日本数学会 2017 年度年会
首都大学東京
平成 29 年 3 月２６日

変動指数をもつ関数空間

水田　義弘

Index

はじめに

ルベーグの L^p 空間の一般化として，p を関数に置き換えて作られる関数空間を変動指数 $p(\cdot)$ をもつ関数空間と呼ぶ。この研究は，**1930** 年代に **W. Orlicz** の研究から始まり中野秀五郎の研究を経て，**1990** 年代から再び盛んとなり，**2000** 年に入って **L. Diening** を筆頭として飛躍的に発展している。

変動指数をもつ関数空間の基本的理論は，**L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička** の著書や **D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza** の著書に纏められている。

この講演では，変動指数をもつ関数空間において，変動指数と定数の場合とを比較しながら，**Hardy-Littlewood** の極大作用素の有界性を示し，その応用として，リースポテンシャルやソボレフ関数に対するソボレフの定理について言及する。

変動指数をもつルベーグ空間

$\mathbb{R}^N$ 上の可測関数 $p(\cdot)$ を 変動指数 と呼ぶ。この講演では，簡単のため，条件

(P0) $$1 \le p(x) < \infty \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

を仮定する。
領域 G 上の変動指数 $p(\cdot)$ をもつルベーグ空間

$$L^{p(\cdot)}(G) = \Bigg\{ f \in L^1_{loc}(G) : {}^{\exists}\lambda > 0 \text{ s.t.} \int_G \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx < \infty \Bigg\}$$

にノルム

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)} = \inf_{\lambda>0} \left\{ \int_G \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \le 1 \right\}$$

変動指数をもつルベーグ空間

とモジュラー

$$\rho_{p(\cdot),G}(f) = \int_{\{x\in G:p(x)<\infty\}} |f(x)|^{p(x)}dx \left(+ \|f\chi_{\{x\in G:p(x)=\infty\}}\|_\infty\right)$$

を定める。
中野は，次を満たす関数 $\Phi(t,x)$:

(Φ1) $\Phi(0,x) = 0$ かつ $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = \infty$;

(Φ2) $\Phi(\cdot,x)$ は凸;

(Φ3) $\Phi(t,\cdot)$ は可測

に対して，関数空間 (modular(ed) function space)

$$\{f : {}^\exists\alpha \quad \text{s.t.} \quad \int \Phi(\alpha|f(x)|,x)\ dx < \infty\}$$

とモジュラー (modular)

$$m(f) = \int \Phi(|f(x)|,x)\ dx$$

を考えた。
この講演では，$\Phi(t,x) = t^{p(x)}$ を考える。

関数空間 $L^{p(\cdot)}(G)$

関数空間 $L^{p(\cdot)}(G)$ の基本的な性質を述べる。

定理 2.1

(i) $p \equiv p_0 \geq 1$ （定数）のとき，$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)}$ はルベーグ空間 $L^{p_0}(G)$ のノルムと一致する。

(ii) $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq 1 \iff \|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)} \leq 1$

(iii) $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)} \leq 1$ ならば，$\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)}$;
$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)} > 1$ ならば，$\rho_{p(\cdot)}(f) \geq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)}$

(iv) $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(G)}$ はノルムである。すなわち，

(1) $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)} \geq 0$; $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)} = 0 \iff f = 0$;

(2) $\|cf\|_{L^{p(\cdot)}(G)} = |c|\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)}$;

(3) $\|f + g\|_{L^{p(\cdot)}(G)} \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)} + \|g\|_{L^{p(\cdot)}(G)}$

定理 2.1 の証明

(iii) について

$$\begin{aligned} 1 &\geq \int_G \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)}} \right)^{p(x)} dx \\ &= \int_G \|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)}^{-p(x)} |f(x)|^{p(x)} dx \\ &\geq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)}^{-1} \int_G |f(x)|^{p(x)} dx \end{aligned}$$

ノルムの三角不等式 **(iv)** **(3)** については，

$$t \longrightarrow t^{p(x)}$$

の凸性による。
$p^+ < \infty$ （例えば，$\Phi(\cdot, x)$ が **uniformly doubling**） のとき，

$$\int_G \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G)}} \right)^{p(x)} dx = 1$$

ヘルダーの不等式

定理 2.2

$L^{p(\cdot)}(G)$ はバナッハ空間である。

定理 2.3 (ヘルダーの不等式)

${}^{\exists}C_p,\ 1 \le C_p \le 2$, s.t.

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(y)\ dy \right| \le C_p \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}$$

ヘルダーの不等式の証明

$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} = 1$, $\|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} = 1$ と仮定して，Young の不等式：

$$|ab| \le \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

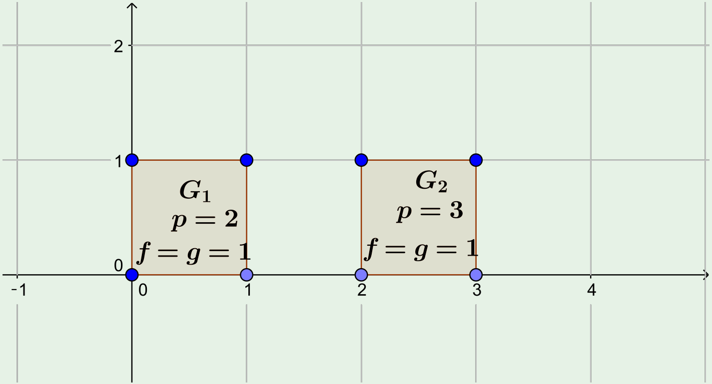
から，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(y)\ dy\right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)}|f(y)|^{p(y)}dy + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p'(x)}|g(y)|^{p'(y)}dy \\
&\le \frac{1}{p_-}\int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^{p(y)}dy + \frac{1}{p'_-}\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^{p'(y)}dy \\
&\le \frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-} = 1 + 1/p_- - 1/p^+ = C_p
\end{aligned}$$

