トポロジカル相とバルク・エッジ対応の数学的側面へのイントロダクション

吉田 幹雄

§ 結晶のモデル

§ バルク指数

§ エッジ指数

§ バルク・エッジ対応

結晶のひとつのモデル

データ　$\hat{H} : S^1 \xrightarrow[\text{連続}]{} \{N次 \text{Hermite} 行列\}$

※　$\hat{H} : L^2(S^1, \mathbb{C}^N) \longrightarrow L^2(S^1, \mathbb{C}^N)$

$\cup$ 各点ごとの積 $\cup$

$$\hat{H} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n z^n \qquad \tilde{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n z^n \qquad \hat{H}\tilde{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (H\phi)_n z^n$$

$$(H\phi)_n = \sum_{k+l=n} H_k \phi_l$$

※　$H : L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N)$

$$
\begin{tikzcd}
L^2(S^1, \mathbb{C}^N) \arrow[r, "\widetilde{H}"] & L^2(S^1, \mathbb{C}^N) \\
L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) \arrow[u, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[r, "H"] & L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) \arrow[u, phantom, sloped, "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

self-adjoint

- $\sigma(\widetilde{H}) = \sigma(H) = \bigcup_{z \in S^1} \sigma(\widetilde{H}(z))$ スペクトル

  行列の固有値

"運動量"の空間

- $\widetilde{H}$ は S^1 の各点で積
  H は $\mathbb{Z}$ のシフトと可換

同値

1次元の結晶とみなす

• $\phi = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ "波動関数" $\left(\longleftrightarrow \ \hat{\phi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n z^n\right)$

$(\phi_n \in \mathbb{C})$

ひとつの粒子の状態を表す.

($\phi \neq 0$ の時. $\mathbb{C}\phi$ が状態に対応する.)

• $\phi \neq 0$ が エネルギー λ をもつ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{H\phi = \lambda\phi}$

(**Remark** $\tilde{H}: L^2(S^1, \mathbb{C}^N) \to L^2(S^1, \mathbb{C}^N)$ が generic である時，いかなる λ に対しても，エネルギー λ の状態は存在しない．)

$\mathbb{Z}$: 無限の広がりをもつ結晶のモデル

$\mathbb{Z}/L$: 有限の大きさの結晶のモデル $(L \in \mathbb{Z}_{>0})$

☆ 先程の $\tilde{H}$ (or H) を用いて $\mathbb{Z}/L$ 上の Hamiltonian を作る

Recall

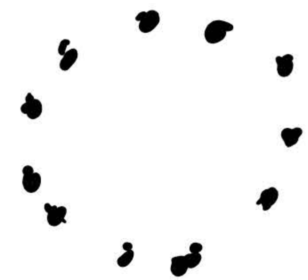
$$H : L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^M) \longrightarrow L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^M)$$

$$\{\phi_n\} \overset{H}{\longmapsto} \Big\{\sum_{k+l=n} H_k \phi_l\Big\}$$

$n \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $n \in \mathbb{Z}$

Define

$$H^{\mathbb{Z}/L} : L^2(\mathbb{Z}/L, \mathbb{C}^M) \longrightarrow L^2(\mathbb{Z}/L, \mathbb{C}^M)$$



$$\{\phi^{\mathbb{Z}/L}_{\bar{n}}\} \xmapsto{H^{\mathbb{Z}/L}} \Big\{\sum_{\substack{k+\bar{l}=\bar{n} \\ \mathrm{mod}\, L}} H_k \phi^{\mathbb{Z}/L}_{\bar{l}}\Big\}$$

$\bar{n} \in \mathbb{Z}/L$ $\qquad$ $\bar{n} \in \mathbb{Z}/L$

Recall

$$\begin{tikzcd} L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\cong"'] & L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) \arrow[d, "\cong"] \\ L^2(S^1, \mathbb{C}^N) \arrow[r, "\widehat{H}"] & L^2(S^1, \mathbb{C}^N) \end{tikzcd}$$

$$S^1 = U(1)$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \begin{matrix} L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) \\ L^2(S^1, \mathbb{C}^N) \end{matrix} = +\infty$$

