ジーゲル保型形式の次元公式

若槻　聡

金沢大学

2016 年 3 月 19 日

目次

1. 一変数保型形式の次元公式（サーベイ）
2. ジーゲル保型形式の次元公式（主結果）
3. 証明について
4. 今後の課題と関連する話題

プレプリント
The dimensions of spaces of Siegel cusp forms of general degree
arXiv:1602.05676, February 2016

1. 一変数保型形式の次元公式

$\mathfrak{H}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$（上半平面）とおく．
$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $\mathfrak{H}_1$ 上に次のように作用する．

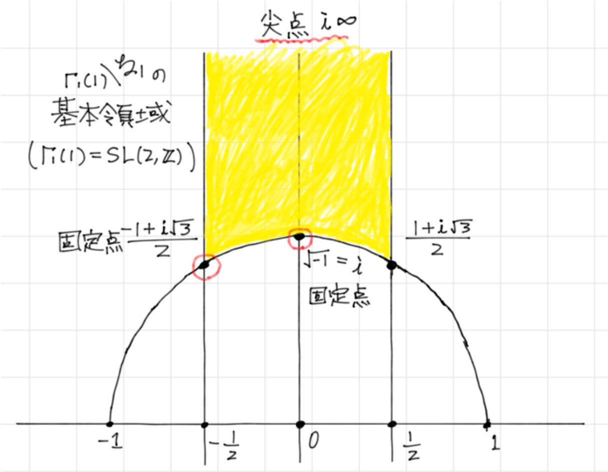
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = (az+b)(cz+d)^{-1} \qquad (z \in \mathfrak{H}_1). \tag{1}$$

$\Gamma_1(1) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ とおき，2 以上の自然数 N に対して

$$\Gamma_1(N) = \{\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv I_2 \mod N\}$$

と定める．$\Gamma_1(N)$ はレベル N の主合同部分群と呼ばれる．以下，Γ を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})$ の合同部分群とする．つまり，Γ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})$ の部分群であり，ある自然数 N が存在して $\Gamma_1(N) \subset \Gamma$ かつ $[\Gamma : \Gamma_1(N)] < \infty$ が成り立つ．

$\mathfrak{H}_1$ 上の点 z に対して，$\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot z = z\}$ とおく．
Γ_z が $\pm I_2$ 以外の元を含むとき，点 z を Γ の固定点という．
$\mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ の点 x に対して，$\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot x = x\}$ とおく．
($\mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ 上への $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の作用は (1) と同じ．)
Γ_x が $\pm I_2$ 以外の元を含むとき，点 x を Γ の尖点（カスプ）という．



$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ と $z \in \mathfrak{H}_1$ について，$J(g,z) = cz + d$ とおく．自然数 k を一つ固定する．$\mathfrak{H}_1$ 上の関数 f に対して，$f^g(z) = J(g,z)^{-k} f(z)$ $(g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $z \in \mathfrak{H}_1)$ と定める．$\mathfrak{H}_1$ 上の正則関数 f が次の二つの条件を満たすとき，f を Γ に関する重さ k の**保型形式**と呼ぶ．

(i) $f^\gamma(z) = f(z)$, $\gamma \in \Gamma$, $z \in \mathfrak{H}_1$.

(ii) $z = g \cdot \infty$ を Γ の尖点とし，群 $(g^{-1}\Gamma g)_\infty/\{\pm I_2\}$ の生成元の一つを $\begin{pmatrix} 1 & M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$f^g(z)$ は次のようなフーリエ級数展開（q の整関数）をもつ．

$$f^g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n \, q^n \qquad (q = e^{2\pi i z/M}).$$

Γ に関する重さ k の保型形式全体は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を成す．その空間を $\boxed{M_k(\Gamma)}$ と書く．条件 (ii) の任意の尖点のフーリエ級数展開において $c_0 = 0$ が成り立つような保型形式を**カスプ形式**と呼ぶ．Γ に関する重さ k のカスプ形式全体は $M_k(\Gamma)$ の部分空間を成す．その空間を $\boxed{S_k(\Gamma)}$ と書く．もし k が奇数かつ $-I_2 \in \Gamma$ なら (i) より $M_k(\Gamma) = 0$ となる．

$\Gamma = \Gamma_1(1) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の保型形式の例.
ラマヌジャンの Δ.

