素多様体 X 上の Simpson の対応で基本群の表現 V と Higgs 束 $(\mathcal{M}, \theta)$ が対応しているとき，V を X 上の局所系とみなすと

$$H^m(X, (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\bullet}_X, \theta^{\bullet})) \cong H^m(X, V)$$

という自然な同型があることが知られている．

p 進 Simpson 対応とコホモロジー

p 進 Simpson 対応でも次のような素朴な類似が成り立つ.

$(\mathcal{M}, \theta)$ を $X_{\mathbb{C}_p}$ 上の small Higgs 束とし, $\mathcal{V}$ をそれに対応する $\mathcal{X}$ 上の small 一般化表現とするとき, 次の自然な同型がある.

$$H^m(X_{\mathbb{C}_p}, (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}_p}}} \Omega^\bullet_{X_{\mathbb{C}_p}}, \theta^\bullet)) \cong H^m(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}, \mathcal{V})$$

$\mathcal{V}$ が, 基本群 Δ_X の $\mathbb{C}_p$ 表現 V の関手 (A) による像であるとき, V を $X_{\overline{K}}$ 上の étale 局所系と見なせば

$$H^m(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}, \mathcal{V}) \cong H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, V)$$

という同型がある. (これが (A) の忠実充満性でふれた Faltings の比較定理である.)

注

- X の基本群 $\pi_1(X,x)$ は次の完全列を持つ.

$$1 \longrightarrow \underset{\text{幾何的部分}}{\Delta_X} \longrightarrow \pi_1(X,x) \longrightarrow \underset{\text{数論的部分}}{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} \longrightarrow 1$$

p 進 Simpson 対応は X の基本群の幾何的部分しか捉えていない.

- $\mathcal{X}/\mathcal{O}$ が曲線の場合，Deninger と Werner が，Faltings とほぼ同時期に，$X_{\overline{K}}$ 上のある種のベクトル束（Higgs 場 $\theta=0$）から Δ_X の $\mathbb{C}_p$ 表現を構成する次のような方法を与えている.

ベクトル束の "mod p^n" をとると，$X_{\overline{K}}$ の適当な有限次ガロア被覆 Y の適当なモデル $\mathcal{Y}$ への引き戻しが自明になり，この引き戻しの大域切断をとることにより，基本群 Δ_X の $O_{\mathbb{C}_p}/p^n$ 表現が得られる．n について逆極限をとって欲しい $\mathbb{C}_p$ 表現を得る.

注

- 標数 p の代数多様体における類似も Ogus と Vologodsky によって与えられ (2007)，その後色々な variant が研究されている．
標数 p での類似では Higgs 加群と可能積分接続付き加群の間の対応を考える．
Higgs 場 θ が 0 の場合は，以前からよく知られていた Cartier 降下と一致する．
(X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群)$\xrightarrow{\sim}$ (X 上の p 曲率 0 の可能積分接続付き加群)

- 射影複素多様体での Simpson 対応は variation of Hodge structures と密接に関係している．特異コホモロジーの Hodge 構造を与える Hodge 分解の p 進類似として p 進エタール・コホモロジーの Hodge-Tate 分解が知られているが，この variation として，基本群 $\pi_1(X,x)$ の $\mathbb{Q}_p$ 表現の variation of Hodge-Tate structures の理論が兵頭により与えられている (1989)．この兵頭の理論は p 進 Simpson 対応の最も基本的な例となっている．

p 進 Simpson 対応

$\mathcal{X}$: O_K 上の固有スムース・スキーム
$X_{\overline{K}}$, $X_{\mathbb{C}_p}$: $\mathcal{X}$ の $\overline{K}$, $\mathbb{C}_p$ への底変換

$$
\begin{tikzcd}
\left(\begin{array}{c}\Delta_X \text{ の有限次元} \\ \text{連続 } \mathbb{C}_p \text{ 表現}\end{array}\right) \arrow[dr, "\text{忠実充満}", "\text{(A)}"'] & (X_{\mathbb{C}_p} \text{ 上の Higgs 束}) \arrow[d, dashed, leftrightarrow, "\text{(C)}"'] & (\text{small Higgs 束}) \arrow[l, hook'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{(B)}"', "\text{圏同値}"] \\
 & (\mathcal{X} \text{ 上の “一般化表現”}) & (\text{small 表現}) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{X}$ 上の一般化表現とは？