Observe

$$\begin{tikzcd} L^2(\mathbb{Z}/L, \mathbb{C}^N) \arrow[r, "H^{\mathbb{Z}/L}"] \arrow[d, "\cong"'] & L^2(\mathbb{Z}/L, \mathbb{C}^N) \\ L^2(C_L, \mathbb{C}^N) \arrow[r, "\widetilde{H}^{C_L}"] & L^2(C_L, \mathbb{C}^N). \end{tikzcd}$$

where

- $C_L = \{ z \in U(1) \mid z^L = 1 \}$
- $\widetilde{H}^{C_L} = H\big|_{C_L}$

$+\infty$

$$\dim_{\mathbb{C}} \begin{matrix} L^2(\mathbb{Z}/L, \mathbb{C}^N) \\ L^2(C_L, \mathbb{C}^N) \end{matrix} = LN$$

２つの粒子：相互作用がない場合.

$$\begin{cases} \text{粒子A} & \boxed{H^{(A)} : V^{(A)} \to V^{(A)}} \quad \left(e^{\sqrt{-1}tH^{(A)}} : V^{(A)} \to V^{(A)} \right) \\ \text{粒子B} & \boxed{H^{(B)} : V^{(B)} \to V^{(B)}} \quad \left(e^{\sqrt{-1}tH^{(B)}} : V^{(B)} \to V^{(B)} \right) \end{cases}$$

⇒ 粒子A＋粒子B をあらわす Hamiltonian

$$\boxed{H^{(A)} \otimes 1 + 1 \otimes H^{(B)} : V^{(A)} \otimes V^{(B)} \to V^{(A)} \otimes V^{(B)}}$$

$$\left(e^{\sqrt{-1}tH^{(A)}} \otimes e^{\sqrt{-1}tH^{(B)}} : V^{(A)} \otimes V^{(B)} \to V^{(A)} \otimes V^{(B)} \right)$$

（粒子Aと粒子Bが"相異なる種類"の粒子の時.）

M 個の粒子 : 相互作用がない場合

* 粒子 $A_1, \cdots$ 粒子 A_M がすべて相異なる粒子

$$\boxed{\sum_{1\le j\le M} 1\otimes\cdots\otimes \overset{(j)}{H^{(A_j)}}\otimes\cdots\otimes 1 : \overbrace{V^{(A_1)}\otimes\cdots\otimes V^{(A_M)}}^{M} \longrightarrow \overbrace{V^{(A_1)}\otimes\cdots\otimes V^{(A_M)}}^{M}}$$

* fermion

$$\boxed{\sum_{1\le j\le M} 1\wedge\cdots\wedge \overset{(j)}{H^{(A)}}\wedge\cdots\wedge 1 : \Lambda^M V^{(A)} \longrightarrow \Lambda^M V^{(A)}}$$

* boson

$$\boxed{\sum_{1\le j\le M} 1\cdot 1\cdot\cdots\cdot \overset{(j)}{H^{(A)}}\cdot\cdots\cdot 1\cdot 1 : \mathrm{Sym}^M V^{(A)} \longrightarrow \mathrm{Sym}^M V^{(A)}}$$

相互作用がない場合のエネルギーの挙動 (fermion)

$H^{(A)} : V^{(A)} \to V^{(A)}$ の固有値 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_a\}$

$\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_a$

$$\Downarrow$$

$\sum_{1 \le j \le M} 1 \wedge \cdots \wedge \overset{(j)}{H^{(A)}} \wedge \cdots \wedge 1 : \Lambda^M V^{(A)} \to \Lambda^M V^{(A)}$ の固有値

$$\{\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_M} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_M \le a\}$$

$\phi_{i_1} \wedge \phi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_M}$

統計力学の一般論 (カノニカル分布)

$$\hat{H} : \hat{V} \longrightarrow \hat{V}$$

$$\begin{cases} \hat{H}\hat{\phi} = \Lambda \phi \\ \hat{H}\hat{\phi}' = \Lambda' \phi' \end{cases} \Longrightarrow$$