$$\Delta(z) := q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} \in S_{12}(\Gamma_1(1)), \quad q = e^{2\pi i z}.$$

アイゼンシュタイン級数 $E_k(z)$. k は 4 以上の偶数.

$$E_k(z) := \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1}\frac{1}{(cz+d)^k}, \quad E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}\sigma_{k-1}(n)\,q^n,$$

c, d は互いに素な整数な組全体を動く, B_n は第 n ベルヌーイ数,
$\sigma_k(n) = \sum_{d|n,\, d>0} d^k$ とする. $E_k(z)$ は $M_k(\Gamma_1(1))$ に属する.
ただし, B_n は次の母関数で定義しておく.

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n.$$

$$M_k(\Gamma_1(1)) = \sum_{4s+6t=k,\ s,t\geq 0} \mathbb{C}\, E_4(z)^s\, E_6(z)^t \qquad (k \text{ は } 0 \text{ 以上の偶数}),$$

$$M_k(\Gamma_1(1)) = \mathbb{C}E_k(z) \ \oplus S_k(\Gamma_1(1)) \qquad (k \text{ は } 4 \text{ 以上の偶数}),$$

$$S_k(\Gamma_1(1)) = M_{k-12}(\Gamma_1(1))\, \Delta(z) \qquad (k \text{ は } 12 \text{ 以上の偶数}),$$

保型形式環 $\quad M(\Gamma_1(1)) = \bigoplus_{k\geq 0} M_k(\Gamma_1(1)) = \mathbb{C}[E_4(z), E_6(z)].$

$1728\Delta(z) = E_4(z)^3 - E_6(z)^2$ と $M_0(\Gamma_1(1)) = \mathbb{C}$ に注意されたい．
これらから次元は次のように記述される． 4 以上の偶数 k について，

$$\dim M_k(\Gamma_1(1)) = \dim S_k(\Gamma_1(1)) + 1,$$

$$\dim S_k(\Gamma_1(1)) = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right] & k \not\equiv 2 \mod 12, \\ \left[\frac{k}{12}\right] - 1 & k \equiv 2 \mod 12 \end{cases}$$

が成り立つ．

一般的に，k が 3 以上の整数について，

$$\dim M_k(\Gamma) = \dim S_k(\Gamma) + (\Gamma\text{ の尖点の数})$$

が成り立つ（$-I_2 \in \Gamma$ のときは k は偶数とする）．またセルバーグ跡公式（もしくはリーマン・ロッホの定理）を使えば，一般の Γ に対して

$\dim S_k(\Gamma)$ の公式が基本領域の固定点と尖点のデータによって与えられる．

主合同部分群 $\Gamma_1(N)$ について，跡公式から得られる公式を見てみよう．既に $\dim S_k(\Gamma_1(1))$ の公式は与えたが，基本領域のデータで書き直す．$k \equiv 0 \bmod 3$ のとき $t_{k,3} = 1$, $k \equiv 1 \bmod 3$ のとき $t_{k,3} = 0$, $k \equiv 2 \bmod 3$ のとき $t_{k,3} = -1$ とする．このとき，3 以上の偶数 k に対して

$$\dim S_k(\Gamma_1(1)) = \frac{k-1}{12} + \frac{1}{4}(-1)^{k/2} + \frac{1}{3}t_{k,3} - \frac{1}{2},$$

$$\dim S_k(\Gamma_1(2)) = [\Gamma_1(1):\Gamma_1(2)] \times \left\{\frac{k-1}{12} - \frac{1}{2\cdot 2}\right\},$$

$$\dim S_k(\Gamma_1(N)) = \frac{[\Gamma_1(1):\Gamma_1(N)]}{2} \times \left\{\frac{k-1}{12} - \frac{1}{2\cdot N}\right\} \quad (N > 2)$$

と次元公式が与えられる．

第一項は基本領域の体積と対応している．$N>2$ のとき，基本領域 $\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}_1$ は

$$2^{-1}[\Gamma_1(1):\Gamma_1(N)] = 2^{-1}N^3 \prod_{p|N,\, p\ \text{は素数}} (1-p^{-2})$$