$(p_- = \text{ess inf}\ p(x), p^+ = \text{ess sup}\ \ p(x)\ )$

例

$G = \{(x,y) : 0 < x < 3, 0 < y < 1\}$;
$G_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$;
$G_2 = \{(x,y) : 2 < x < 3, 0 < y < 1\}$
G_1 上 $p = 2$, G_2 上 $p = 3$
$G_1 \cup G_2$ 上 $f = g = 1$, $G \setminus (G_1 \cup G_2)$ 上 $f = g = 0$ のとき,



ヘルダーの不等式

$$\int_G f(y)g(y)\ dy = 2$$

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} = 1.32472\cdots, \quad \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} = 1.49022\cdots$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \times \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} &= 1.32472\cdots \times 1.49022\cdots \\ &= 1.97412\cdots \\ &< 2 = \int_G f(y)g(y)\ dy \end{aligned}$$

双対性

定理 2.4 (双対性)

$1 < p_- = \inf_G p \le \sup_G p = p^+ < \infty$ のとき，

$$\left(L^{p(\cdot)}(G)\right)' = L^{p'(\cdot)}(G), \qquad 1/p(x) + 1/p'(x) = 1$$

極大関数

$\mathbb{R}^N$ 上の可測関数 f に対して，
（中心）**Hardy-Littlewood の極大関数** を

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

と定める。

定理 3.1 (弱有界性)

$1 \leq p_- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ とすると，

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^N : Mf(x) > t\}\right| \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{f(y)}{t}\right|^{p(y)} dy \quad (t > 0)$$

log-ヘルダー変動指数

L. Diening [13] は,

$$\textbf{(P2)} \qquad |p(x) - p(y)| \le \frac{c_{\log}}{\log(e/|x-y|)} \quad (|x-y| < 1)$$

を満たす変動指数 $p(\cdot)$ に対して，極大作用素の $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ 有界性を論じた。このような変動指数は **0-ヘルダー** または **log-ヘルダー** と呼ばれる。
log-ヘルダーである変動指数の例として，

$$p(x) = p_0 + \frac{c}{\log(e + |x_0 - x|^{-1})} \quad (p_0 \ge 1, c : \text{定数})$$

変動指数の例

補題 3.2

区間 $[0, r_0]$ 上の関数 φ が条件：

(1) $\varphi(0) = 0$;
(2) $\varphi'(t) \geq 0 \ (0 < t < r_0)$;
(3) $\varphi''(t) \leq 0 \ (0 < t < r_0)$

を満足するならば，

$$\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t) \qquad (0 \leq s, t \leq s+t \leq r_0)$$

このような関数の例として，

$$\varphi(t) = (\log(1/t))^{-a}, \qquad \varphi(t) = \frac{\log\log(1/t)}{\log(1/t)}$$

などがある。ここに，$a > 0$ 。

極大作用素の弱有界性

定理 3.3 (弱有界性)

$1 \le p_- \le p(x) \le p^+ < \infty$ かつ (P2) とすると，

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^N : Mf(x) > t\}} t^{p(x)} \, dx \le C \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^{p(y)} \, dy \quad (t > 0)$$

極大作用素の有界性

定理 3.4 (cf. Diening [13, 2004], Cruz-Uribe–Fiorenza–Neugebauer [11, 2003])

$p(\cdot)$ について

(P1) $1 < p_- \le p(x) \le p^+ < \infty \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$

(P2) (log-ヘルダー)

(P3) (log-Hölder decay condition)

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{c_\infty}{\log(e + |x|)} \qquad (|x| \le |y|)$$

であれば,

$$\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}$$

Diening は有界集合の外で定数と仮定した。
(P3) は次と同値：

(P3′) $^\exists p(\infty)$ s.t. $|p(x) - p(\infty)| \le \dfrac{c_\infty}{\log(e + |x|)} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$

極大作用素の有界性

- log-ヘルダー条件 (P2) について

$(\Phi 4)$ 定数 $^\forall\gamma > 0$ に対して, $^\exists C_\gamma \geq 1$ s.t.

$$\Phi(x,t) \leq C_\gamma \Phi(y,t) \quad (|x-y| \leq \gamma t^{-1/N},\ t \geq 1);$$

- ∞ での log-ヘルダー条件 (P3) について

$(\Phi 5)$ 関数 $^\exists g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ と定数 $^\exists C_\infty \geq 1$ s.t.
$0 \leq g(x) < 1$ ($^\forall x \in \mathbb{R}^N$) かつ

$$C_\infty^{-1}\Phi(x,t) \leq \Phi(y,t) \leq C_\infty \Phi(x,t)$$

$$(|y| \geq |x|,\ g(x) \leq t \leq 1)$$

- (P1) について $(p_- > 1)$

$(\Phi 6)$ $0 < {}^\exists\varepsilon < 1$ s.t.

$$t^{-1-\varepsilon}\Phi(x,t) \text{ は増加}$$

- 2 倍条件 $(p^+ < \infty)$

$(\Phi 7)$ $^\exists C_2 > 1$ s.t.

$$\Phi(x,t) < \Phi(x,2t) \leq C_2\Phi(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}^N,\ t \geq 1)$$

定理 3.4 の証明 I

イェンセンまたはヘルダーの不等式から

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy \\
\le\ &\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|^{p(x)}dy\right)^{1/p(x)}
\end{aligned}$$