状態 ϕ である確率 : 状態 ϕ' である確率

$$\|$$

$$e^{-\Lambda/T} : e^{-\Lambda'/T}$$

"温度Tの平衡状態"における分布

相互作用なしのfermionの場合　(カノニカル分布)

$$\begin{cases} H^{(A)} : V^{(A)} \longrightarrow V^{(A)} & \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_a \\ & \phi_1 \quad \phi_2 \qquad \phi_a \\ \hat{H} := \sum_i 1 \wedge \cdots \wedge H^{(A)} \wedge \cdots \wedge 1 : \Lambda^M V^{(A)} \longrightarrow \Lambda^M V^{(A)} \end{cases}$$

㊂ $\hat{H}$に対して、確率が最大となる状態のエネルギーは

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_a \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_M$$

(すなわち、$H^{(A)}$に対する状態でエネルギーが小さい順番にM個のものを選び、それらのウェッジ積をとったもの)

統計力学の一般論　グランドカノニカル分布

相互作用のない fermion に対して 粒子数が固定されていない場合　T：温度，μ：化学ポテンシャル

$$\boxed{\bigoplus_{M\geq 0} \bigwedge^M V^{(A)} \quad : \quad \text{Hilbert space}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi \in \bigwedge^M V^{(A)} \\ \hat{H}\varphi = \Lambda\varphi \end{array}\right. \text{の状態の確率} : \left\{\begin{array}{l} \varphi' \in \bigwedge^{M'} V^{(A)} \\ \hat{H}\varphi' = \Lambda'\varphi' \end{array}\right. \text{の状態の確率}$$

$$\parallel$$

$$e^{-(\Lambda - M\mu)/T} : e^{-(\Lambda' - M'\mu)/T}$$

相互作用のないfermionの場合（グランドカノニカル分布）

T：温度 , μ：化学ポテンシャル

$H^{(A)} : V^{(A)} \longrightarrow V^{(A)}$ $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{M_\mu} < \mu < \lambda_{M_\mu+1} \leq \cdots \leq \lambda_a$

このとき $\bigoplus_{M \geq 0} \Lambda^M V^{(A)}$ の状態の中で最も確率が

大きいのは

$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_{M_\mu}$ $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{M_\mu}$

すなわちエネルギーがμより小さい $H^{(A)}$ の状態たちのウェッジ積

絶縁体 ⟷ 導体 (1)

Recall

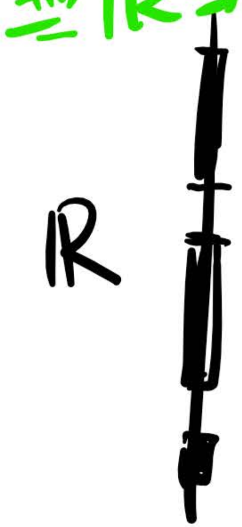
データ　$\tilde{H} : S^1 \xrightarrow[\text{連続}]{} \{N\text{次Hermite行列}\}$

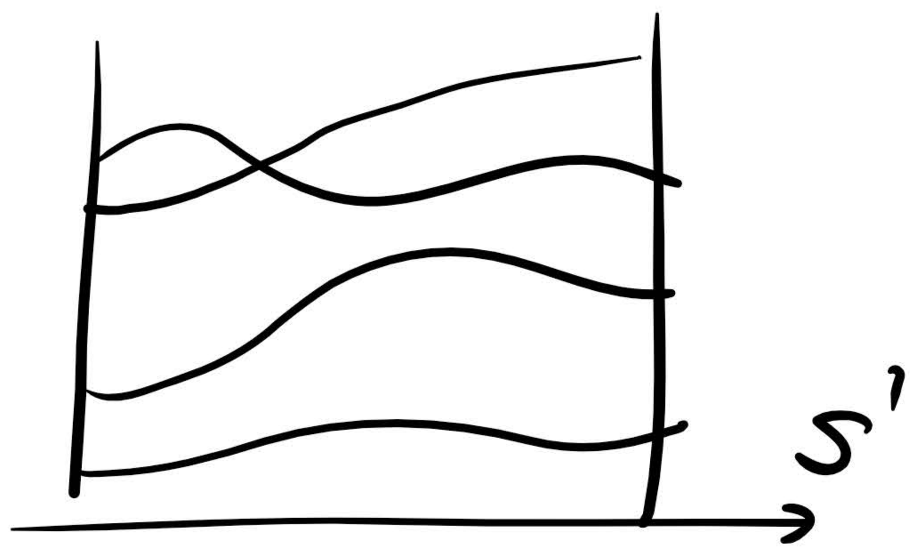
$$\sigma(H^{L}) \subset \sigma(\tilde{H}) = \bigcup_{z \in S^1} \sigma(\tilde{H}(z)) \subset \mathbb{R}$$