倍だけ基本領域 $\Gamma_1(1)\backslash\mathfrak{H}$ より広がっている．（$\Gamma_2(2)$ は $-I_2$ を含むので $[\Gamma_1(1):\Gamma_1(2)]=6$ 倍.）$\dim S_k(\Gamma_1(1))$ の第二項と第三項は固定点と対応している．

$$|\Gamma_1(1)_{z_1}| = 4 \ \ (z_1 = i), \quad |\Gamma_1(1)_{z_2}| = 6 \ \ (z_2 = (-1+i\sqrt{3})/2)$$

となっており，k の巡回関数と分母の数値との対応がみてとれる．$N>1$ のとき $\Gamma_1(N)$ は固定点を持たない．最後の項は尖点と対応してる．$\Gamma_1(1)$ の尖点 $i\infty$ からの寄与は，リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の特殊値

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

となっている．$\Gamma_1(2)$ の尖点は $3=2^{-1}[\Gamma_1(1):\Gamma_1(N)]$ 個，$N>2$ について $\Gamma_1(N)$ の尖点は $(2N)^{-1}[\Gamma_1(1):\Gamma_1(N)]$ 個あるので，$-1/2$ をその分だけ倍した値が公式に現れる．

2. ジーゲル保型形式の次元公式

$\mathrm{Sp}(n) = \{g \in \mathrm{GL}(2n) \mid gJ_n{}^t g = J_n\}/\mathbb{Q}, \qquad J_n = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix},$

$\mathfrak{H}_n = \{Z \in M(n, \mathbb{C}) \mid Z = {}^t Z, \mathrm{Im}(Z) > 0\}$（ジーゲル上半空間）とおく.

$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ の元 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ は $\mathfrak{H}_n$ 上に次のように作用する.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \qquad (Z \in \mathfrak{H}_n).$$

$\mathrm{SL}(2) = \mathrm{Sp}(1)$ $(n = 1)$ に注意する.

$\Gamma_n(1) = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ とおく，そして，レベル N の主合同部分群 $\Gamma_n(N)$ が,

$$\Gamma_n(N) = \{\gamma \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv I_{2n} \mod N\}$$

と定まる．Γ を $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Q})$ の合同部分群とする．つまり，Γ は $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Q})$ の部分群であり，ある自然数 N が存在して $\Gamma_n(N) \subset \Gamma$ かつ $[\Gamma : \Gamma_n(N)] < \infty$ が成り立つ.

n は 2 以上の整数とする．また自然数 k を一つ固定する．$\mathfrak{H}_n$ 上の正則関数 f が次の条件を満たすとき，f を Γ に関する重さ k のジーゲル保型形式と呼ぶ．

$$\det(CZ+D)^{-k}f(\gamma\cdot Z)=f(Z),\quad \gamma=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\Gamma,\quad Z\in\mathfrak{H}_n.$$

Γ に関する重さ k のジーゲル保型形式全体は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を成す．その空間を $\boxed{M_k(\Gamma)}$ と書く．$n>1$ なので Koecher の原理から，$n=1$ での条件 (ii) に対応するフーリエ級数展開の条件をジーゲル保型形式は満たす．

$M_k(\Gamma)$ の元 f が条件

$$\sup_{Z\in\mathfrak{H}_n}|\det(\mathrm{Im}(Z))^{k/2}f(Z)|<\infty$$

を満たすとき，f をジーゲルカスプ形式と呼ぶ．この有界性の条件は前述の $n=1$ でのカスプ形式となるため条件と同値である．Γ に関する重さ k のカスプ形式全体は $M_k(\Gamma)$ の部分空間を成す．その空間を $\boxed{S_k(\Gamma)}$ と書く．

ジーゲル保型形式の例.

整数成分からなる m 次正定値対称行列 A を一つ固定する．さらに A は even とする（A の対角成分が偶数）．次のように A と $T \in M(n, \mathbb{Z})$ の方程式の整数解の個数を考えよう.

$$r_A(T) := \left| \{ g \in M(m, n, \mathbb{Z}) \mid {}^t g A g = 2T \} \right|.$$

解が 0 でないためには，T は m 次半正定値対称行列であり，さらに半整数（$2T$ は even）となる必要がある．$r_A(T)$ は有限であることに注意する．これより**テータ級数** $\theta_A^{(n)}(Z)$ が次のように定義される.

$$\theta_A^{(n)}(Z) = \sum_{T \text{ は半整数かつ半正定値}} r_A(T) e^{2\pi i \mathrm{Tr}(TZ)} \quad (Z \in \mathfrak{H}_n).$$

m が偶数であるなら，ある自然数 N について $\theta_A^{(n)}(Z)$ は $M_{m/2}(\Gamma_n(N))$ に属する.