変動指数の場合に (P2), (P3) を利用して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy \le C(1+|x|)^{-n} \\
&+C\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|^{p(y)}dy\right)^{1/p(x)}
\end{aligned}$$

定理 3.4 の証明 II

そこで，$g(y) = |f(y)|^{p(y)}$ とおくと

$$Mf(x) \le C(1+|x|)^{-n} + C\{Mg(x)\}^{1/p(x)} \tag{3.1}$$

さらに，Diening は，$1 < p_1 < p_-$ となる p_1 をとり，$p(x)/p_1$ で (3.1) を適用し

$$\{Mf(x)\}^{p(x)/p_1} \le C(1+|x|)^{-np(x)/p_1} + CMg_1(x);$$

$(g_1(y) = |f(y)|^{p(y)/p_1})$ を示した。p_1 乗して積分すると

$$\begin{aligned}\int \{Mf(x)\}^{p(x)} dx \le C \int (1+|x|)^{-np(\infty)} dx \\ + C \int \{Mg_1(x)\}^{p_1} dx\end{aligned}$$

よって，通常の L^{p_1} 有界性から定理 3.4 が示される。

定理 3.4 の注意 I

注意 3.5

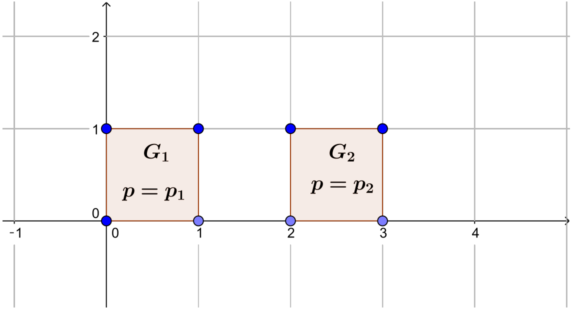
不等式

$$\int_G \{Mf(x)\}^{p(x)}dx \le C \int_G |f(x)|^{p(x)}dx \quad (\forall f)$$

が成り立つための必要十分条件は，$p(x) \equiv p_0 > 1$（定数）であることである (Lerner [35])。

実際，G_1 上で $p = p_1$, G_2 上で $p = p_2$, $1 < p_1 < p_2 < \infty$ とする。

定理 3.4 の注意 II



$f(x) = K\chi_{G_1}$ について，$\displaystyle\int_{G_1 \cup G_2} f(y)^{p(y)} dy \leq C_1 K^{p_1}$

$$\int_{G_1 \cup G_2} Mf(x)^{p(y)} dy \geq C_2 K^{p_1} + C_3 K^{p_2}$$

より，不等式が成立すると仮定すると

$$C_2 K^{p_1} + C_3 K^{p_2} \leq C C_1 K^{p_1}$$

$K \to \infty$ として，矛盾を得る。

ソボレフの不等式

関数 f の α 次のリースポテンシャル は

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

で定義される。ここに，$0 < \alpha < n$ である。

定理 4.1 (ソボレフの不等式)

定理 3.4 と同じ条件のもとで，$\alpha p^+ < n$ のとき，

$$\|I_\alpha f\|_{L^{p^\sharp(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}$$

ここに，$p^\sharp$ はソボレフ指数： $1/p^\sharp(x) = 1/p(x) - \alpha/n$

定理 4.1 の証明

この証明に **Hedberg** の方法を利用する。実際，$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \le 1$ と仮定して

$$
\begin{aligned}
I_\alpha|f|(x) &= \int_{\mathbb{R}^N \cap B(x,r)} |x-y|^{\alpha-n}|f(y)|dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,r)} |x-y|^{\alpha-n}|f(y)|dy \\
&\le \ Cr^\alpha Mf(x) + C\int_r^\infty \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|dy \right) t^{\alpha-n-1}dt \\
&\le \ Cr^\alpha Mf(x) + Cr^{\alpha-n/p(x)}
\end{aligned}
$$

ここで，定数 C が r に依存しないことに注意して，
$r = \{Mf(x)\}^{-p(x)/n}$ ととれば，

$$
I_\alpha|f|(x) \ \le \ C\{Mf(x)\}^{p(x)/p^\sharp(x)}
$$

よって，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \{I_\alpha|f|(x)\}^{p^\sharp(x)}dx \le C\int_{\mathbb{R}^N} \{Mf(x)\}^{p(x)} \le C$

Trudinger の不等式

変動指数 $p(\cdot)$ は, $x \in B_0 = B(x_0, r_0)$ のとき,
(p5)

$$0 \le p(x) - \left\{ \frac{n}{\alpha} + \frac{a \log(\log(1/|x_0 - x|))}{\log(1/|x_0 - x|)} \right\} \le \frac{b}{\log(1/|x_0 - x|)}$$

を満たすとしよう ; r_0 は $p(x) > n$ $(0 < |x_0 - x| \le r_0)$ となるように十分小さくとられる。

定理 4.2 (Trudinger の指数不等式 (cf. [22, 23]))

$0 \le a < (n-\alpha)/\alpha^2$, $\beta = (n - \alpha - a\alpha^2)/n$ とする。B_0 上の非負可測関数 f が $\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ を満たせば,

$$\int_{B_0} \exp(C_1(U_\alpha f(x))^{1/\beta})dx \le C_2$$

$E(t) = e^t - 1$ とおくと,

$$\int_{B_0} E(C_3(I_\alpha f(x))^{1/\beta})dx \le 1$$

Double 指数不等式

定理 4.3 (cf. [41])