$L \in \mathbb{Z}_{>0}$

有限結晶

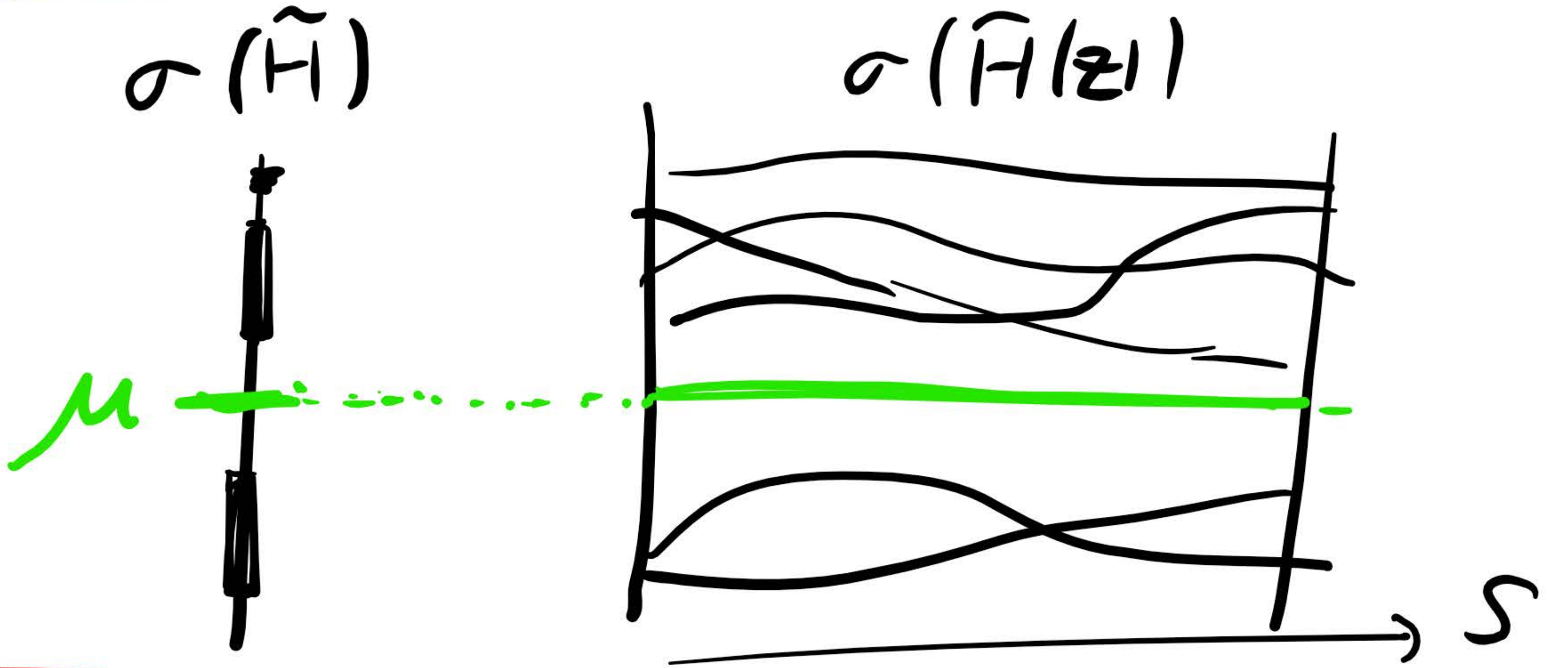
無限結晶





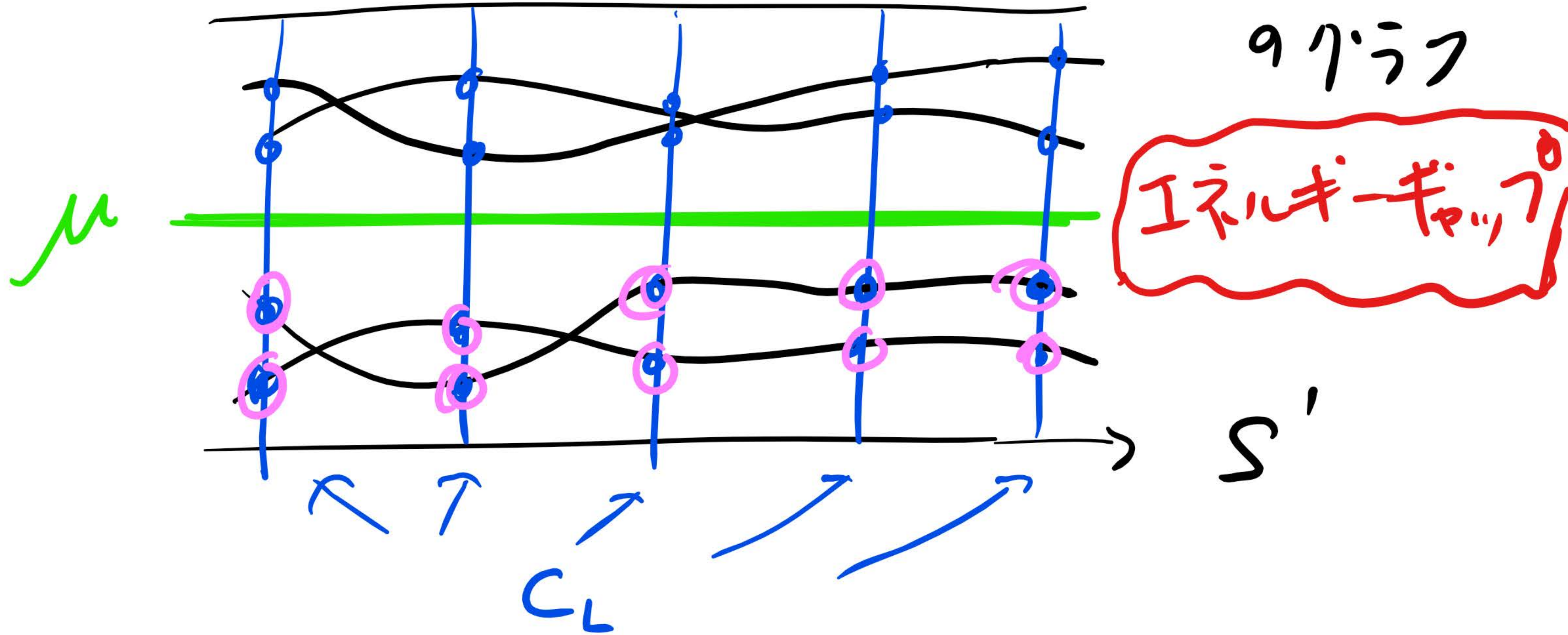
絶縁体 ⟷ 導体 (2)

"Def" 化学ポテンシャル μ において、
今考えている系が $\boxed{\text{絶縁体}}$ であるとは、
$\boxed{\mu \notin \sigma(\tilde{H})}$ をみたすこと。