いくつかの注意.

- もし $-I_{2n} \in \Gamma$ かつ $n \equiv k \equiv 1 \mod 2$ なら，$M_k(\Gamma) = 0$ となる.
- $M(\Gamma_2(1))$ と $M(\Gamma_2(2))$ の保型形式環は Igusa により構成されている. $M(\Gamma_3(1))$ と $M(\Gamma_3(2))$ の保型形式環は Tsuyumine, Runge による. それらから次元公式も従う.
- $\Gamma_n(1)$ は固定点をもつため，一般的に $\dim S_k(\Gamma_n(1))$ の明示的公式を得ることは難しいと思われる. 一方で $N > 2$ のとき，$\Gamma_n(N)$ は固定点を持たない.（次元公式は尖点からの寄与のみで記述される.）
- 重さ $k \leq n+1$ の場合には，あまり一般的な結果は無いようである. 重さ $k = 1$ の場合，$\dim M_1(\Gamma_n(N))$ の公式が $n > 2$ に対して Li により与えられている.
- $\dim M_k(\Gamma) - \dim S_k(\Gamma)$ はアイゼンシュタイン級数を用いることで n より小さい次数のカスプ形式の空間の次元で記述できることが期待できるが，（講演者の不勉強で）良く分からない. $\Gamma = \Gamma_n(1)$ かつ $k > 2n$ のときは $\dim S_k(\Gamma_t(1))$ $(1 \leq t < n)$ の和でその差は記述される.

新谷ゼータ関数 $\zeta_{\mathrm{Shin}}(L_r^*, s)$ の定義.

$1 \le r \le n$ とする．次のように記号を定める.

$$V_r = \{x \in M(r) \mid x = {}^t x\}, \quad \Omega_r = \{x \in V_r(\mathbb{R}) \mid x > 0\},$$

$$L_r^* = \{x = (x_{jl}) \in V_r(\mathbb{Q}) \mid x_{jj} \in \mathbb{Z},\ \ x_{jl} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\ \ (j < l)\}.$$

$\mathrm{SL}(r)$ は V_r 上に $x \cdot g = {}^t g x g$ $(g \in \mathrm{SL}(r),\ x \in V_r)$ と作用する．各点 $x \in L_r^* \cap \Omega_r$ に対して

$$\varepsilon_r(x) = |\{\gamma \in \mathrm{SL}(r, \mathbb{Z}) \mid \gamma \cdot x = x\}|$$

とおく．このとき，$s \in \mathbb{C}$ について，

$$\zeta_{\mathrm{Shin}}(L_r^*, s) = \frac{1}{2} \sum_{x \in L_r^* \cap \Omega_r / \mathrm{SL}(r,\mathbb{Z})} \frac{1}{\varepsilon_r(x)\ \det(x)^s}$$

と新谷ゼータ関数が定義される．この級数は s の実部が $(r+1)/2$ より大きいときに絶対収束し，複素平面全体に有理接続される．特に $\zeta_{\mathrm{Shin}}(L_r^*, s)$ は $s = 1, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{r}{2}, \frac{r+1}{2}$ を除いて正則である．$r = 0$ の場合は形式的に $\zeta_{\mathrm{Shin}}(L_0^*, s) = 1$ とする.

主定理

$k > n+1$ かつ $N > 2$ のとき

$$\dim S_k(\Gamma_n(N)) =$$

$$[\Gamma_n(1):\Gamma_n(N)] \times \sum_{r=0}^{n} \zeta_{\mathrm{Shin}}(L_r^*, r-n) \times 2^{r-r^2+rn} N^{\frac{r(r-1)}{2}-rn}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n-r} \frac{(-1)^j (j-1)!}{(2j-1)!} \zeta(1-2j) \times 2^{-2n+r} \prod_{t=1}^{n-r} \prod_{u=t+r}^{n} (2k-t-u)$$