$a = (n-\alpha)/\alpha^2$ とする。B_0 上の非負可測関数 f が $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(B_0)} \le 1$ を満たせば,

$$\int_{B_0} \exp(\exp(C_1 I_\alpha f(x)^{n/(n-\alpha)}))dx \le C_2$$

注意 4.4

$$0 \le p(x) - \left\{1 + \frac{\log(\log(1/|x_0 - x|))}{n\log(1/|x_0 - x|)}\right\} \le \frac{b}{\log(1/|x_0 - x|)}$$

であれば,

$$\int_{B(x_0,r_0)} Mf(x)\ dx \le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,r_0))}$$

注意 4.5 (cf. Fusco-Lions-Sbordone [20]))

$0 < \theta < 1$ とする。
grand L^p 条件

$$(1) \qquad \limsup_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^\theta \int_B |f(y)|^{n-\varepsilon} dy < \infty$$

または (complementary Morrey type condition)

$$(2) \qquad \limsup_{t \to 0} \, (\log(e/t))^{-\theta} \int_{B \setminus B(0,t)} |f(y)|^n dy < \infty$$

であれば,

$$(3) \qquad \int_B \exp\left(|I_1 f(x)|\right)^{1/\kappa}\right) dx < \infty \quad (\kappa = (n-1+\theta)/n)$$

連続性

定理 4.6

$a > (n-\alpha)/\alpha^2$ とする。$B_0 = B(x_0, r_0)$, $0 < r_0 < 1$, 上の関数 f が $\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ であれば，$x, z \in B(x_0, r_0/2)$ に対して

$$|I_\alpha f(x) - I_\alpha f(z)| \le C(\log(1/|x-z|))^{-(a\alpha^2-(n-\alpha))/n}$$

ソボレフ関数

ソボレフ関数 $u \in W^{1,p(\cdot)}(G) = \{u \in L^{p(\cdot)}(G) : |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(G)\}$ について，球 $B_0 = B(x_0, r_0) \subset G$ 上で

$$|u(x) - u_{B_0}| \leq C \int_{B_0} |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy \tag{6.1}$$

が成り立つ。
このポテンシャル評価によって，$p_- = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} p(x) > 1$ であれば，リースポテンシャルに対するソボレフの不等式がソボレフ関数に対しても成立する。
ここで，ソボレフ関数に対して，$p_- = 1$ でも次の弱有界性を用いて，ソボレフの不等式を示すことができる。

ソボレフ関数に対するソボレフの不等式

定理 4.7 (cf. [30])

(弱有界性) 変動指数 p が (P1) の代わりに $1 \le p_- \le p^+ < N/\alpha$ を満たすとき，${}^\exists C > 0$ s.t.

$$\int_{E_f(t)} t^{p^\sharp(x)}\,dx \le C \qquad ({}^\forall t > 0,\ \|{}^\forall f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \le 1)$$

ここに，$E_f(t) = \{x \in \mathbb{R}^N : I_\alpha|f|(x) > t\}$

定理 4.8 (ソボレフの不等式 (cf. [30]))

変動指数 p が (P1) の代わりに $1 \le p_- \le p^+ < N$ を満たすとき，
$\exists C > 0$ s.t.

$$\|u\|_{L^{p^\sharp(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \le C\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \qquad (\forall u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N))$$

定理 4.8 の証明 I

実際, $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ で $\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \le 1$ となるものに対して不等式を示せばよい。整数 n に対して,

$$v_n = \max\{0, \min\{u - 2^n, 2^n\}\}$$

$$U_n = \{x : 2^n < u(x) \le 2^{n+1}\}$$

とおく．このとき，U_{n+1} 上で (6.1) によって

$$I_1(|\nabla v_n|) \ge C2^n$$

である．単位の分解を考えることによって，$p^+ \le (p^\sharp)_-$ と仮定してよい。よって,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^\sharp(x)}\,dx &= \sum_n \int_{U_{n+1}} |u(x)|^{p^\sharp(x)}\,dx \\
&\leq \sum_n \int_{\{z : I_1|\nabla v_n|(z) \geq C2^n\}} (C2^n)^{p^\sharp(x)}\,dx \\
&\leq C \sum_n \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n(x)|^{p(x)}\,dx \\
&= C \sum_n \int_{U_n} |\nabla u(x)|^{p(x)}\,dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^{p(x)}\,dx
\end{aligned}
$$

となって，証明が終わる 。

Morrey 空間

$0 \le \nu \le N$ に対して, $\mathbb{R}^N$ 上の可測関数 f のモジュラー

$$\rho_{p(\cdot),\nu}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N, r>0} \frac{r^\nu}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p(y)} \, dy$$

によって，ノルム

$$\|f\|_{L^{p(\cdot),\nu}(\mathbb{R}^N)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot),\nu}(f/\lambda) \le 1\}$$

と 変動指数 p をもつ Morrey 空間

$$L^{p(\cdot),\nu}(\mathbb{R}^N) = \{f : \|f\|_{L^{p(\cdot),\nu}(\mathbb{R}^N)} < \infty\}$$

が定義される。
変動指数 Morrey 空間におけるソボレフ型定理について考察する。そのためには，最初に，極大作用素の有界性を示し，これまでと同様に，Hedberg の方法を適用する。

極大作用素の有界性

定理 5.1 (cf. [3], [29], [45], [46], [48])

極大作用素 $\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{L^{p(\cdot),\nu}(\mathbb{R}^N)}$ において有界である：

$$\|\boldsymbol{Mf}\|_{\boldsymbol{L^{p(\cdot),\nu}(\mathbb{R}^N)}} \leq \boldsymbol{C}\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L^{p(\cdot),\nu}(\mathbb{R}^N)}} \tag{5.1}$$