$\mathcal{X}$ 上の一般化表現

$\mathcal{U} = \mathrm{Spec}\,(A) \subset \mathcal{X}$ をアファイン開部分スキーム,
U, $U_{\overline{K}}$ を $\mathcal{U}$ の K, $\overline{K}$ への底変換,
$\widetilde{U}$ を $U_{\overline{K}}$ の "普遍不分岐被覆"

とする．$U_{\overline{K}}$ の基本群 Δ_U は $\mathrm{Aut}(\widetilde{U}/U_{\overline{K}})$ となる．

$\overline{A}$ を A の「$\widetilde{U}$ の関数環」での整閉包,
$\widehat{\overline{A}}$ をその p 進完備化 $\varprojlim_n \overline{A}/p^n\overline{A}$

とする．Δ_U が $\widehat{\overline{A}}$ に連続に作用する．

$$
\begin{array}{ll}
\text{多様体} & \begin{tikzcd} \widetilde{U} \arrow[r] \arrow[r, bend left, dash, "\Delta_U"] & U_{\overline{K}} \arrow[r] & U_K \end{tikzcd} \\
\text{関数環} & \begin{tikzcd} \overline{A}[\frac{1}{p}] & A \otimes_{O_K} \overline{K} \arrow[l, hook'] & A[\frac{1}{p}] \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}
\end{array}
$$

$\mathcal{X}$ 上の一般化表現

有限生成射影 $\widehat{\overline{A}}[\frac{1}{p}]$ 加群 V への Δ_U の連続半線型作用，すなわち，Δ の V への連続作用で，

$$g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2), \quad g(av) = g(a)g(v)$$
$$(v_1, v_2, v \in V, g \in \Delta_U, a \in \widehat{\overline{A}}[\tfrac{1}{p}])$$

を満たすものを考え，これを Δ_U **の一般化表現**と呼ぶ．

$\mathcal{X}$ **上の一般化表現**とは，

“Δ_U の一般化表現の $\mathcal{U}$ についての compatible system”

を考えたものである．実際は $\mathcal{X}$ に伴うある環付き site $(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}, \overline{\mathcal{O}})$ を用いて，より洗練された形で定義される．

$\mathcal{X}$ 上の一般化表現と基本群の $\mathbb{C}_p$ 表現

$\mathbb{C}_p$ から $\widehat{\overline{A}}[\frac{1}{p}]$ への係数拡大で得られる関手

$$(\Delta_U \text{ の有限次元連続 } \mathbb{C}_p \text{ 表現}) \longrightarrow (\Delta_U \text{ の一般化表現})$$

は明らかに忠実充満にならない（自明な表現の自己準同型環が異なる）．ところが，これらを「はり合わせて」得られる関手

$$(\Delta_X \text{ の有限次元連続 } \mathbb{C}_p \text{ 表現}) \longrightarrow (\mathcal{X} \text{ 上の一般化表現})$$

は忠実充満になる．これが図式の関手 (A) である．

Δ_U の一般化表現と Higgs 束についての局所的な理論をまず構築し，これらを「はり合わせる」ことにより，$\mathcal{X}$ 上の p 進 Simpson 対応を構成する．

局所理論

可逆関数からなる座標 $t_1, t_2, \ldots, t_d \in A^\times$ が存在するとする.
$d\log t_i = \frac{dt_i}{t_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$ が微分加群 Ω_A の基底になる.
$A_1 := A \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}$ とし，$\widehat{A}_1$ をその p 進完備化とする.

small Higgs 束

Higgs 束としては，有限生成射影 $\widehat{A}_1[\frac{1}{p}]$ 加群と $\widehat{A}_1[\frac{1}{p}]$ 線型写像 $\theta\colon M \to M \otimes_A \Omega_A$ の組 (M, θ) で $\theta \wedge \theta = 0$ を満たすものを考える.

mod p^α (α は $\frac{2}{p-1}$ より大きいある有理数) で θ が 0 となるような (M, θ) の「格子」が存在するとき (M, θ) は small であるという.

small な Higgs 束 (M, θ) のなす圏を次のように表す.

$$\mathbf{HB}^{\mathrm{small}}(\widehat{A}_1[\tfrac{1}{p}], \Omega_A)$$

局所理論

small 一般化表現

Δ_U の一般化表現 V が mod p^α (α は $\frac{2}{p-1}$ より大きいある有理数) で「自明となる」(Δ_U 不変な元で生成される) ような「格子」を持つとき V は small であるという. small な一般化表現の圏を次のように表す.

$$\mathbf{Rep}^{\mathrm{small}}(\Delta_U, \widehat{A}[\tfrac{1}{p}])$$

局所 p 進 Simpson 対応

$\overline{K}$ の中の 1 の p 冪根の系を一つ固定しておく.