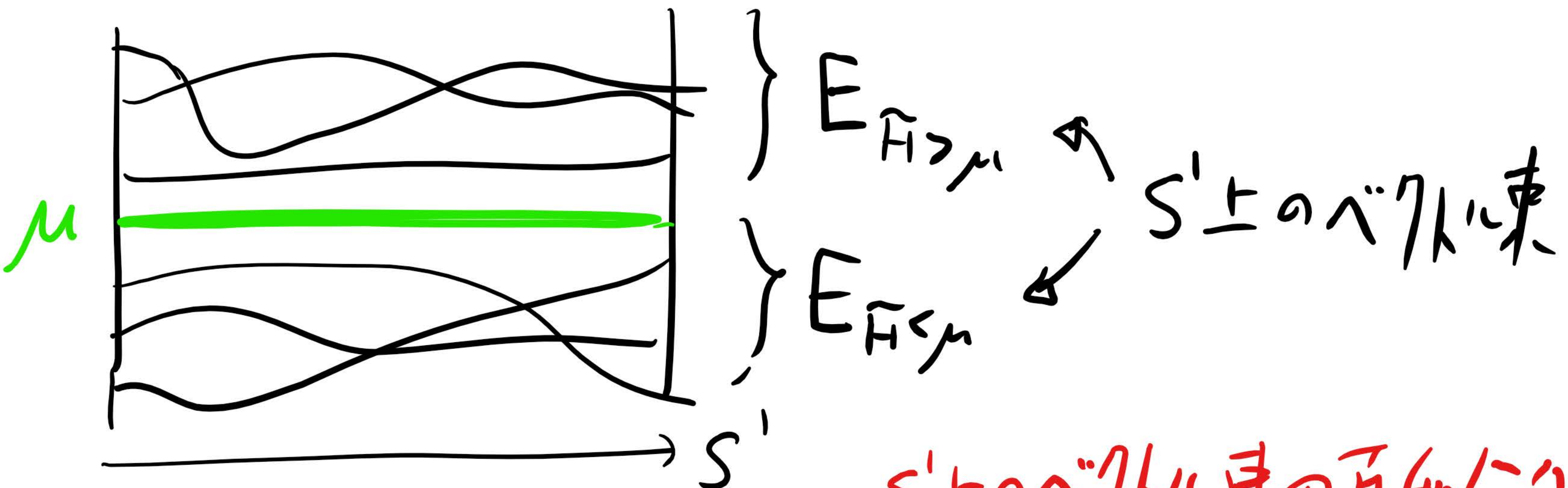
絶縁体 ⟷ 導体 (3)

の $(\hat{H}(t))$ のグラフ



$\hat{H}^{C_L}$ or $H^{\mathbb{Z}/L}$ では ◎ の状態のウェッジ積が確率最大

エネルギーギャップに付随するトポロジカル不変量(1)



S^1上のベクトル束の直和分解

$$\boxed{\underbrace{\mathbb{C}^N}_{S^1\times\mathbb{C}^N =} = E_{\hat{H}<\mu} \oplus E_{\hat{H}>\mu}}$$

エネルギーギャップに付随するトポロジカル不変量(2)

Recall

$$K(X) = \{ E^0 \oplus E^1 \} \Big/ \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ \text{homotopy} \\ \cdot\ \text{stablization} \end{array} \right.$$

Cumpact Hausdurff

$\mathbb{Z}/2$ 次数付ベクトル束 / X
(有限階数複素)

$$\boxed{\left[E_{\hat{H}<\mu} \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rk}\, E_{\hat{H}<\mu}} \right] = -\left[E_{\hat{H}>\mu} \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rk}\, E_{\hat{H}>\mu}} \right] \in \tilde{K}^0(S^1)}$$

エネルギーギャップに付随するトポロジカル不変量(3)

- 1次元の結晶 $\mathbb{Z}$ において、エネルギーギャップをもつ Hamiltonian $\tilde{H}$ から下の不変量を得た。
- しかし、$\tilde{K}^0(S^1)=0$ であるため、これ自身は自明。
- これが自明でないように設定を拡張したい。

$$\boxed{\left[E_{\tilde{H}<\mu} \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rk}\, E_{\tilde{H}<\mu}}\right] = -\left[E_{\tilde{H}>\mu} \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rk}\, E_{\tilde{H}>\mu}}\right] \in \tilde{K}^0(S^1)}$$

エネルギーギャップに付随するトポロジカル不変量(4)