ソボレフの定理

定理 5.2 (ソボレフの不等式 (cf. [3], [29], [57]))

変動指数 p について，$1/p_\nu(x) = 1/p(x) - \alpha/\nu \geq 1/p^+ - \alpha/\nu > 0$ のとき，

$$\|I_\alpha f\|_{L^{p_\nu(\cdot),\nu}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^{p(\cdot),\nu}(\mathbb{R}^N)}$$

ここで，p_N はソボレフ指数 $p^\sharp$ に一致することに注意しよう。

定理 5.3 (Trudinger 指数不等式 (cf. [44]))

変動指数 p と ν は $\alpha < \nu \leq \alpha p_-$ $(p_- = p_-(G) = \inf_{x\in G} p(x))$ を満たすとする。有界開集合 G において，各 $0 < \eta < \alpha$ に対して，

$$\sup_{z\in G, 0<r<d_G} \frac{r^\eta}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} \exp\left(c_1 I_\alpha f(x)\right) dx \leq c_2$$

$$(\forall f \geq 0; \|f\|_{L^{p(\cdot),\nu}(G)} \leq 1)$$

となるような定数 c_1, c_2 が存在する；ここに，d_G は G の直径を表し，定数 c_2 は η に依存しないようにとることができる。

ソボレフの定理

最後に，連続性について述べよう．

定理 5.4 (ヘルダー連続性 (cf. [38]))

$(\alpha - 1)p^+ < \nu < \alpha p_-$ のとき，$f \in L^{p(\cdot),\nu}(G)$ に対して，

$$|I_\alpha f(x) - I_\alpha f(z)| \le C|x - z|^{\alpha - \nu/p(x)} \qquad (\forall x, z \in G)$$

となる定数 $C > 0$ が存在する．

円環 （球殻） $A(x_0,r)=B(x_0,2r)\setminus B(x_0,r)$ として，
Herz-Morrey 空間 $H^{p(\cdot),\omega,q(\cdot)}_{\{x_0\}}(G)$ は仮似ノルム

$$\|f\|_{H^{p(\cdot),\omega,q(\cdot)}_{\{x_0\}}(G)}=\inf\left\{\lambda>0:\int_0^\infty\left(\frac{\omega(r)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G\cap A(x_0,r))}}{\lambda}\right)^{q(r)}\frac{dr}{r}\le 1\right\}<\infty$$

$(0<q(r)<\infty)$;

$$\|f\|_{H^{p(\cdot),\omega,\infty}_{\{x_0\}}(G)}=\sup_{r>0}\omega(r)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(G\cap A(x_0,r))}<\infty$$

であるような関数からなる空間として定義される。

ここに,

- $(\omega 1)$ ω は単調；
- $(\omega 2)$ ω は 2 倍条件を満たす；

$$
\begin{aligned}
&(q0) \quad |q(r) - q(0)| \le C/(\log(e/r)) \qquad (0 < r < 1)\ ; \\
&(q\infty) \quad |q(r) - q(\infty)| \le C/(\log(e+r)) \qquad (r > 1)\ ; \\
&(q) \quad 0 < q_- \le q^+ < \infty
\end{aligned}
$$

$$
M^{p(\cdot),\omega}(G) = \bigcap_{x_0 \in G} H^{p(\cdot),\omega,\infty}_{\{x_0\}}(G)
$$

Herz-Morrey 空間

簡単のため，

$$H^{p(\cdot),\omega,q(\cdot)}(\mathbb{R}^N) = H^{p(\cdot),\omega,q(\cdot)}_{\{0\}}(\mathbb{R}^N)$$

$\omega(r) = r^\nu$ のとき，

$$H^{p(\cdot),\nu,q(\cdot)}(\mathbb{R}^N) = H^{p(\cdot),\omega,q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$$

$0 < q_1 < q_2 < \infty$ のとき，

$$H^{p(\cdot),\omega,q_1}(\mathbb{R}^N) \subset H^{p(\cdot),\omega,q_2}(\mathbb{R}^N) \subset H^{p(\cdot),\omega,\infty}(\mathbb{R}^N) \tag{6.1}$$

$f \in H^{p,\omega,p}(\mathbb{R}^N)\ (q = p) \quad \Longleftrightarrow$

$$\int [\omega(|y|)|f(y)|]^p\, dy < \infty$$

もっと　Herz-Morrey 空間

同じように，**inner Herz-Morrey** 空間は

$$\|f\|_{\underline{H}^{p(\cdot),\omega,q}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_0^\infty \left(\omega(r)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(0,r))}\right)^q \frac{dr}{r}\right)^{1/q} < \infty$$

complementary Herz-Morrey-Orlicz 空間は

$$\|f\|_{\overline{H}^{p(\cdot),\omega,q}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_0^\infty \left(\omega(r)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(B\setminus B(0,r))}\right)^q \frac{dr}{r}\right)^{1/q} < \infty$$

となる関数の属としてそれぞれ定義される。

ソボレフ不等式

p のソボレフ指数 $p^\sharp$ は

$$1/p^\sharp(x) = 1/p(x) - \alpha/n$$

定理 6.1

$1 < p_- \le p^+ < n/\alpha,\ \alpha - n/p^+ < \nu < n - n/p^-$ のとき,

$$\|I_\alpha f\|_{H^{p^\sharp(\cdot),\nu,q}(\mathbb{R}^N)} \le C\|f\|_{H^{p(\cdot),\nu,q}(\mathbb{R}^N)}$$