定理　次の自然な圏同値がある.

$$\mathbf{Rep}^{\mathrm{small}}(\Delta_U, \widehat{A}[\tfrac{1}{p}]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{HB}^{\mathrm{small}}(\widehat{A}_1[\tfrac{1}{p}], \Omega_A)$$

一般化表現から Higgs 束の構成

$A_\infty = A_1[t_1^{p^{-\infty}}, \dots, t_d^{p^{-\infty}}]$, $\Gamma := \mathrm{Aut}(A_\infty/A_1)$ とおく．1 の p 冪根の系を固定したので Kummer 理論より，同型 $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p^{\oplus d}$ を得る．

定理 (Faltings, T.) 係数拡大により得られる次の関手は圏同値．

$$\mathbf{Rep}^{\mathrm{small}}(\Gamma, \widehat{A}_1[\tfrac{1}{p}]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}^{\mathrm{small}}(\Delta_U, \widehat{\overline{A}}[\tfrac{1}{p}]).$$

証明は Faltings の almost purity theorem を用いた almost Galois descent と Sen の decompletion の議論の精密化からなる．

さらに，Γ の作用の $\log$ をとることにより圏同値

$$\mathbf{Rep}^{\mathrm{small}}(\Gamma, \widehat{A}_1[\tfrac{1}{p}]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{HB}^{\mathrm{small}}(\widehat{A}_1[\tfrac{1}{p}], \Omega_A)$$

が得られる．この構成は座標 t_i の取り方に強く依存している．

Higgs 束から一般化表現の（座標に依存しない）構成

crystalline cohmology の理論における「可積分接続付き加群」の「crystalline site 上の crystal」による解釈の Higgs 束での類似を考えることにより，次のように構成される．

$$\mathbf{HB}^{\mathrm{small}}(\widehat{A}_1[\tfrac{1}{p}],\Omega^1)\xrightarrow{(*)}\begin{pmatrix}(\widehat{\mathcal{U}}_1/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}\text{ 上の}\\ \text{isocrystal}\end{pmatrix}\xrightarrow{(**)}\mathbf{Rep}(\Delta_U,\widehat{\overline{A}}[\tfrac{1}{p}])$$

- $\widehat{\mathcal{U}}_1$ は $\widehat{A}_1$ に伴う形式スキーム．
- A_{inf} は Fontaine の p 進周期環．全射 $\alpha\colon A_{\mathrm{inf}}\to O_{\mathbb{C}_p}$ がある．
- $(*)$ は忠実充満．$\widehat{\mathcal{U}}_1$ の $A_{\mathrm{inf}}/\mathrm{Ker}(\alpha)^2$ への持ち上げに依存．
- $(**)$ は圏 $(\widehat{\mathcal{U}}_1/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ の Δ_U の作用付きのある対象 D_U での切断をとることで得られる．

大域理論

$\mathcal{X}$ の $\mathrm{Spf}\,(O_{\mathbb{C}_p})$ への底変換を $\widehat{\mathcal{X}}_1$ とし，$\widehat{\mathcal{X}}_1$ の $A_{\mathrm{inf}}/\mathrm{Ker}(\alpha)^2$ への持ち上げを一つとる.
すると small Higgs 束から一般化表現が次のように構成される.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{HB}^{\mathrm{small}}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{X}}_1}[\frac{1}{p}], \Omega_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow & \begin{pmatrix} (\widehat{\mathcal{X}}_1/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}} \\ \text{上の isocrystal} \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} \mathcal{X}\ \text{上の} \\ \text{一般化表現} \end{pmatrix} \\ & & \mathcal{F} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \Gamma(D_U, \mathcal{F}) \\ \text{with } \Delta_U\text{-action} \end{pmatrix}_{\mathcal{U}} \end{array}$$

今後の基本的な課題

- Higgs 束に対応する一般化表現が $\mathbb{C}_p$ 表現から来るのはいつか？
十分条件について部分的結果はある (Deninger-Werner, Faltings).
- 曲線以外の場合，small の条件なしで何が言えるか？
- 標数 p の Simpson 対応（非可換 Hodge 理論）との関係は？