- d次元の結晶 $\mathbb{Z}^d$ において、エネルギーギャップをもつ Hamiltonian $\tilde{H}$ から下の不変量を得る。
- $d=2$の時 $c_1(E_{\tilde{H}<\mu}) \in H^2(T^2) \cong \tilde{K}^0(T^2) \cong \mathbb{Z}$ と一致
- $d=3$の時 $c_1(E_{\tilde{H}<\mu}) \in H^2(T^3) \cong \tilde{K}^0(T^3) \cong \mathbb{Z}^3$ と一致

$$\boxed{\left[E_{\tilde{H}<\mu} \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rk}\, E_{\tilde{H}<\mu}}\right] = -\left[E_{\tilde{H}>\mu} \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rk}\, E_{\tilde{H}>\mu}}\right] \in \tilde{K}^0(T^d)}$$

バルク指数

エネルギーギャップに付随するトポロジカル不変量(4)

㊟ d次元の結晶 $\mathbb{Z}^d$ において、エネルギーギャップをもつHamiltonian $\widehat{H}$ から下の不変量を得る。

㊟ $d=2$ の時 $c_1(E_{\widehat{H}<\mu}) \in H^2(T^2) \cong \widetilde{K}^0(T^2) \cong \mathbb{Z}$ と一致

㊟ $d=3$ の時 $c_1(E_{\widehat{H}<\mu}) \in H^2(T^3) \cong \widetilde{K}^0(T^3) \cong \mathbb{Z}^3$ と一致

$$\boxed{\left[E_{\widehat{H}<\mu} \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rk}E_{\widehat{H}<\mu}}\right] = -\left[E_{\widehat{H}>\mu} \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{rk}E_{\widehat{H}>\mu}}\right] \in \widetilde{K}^0(T^d)}$$

エッジ $\mathbb{N}$ 

バルク $\mathbb{Z}$ 

$$\begin{tikzcd} L^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^N) \arrow[r, "H^{edge}"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & L^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^N) \\ L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) \arrow[r, "H"'] & L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) \arrow[u, "\iota^*"'] \end{tikzcd}$$

$$H^{edge} = \iota^* H \iota + {}^{\exists}(\text{有限階数自己随伴})$$

エッジ　$\mathbb{N}$　$\cdots$

バルク　$\mathbb{Z}$　$\cdots$

Lemma

仮定　Hはμにおいてギャップをもつとする。

結論
- $H^{edge}\phi=\mu\phi$ の解は有限次元
- 個々の解 $\phi=\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、$n\to\infty$ の時 指数的に減衰する。

エッジの近くに局在する

エッジ指数

☆ $\mathrm{Ker}(H^{edge}-\mu)$ の情報を用いて、
トポロジカル不変量を定義したい。

☆ $H^{edge}-\mu : L^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^N)$ は、
自己随伴 Fredholm 作用素である。 （H が μ でギャップをもつとき）

☆ 上の目的に見合う不変量として、
"Fredholm 指数" がある。——

自己随伴Fredholm作用素の指数（1）

$$\tilde{K}^1(S^0) = \left\{ \mathcal{V} \xrightarrow{H} \mathcal{V} \right\} \Big/ \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ \text{homotopy} \\ \cdot\ \text{stabilization} \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{V} : \text{Hilbert space} \\ H : \text{self-adjoint Fredholm} \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \tilde{K}^1(S^0) = 0$$

付加的構造の下で
非自明になる——

$\mathcal{V}_1 \xrightarrow{H_1} \mathcal{V}_1$ の直和
w/ $\operatorname{Ker} H_1 = 0$

自己随伴 Fredholm 作用素の指数 (2)

$$\tilde{K}^0(S^0) = \left\{ \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{H} & V \\ \| & \| & \| \\ V^0 \oplus V^1 & \begin{pmatrix} 0 & H_0^* \\ H_0 & 0 \end{pmatrix} & V^0 \oplus V^1 \end{array} \right\} \Big/ \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ \text{homotopy} \\ \cdot\ \text{stabilization} \end{array} \right.$$

$\mathbb{Z}/2$ 次数付 Hilbert space

$$\Longrightarrow \tilde{K}^0(S^0) = \mathbb{Z} \ni \operatorname{ind} H := \dim \operatorname{Ker} H_0 - \dim \operatorname{Ker} H_0^*$$

注 $V = V^0 \oplus V^1$ が有限階数の時 $H = 0$ は Fredholm

自己随伴Fredholm作用素の指数(3)

$$\tilde{K}^1(S^1) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{H} & \mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1 & = & S^1 \end{array} \right\} \Big/ \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ \text{homotopy} \\ \cdot\ \text{stabilization} \end{array} \right.$$

S^1をパラメータ空間とする族

$$\Longrightarrow \tilde{K}^1(S^1) = \mathbb{Z}$$ ∋ HのS^1に沿うスペクトル流

注 $\mathcal{V}$ が有限階数の時 スペクトル流は常に0.