$\alpha = 0$ のときは極大作用素の有界性となる $(I_0 f = Mf)$ 。
$f \in H^{p,\nu,p}(\mathbb{R}^N)$ のとき,

$$\int (|x|^\nu |I_\alpha f(x)|)^{p^\sharp}\ dx < \infty$$

定理 6.1 の証明 I

$\|f\|_{H^{p(\cdot),\omega,q}(\mathbb{R}^N)} \le 1$, $f \ge 0$ として,

$$
\begin{aligned}
f &= f\chi_{B(0,r/2)} + f\chi_{B(0,4r)\setminus B(0,r/2)} + f\chi_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,4r)} \\
&= f_{1,r} + f_{2,r} + f_{3,r}
\end{aligned}
$$

$x \in A(0,r)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
I_\alpha f_{1,|x|}(x) &\le C|x|^{\alpha-n}\int_{B(0,|x|/2)} f(y)dy \\
&\le C|x|^\alpha H_n^0 f(|x|); \\
I_\alpha f_{3,|x|}(x) &\le C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,2|x|)} |y|^{\alpha-N} f(y)dy \\
&\le C|x|^\alpha H_\alpha^\infty f(|x|);
\end{aligned}
$$

Hardy 作用素

$$H_\beta^\infty f(r) = r^{-\beta} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |y|^{\beta - N} f(y)\, dy;$$

$$H_\beta^0 f(r) = r^{-\beta} \int_{B(0,r)} |y|^{\beta - N} f(y)\, dy$$

Hardy 作用素 II

補題 6.2

$\beta - \nu - n/p^+ < 0$ と仮定する。
$0 < \varepsilon < -\beta + \nu + n/p^+$ のとき,

$$\begin{aligned} H_\beta^\infty f(r) &\le C r^{\varepsilon - \nu - n/p^+} \\ &\quad \times \left(\int_r^\infty \left(t^{-\varepsilon+\nu} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(A(0,t))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$(0 < q < \infty)$

$$H_\beta^\infty f(r) \le C r^{-\nu - n/p^+} \sup_{r<t<\infty} \left(t^\nu \|f\|_{L^{p(\cdot)}(A(0,t))} \right)$$

$(q = \infty)$

補題 6.3

$\beta - \nu - n/p_- > 0$ とする。
$0 < \varepsilon < \beta - \nu - n/p_-$ のとき，

$$\begin{aligned} H^0_\beta f(r) &\le Cr^{-\varepsilon-\nu-n/p^-} \\ &\quad \times \left(\int_0^r \left(t^{\varepsilon+\nu} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(A(0,t))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$(0 < q < \infty)$

$$H^0_\beta f(r) \le Cr^{-\nu-n/p^-} \sup_{0<t<r} \left(t^\nu \|f\|_{L^{p(\cdot)}(A(0,t))} \right)$$

$(q = \infty)$

系 6.4

$\alpha - \nu - n/p^+ < 0$ のとき,

$$\| |x|^\alpha H_\alpha^\infty f(|x|) \|_{H^{p^\sharp(\cdot),\nu,q}(\mathbb{R}^N)} \le C \|f\|_{H^{p(\cdot),\nu,q}(\mathbb{R}^N)}$$

系 6.5

$n - \nu - n/p_- > 0$ のとき,

$$\| |x|^\alpha H_n^0 f(|x|) \|_{H^{p(\cdot),\nu,q}(\mathbb{R}^N)} \le C \|f\|_{H^{p(\cdot),\nu,q}(\mathbb{R}^N)}$$

双対性

定理 6.6

$\boldsymbol{1 < q < \infty}$, $\boldsymbol{\omega}$ は

$(\omega 1)$ $\boldsymbol{\omega}$ は単調；

$(\omega 2)$ $\boldsymbol{\omega}$ は **doubling**

のとき，

$$\left(\boldsymbol{H^{p(\cdot),\omega,q}(\mathbb{R}^N)}\right)' = \boldsymbol{H^{p'(\cdot),1/\omega,q'}(\mathbb{R}^N)}$$

系 6.7

$\boldsymbol{1 < q < \infty}$, $\boldsymbol{\nu > 0}$ のとき，

$$\boldsymbol{(H^{p(\cdot),\nu,q}(\mathbb{R}^N))' = H^{p'(\cdot),-\nu,q'}(\mathbb{R}^N)}$$

定理 6.8 (cf. [24, Theorems 6.1 and 6.2])

ω がさらに

(ω3) $\displaystyle\int_0^1 \omega(r)^q \, dr/r = \infty$ かつ $\displaystyle\int_1^\infty \omega(r)^q \, dr/r < \infty$

を満たすとき，$\eta(r) = \omega(r)^{q-1} \left(\displaystyle\int_r^\infty \omega(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{-1}$ とすると，

$$\left(\underline{H}^{p(\cdot),\omega,q}(\mathbb{R}^N)\right)' = \overline{H}^{p'(\cdot),\eta,q'}(\mathbb{R}^N)$$

$\omega(r) = r^{-\nu}$ $(\nu > 0)$ のとき，$\eta(r) = \mathrm{const.}\ r^{\nu}$ かつ

$$\overline{H}^{p(\cdot),\nu,q}(\mathbb{R}^N) = H^{p(\cdot),\nu,q}(\mathbb{R}^N)$$

$$\underline{H}^{p'(\cdot),-\nu,q}(\mathbb{R}^N) = H^{p(\cdot),-\nu,q}(\mathbb{R}^N)$$

(A_p) 重み

Cruz-Uribe–Fiorenza–Neugebauer [12] に従って，$\mathbb{R}^N$ 上の非負可測関数 w が $A_{p(\cdot)}$ 重み ($w \in (A_{p(\cdot)})$) とは，

$$\|w\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\|w^{-1}\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \le C_p|B| \quad (\forall \text{ 球 } B)$$

となる定数 $C_p > 0$ が存在する；ここに，χ_B は B の特性関数で

$$1/p(x) + 1/p'(x) = 1$$

定理 7.1 (cf. [12], [58])

$w \in (A_{p(\cdot)})$ のとき，

(1) （有界性） $\|(Mf)w\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \le C\|fw\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}$；

(2) （弱有界性）
$$\|t\chi_{\{x\in\mathbb{R}^N : Mf(x)>t\}}w\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \le C\|fw\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}$$

この定理から，重み付きソボレフ不等式などが示される．

[1] D. R. Adams and L. I. Hedberg, Function spaces and potential theory, Springer, 1996.