自己随伴 Fredholm 作用素の指数 (3)

$$\cancel{\tilde{K}^1(S^1)} = \left\{ \mathcal{V} \xrightarrow{H} \mathcal{V} \right\} \Big/ \left\{ \begin{array}{l} \cdot\, \text{homotopy} \\ \cdot\, \text{stabilization} \end{array} \right.$$

$\tilde{K}^1(T^2)$

$\cdot\, T^2\ \cancel{S^1} = \cancel{S^1}\ T^2$

T^2 $\cancel{S^1}$ をパラメータ空間とする族　　$T = S^1 \times S^1$

2つのS^1

$\Longrightarrow \tilde{K}^1(\cancel{S^1}) = \mathbb{Z}^2 \ni H$ の $\cancel{S^1}$ にそうスペクトル流

T^2

注　$\mathcal{V}$ が有限階数の時 スペクトル流は常に 0.

(改めて) エッジ指数

"Def" Hがμにおいてギャップをもつ時
$H^{edge}-\mu$ は Fredholm 作用素である。
この作用素の"指数"をエッジ指数とよぶ: $\mathrm{ind}(H^{edge}-\mu)$

※ 1次元の結晶ではエッジ指数 $\in \tilde{K}^1(S^0)=0$.

※ $d=2,3$ の次元では値域は各々
$d=2 \Rightarrow K^1(T^1)\cong\mathbb{Z}$, $d=3 \Rightarrow K^1(T^2)\cong\mathbb{Z}^2$

ここまでのまとめ

- 相互作用のないfermionでは、多体系の考察は、本質的に1粒子の考察に帰着する。

- d次元の結晶のモデルとして、$\mathbb{Z}^d$上の作用素は連続写像 $\hat{H}: T^d \longrightarrow \{N次\text{Hermite}行列\}$ によって記述される。

- $\hat{H}$ が μ においてエネルギーギャップをもつとき、バルク指数 $\in \tilde{K}^0(T^d)$、エッジ指数 $\in \tilde{K}^1(T^{d-1})$ が定義される。

$$T^d = S^1 \times T^{d-1}$$

バルク・エッジ対応 (1)

- バルク指数とエッジ指数の関係は、物理学者、数学者達によって、様々な方法で、様々な変種において確立されてきた。
- エッジ指数 (= Fredholm 指数) をバルク指数 (= ベクトル束のねじれ) によって表示する式は「指数定理」の一種ともとらえられる。

バルク・エッジ対応 (2)

定理

$$
\begin{tikzcd}
K^0(S^1\times T^{d-1}) \arrow[r, "(*)"] \arrow[d, phantom, "\ni" description] & K^1(T^{d-1}) \\
\text{バルク指数} \arrow[r, mapsto] & \text{エッジ指数}
\end{tikzcd}
$$

ここで $(*)$ は K 理論における「fiber 積分」

特に $d=2,3$ の時には、次のように書きかえられる。

$$
\begin{tikzcd}
H^2(S^1\times T^{d-1};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\int_{S^1}"] \arrow[d, phantom, "\ni" description] & H^1(T^{d-1};\mathbb{Z}) \arrow[d, phantom, "\ni" description] \\
\text{バルク指数} \arrow[r, mapsto] & \text{エッジ指数}
\end{tikzcd}
$$

参考

- 粗幾何によるバルク・エッジ対応の定式化 (窪田 2017)
- 1次元スピン系における(相互作用がある場合の)トポロジカル相の分類 (Bachmann・緒方 2015)
- 結晶の持つ対称性をくみあわせたトポロジカル相 (五味・塩崎・佐藤 2015)
- 「エッジ」より余次元の高い「コーナー」に対応する不変量の定式化と性質 (林 2016)