[2] D. R. Adams and J. Xiao, Morrey spaces in harmonic analysis, Ark. Mat. 50 (2012), no. 2, 201–230.

[3] A. Almeida, J. Hasanov and S. Samko, Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces, Georgian Math. J. 15 (2008), 195–208.

[4] V. I. Burenkov and H. V. Guliyev, Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces, Stud. Math. 163(2) (2004), 157–176

[5] V. I. Burenkov, H. V. Guliyev and V. S. Guliyev, Necessary and sufficient conditions for the boundedness of fractional maximal operators in local Morrey-type spaces, J. Comput. Appl. Math. 208 (2007), no. 1, 280–301.

[6] V. I. Burenkov, A. Gogatishvili, V. S. Guliyev and R. Ch. Mustafayev, Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces, Complex Var. Elliptic Equ. 55 (2010), no. 8-10, 739–758.

[7] V. I. Burenkov, A. Gogatishvili, V. S. Guliyev and R. Ch. Mustafayev, Boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces, Potential Anal. 35 (2011), no. 1, 67–87.

[8] C. Capone and A. Fiorenza, On small Lebesgue spaces. J. Funct. Spaces Appl. 3 (2005), no. 1, 73–89.

[9] F. Chiarenza and M. Frasca, Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, Rend. Mat. 7 (1987), 273–279.

[10] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, Variable Lebesgue spaces. Foundations and harmonic analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, Heidelberg, 2013.

[11] D. Cruz-Uribe, L. Diening and C. J. Neugebauer, The maximal function on variable L^p spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Math. 28 (2003), 223–238.

[12] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, Weighted norm inequalities for the maximal operator on variable Lebesgue spaces, J. Math. Anal. Appl. 394 (2012), 744–760.

[13] L. Diening, Maximal functions in generalized $L^{p(\cdot)}$ spaces, Math. Inequal. Appl. 7(2) (2004), 245–254.

[14] L. Diening, Riesz potentials and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$, Math. Nachr. 263(1) (2004), 31–43.

[15] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 34 (2009), 503–522.

[16] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Růžička, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, 2017, Springer, Heidelberg, 2011.

[17] D. E. Edmunds and J. Rákosník, Sobolev embedding with variable exponent, II, Math. Nachr. 246-247 (2002), 53–67.

[18] A. Fiorenza and J. M. Rakotoson, Some estimates in $G\Gamma(p, m, w)$ spaces, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 2, 793–805.

[19] G. Di Fratta and A. Fiorenza, A direct approach to the duality of grand and small Lebesgue spaces, Nonlinear Anal. 70 (2009), no. 7, 2582–2592.

[20] N. Fusco, P. L. Lions and C. Sbordone, Sobolev embedding theorems in borderline cases, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 561–565.

[21] T. Futamura, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, Variable exponent spaces on metric measure spaces, More progresses in analysis (ISAAC-5, Catania, 2005, Begehr & Nicolosi (ed.)), World Scientific, 2009, 107-121.

[22] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent, Math. Nachr. 279 (2006), 1463–1473.

[23] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for variable exponent Riesz potentials on metric spaces Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.31 (2006), 495–522.

[24] A. Gogatishvili and R. Ch. Mustafayev, Dual spaces of local Morrey-type spaces, Czechoslovak Math. J. 61 (136) (2011), no. 3, 609–622.

[25] A. Gogatishvili and R. Ch. Mustafayev, New pre-dual space of Morrey space. J. Math. Anal. Appl. 397 (2013), no. 2, 678–692.

[26] V. S. Guliyev, J. J. Hasanov and S. G. Samko, Maximal, potential and singular operators in the local "complementary" variable exponent Morrey type spaces, J. Math. Anal. Appl. 401 (2013), no. 1, 72–84.

[27] P. Harjulehto and P. Hästö, A capacity approach to the Poincare inequality and Sobolev imbeddings in variable exponent Sobolev spaces, Rev. Mat. Complut. 17 (2004), 129–146.

[28] P. Hästö, The maximal operator in Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1, Math. Nachr. 280 (2007), 74–82.

[29] P. Hästö, Local-to-global results in variable exponent spaces. Math. Res. Lett. 16 (2009), 263–278.

[30] P. Hästö, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev inequalities for Orlicz spaces of two variable exponents, Glasg. Math. J. 52 (2010), 227–240.

[31] L. I. Hedberg, On certain convolution inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972), 505–510.

[32] C. Herz, Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms, J. Math. Mech. 18 (1968), 283–324.

[33] M. Izuki, Fractional integrals on Herz-Morrey spaces with variable exponent, Hiroshima Math. J. 40 (2010), no. 3, 343–355.

[34] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. 41 (1991), 592-618.

[35] A. K. Lerner, On modular inequalities in variable L^p spaces, preprint.

[36] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta and T. Ohno, Approximate identities in variable Lebesgue-Orlicz spaces $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 35 (2010), 405–420.

[37] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Capacity for potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces, Nonlinear Anal. 74 (2011) 6231–6243.

[38] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Trudinger's inequality and continuity of potentials on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Potential Anal. 38 (2013) 515–535.

[39] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Bull. Sci. Math. 137 (2013), 76–96.

[40] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Hardy's inequality in Musielak-Orlicz-Sobolev spaces, Hiroshima Math. J. 44 (2014), no. 2, 139–155.

[41] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev and Trudinger type inequalities on grand Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 40 (2015), 403–426.

[42] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Duality of non-homogeneous central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces, to appear

[43] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosho, Tokyo, 1996.

[44] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, An elementary proof of Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces $L^{1,\nu,\beta}(G)$, Hiroshima Math. J. 38 (2008), 425–436.

[45] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of fractional integral operators on Morrey spaces and Sobolev embeddings for generalized Riesz potentials, J. Math. Soc. Japan 62 (2010), 707–744.

[46] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Morrey spaces of variable exponent, Complex Var. Elliptic Equ., 56 (2011), 671–695.

[47] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Hardy's inequality in variable exponent Orlicz spaces, Hokkaido Math. J. 40 (2011), 187–203.

[48] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Musielak-Orlicz-Morrey spaces of variable exponent in $\mathbb{R}^N$, Rev. Mat. Complut. 25 (2012), 413–434.

[49] Y. Mizuta, A. Nekvinda and T. Shimomura, Hardy averaging operator on generalized Banach function spaces and duality, Z. Anal. Anwend. 32 (2013), 233–255.

[50] Y. Mizuta, A. Nekvinda and T. Shimomura, Optimal estimates for the fractional Hardy operator, Studia Math. 227 (2015), no. 1, 1–19.

[51] Y. Mizuta and T. Ohno, Trudinger's exponential integrability for Riesz potentials of functions in generalized grand Morrey spaces, J. Math. Anal. Appl. 420 (2014), no. 1, 268–278.

[52] Y. Mizuta and T. Ohno, Sobolev's theorem and duality for Herz-Morrey spaces of variable exponent, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 39 (2014), 389–416.

[53] Y. Mizuta and T. Ohno, Herz-Morrey spaces of variable exponent, Riesz potential operator and duality, Complex Var. Elliptic Equ. 60 (2015), no. 2, 211–240.

[54] Y. Mizuta and T. Ohno, Boundedness of the maximal operator and Sobolev's inequality on non-homogeneous central Herz-Morrey-Orlicz spaces, Nonlinear Anal. 128 (2015), 325–347.

[55] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential spaces of variable exponents near 1 and Sobolev's exponent, Bull. Sci. Math. 134 (2010), 12–36.

[56] Y. Mizuta and T. Shimomura, Exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes, Hiroshima Math. J. 28 (1998), 355–371.

[57] Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, J. Math. Soc. Japan 60 (2008), 583–602.

[58] Y. Mizuta and T. Shimomura, Weighted Morrey spaces of variable exponent and Riesz potentials, Math. Nachr. 288 (2015), no. 8-9, 984–1002.

[59] C. B. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126–166.

[60] E. Nakai, Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces, Math. Nachr. 166 (1994), 95–103.

[61] E. Nakai, The Campanato, Morrey and Hölder spaces on spaces of homogeneous type, Studia Math. 176 (2006), 1–19.

[62] E. Nakai, Orlicz-Morrey spaces and the Hardy-Littlewood maximal function, Studia Math. 188 (2008), 193–221.

[63] H. Nakano, Modulared Semi-Ordered Linear Spaces. Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1950.

[64] H. Nakano, Topology of linear topological spaces. Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1951.

[65] A. Nekvinda, Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R})$, Math. Inequal. Appl. 7 (2004), 255–265.

[66] A. Nekvinda, Maximal operator on variable Lebesgue spaces for almost monotone radial exponent, J. Math. Anal. Appl. 337 (2008), 1345–1365.

[67] W. Orlicz, Über konjugierte Exponentenfolgen, Studia Math. 3 (1931), 200–211.

[68] J. Peetre, On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces, J. Funct. Anal. 4 (1969), 71–87.

[69] M. Růžička, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[70] Y. Sawano, Sharp estimates of the modified Hardy Littlewood maximal operator on the nonhomogeneous space via covering lemmas, Hokkaido Math. J. 34 (2005), 435-458.

[71] Y. Sawano, T. Sobukawa and H. Tanaka, Limiting case of the boundedness of fractional integral operators on non-homogeneous space, to appear in Journal of Inequalities and Applications.

[72] Y. Sawano and H. Tanaka, Morrey spaces for non-doubling measures, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 21 (2005), 1535-1544.

[73] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[74] E. M. Stein, Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, With the assistance of Timothy S. Murphy, Princeton Mathematical Series, 43, Monographs in Harmonic Analysis, III, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[75] W. P. Ziemer, Extremal length as a capacity, Michigan Math. J. 17 (1970), 117–128.

4-13-11 Hachi-Hom-Matsu-Minami
Higashi-Hiroshima-City 739-0144, Japan
E-mail : yomizuta@hiroshima-u.ac.jp

プロフィール

「変動指数をもつ関数空間」
水田義弘（広島大名誉教授）
　ソボレフ関数の連続性や微分可能性を調べることから初めて，今だにこのテーマを追い求めています。
　最初はルベーグの L^p 空間に基礎をおいた研究でしたが，**2000** 年代半ばから p を関数として，変動指数をもつ関数空間において研究を行っています。このような空間は，中野秀五郎先生が考えたモジュラー関数空間 **(modulared function space)** の一つの例になっています。
　一つのテーマで **40** 年以上に渡り研究を継続することができたのは私にとってこの上ない幸いでした。