が成り立つ．ただし，

$$[\Gamma_n(1):\Gamma_n(N)] = N^{n(2n+1)} \prod_{p|N \text{ (prime)}} \prod_{l=1}^{n} (1-p^{-2l})$$

となっている．

Shintani の仕事について.

$$f_{n,k}(g^{-1}) = \det(Ci+D)^{-k}\det\left(\frac{g\cdot iI_n + iI_n}{2i}\right)^{-k}, \quad g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R}).$$

Godement 1957

$k > 2n$ のとき $\dim S_k(\Gamma) = d_{n,k}\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G(\mathbb{R})}\sum_{\gamma\in\Gamma} f_{n,k}(x^{-1}\gamma x)\,\mathrm{d}x$ がなりたつ.

ただし, $\mathrm{d}x$ は $G(\mathbb{R})$ のハール測度であり, $\mathrm{d}x$ にのみ依存する定数倍を除いて $d_{n,k}$ は多項式 $\prod_{1\le t\le u\le n}(2k-t-u)$ と等しい.

$$\Pi = \{\gamma \in \Gamma_n(N) \mid \gamma \text{ は } \begin{pmatrix} I_n & * \\ O_n & I_n \end{pmatrix} \text{ の形の元に } \Gamma_n(1)\text{-共役となる}\}.$$

Shintani 1975

積分 $d_{n,k}\displaystyle\int_{\Gamma_n(N)\backslash G(\mathbb{R})}\sum_{\gamma\in\Pi} f_{n,k}(x^{-1}\gamma x)\,\mathrm{d}g$ は絶対収束し, 主結果の等式の右側と等しい.

特殊値について $\zeta_{\mathrm{Shin}}(L_r^*, r-n) = ??$.

$r=1$ のとき，良く知られた公式として，

$$\zeta_{\mathrm{Shin}}(L_1^*, 1-n) = \frac{1}{2}\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{2n}$$

が成り立つ.

Siegel 1938 (Shintani 1975)

$r=2$ のとき，

$$\zeta_{\mathrm{Shin}}(L_2^*, 2-n) = \begin{cases} \frac{1}{96} & \text{if } n=2, \\ -\frac{(-1)^n B_{2n-2}}{2^{2n}(n-1)} & \text{if } n>2 \end{cases}$$

が成り立つ.

Ibukiyama and Saito 1995

$r \geq 3$ かつ r が奇数のとき，$R = \frac{r-1}{2}$ とおくと，

$$\zeta_{\mathrm{Shin}}(L_r^*, r-n) = (-1)^{R+1} 2^{-R(2n-2r+1)} \times \prod_{j=1}^{R} |B_{2j}| \\ \times B_{n-R} \prod_{l=1}^{R} B_{2n-2r+2l} \times \frac{1}{R!} \prod_{t=1}^{R+1} \frac{1}{n-r+t}$$

となる．また $r \geq 4$ かつ r が偶数のとき，$R' = r/2$ とおくと，

$$\zeta_{\mathrm{Shin}}(L_r^*, r-n) = (-1)^{[R'/2]+R'(n-r+1)} 2^{-r(n-r+1)-R'} \times |B_{R'}| \prod_{j=1}^{R'-1} |B_{2j}| \\ \times \prod_{l=1}^{R'} B_{2n-2r+2l} \times \frac{1}{R'!} \prod_{t=1}^{R'} \frac{1}{n-r+t}.$$

となる．

$\dim S_k(\Gamma_n(N))$ の具体的な公式について.

(1) $n=1,\ k>2,\ N>2$ の場合.

$$\dim S_k(\Gamma_1(N)) = [\Gamma_1(1) : \Gamma_1(N)] \times \left\{ \frac{2k-2}{2^4 \cdot 3} - \frac{1}{2^2 \cdot N} \right\}.$$

$\dim S_k(\Gamma_1(N))$ の具体的な数値例.

$N \diagdown k$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
5	4	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64

(2) $n=2,\ k>3,\ N>2$ の場合.
Christian 1975. Morita 1974. Yamazaki 1976.

$$\begin{aligned}\dim S_k(\Gamma_2(N)) &= [\Gamma_2(1):\Gamma_2(N)] \\ &\times\left\{\frac{(2k-2)(2k-3)(2k-4)}{2^{10}\cdot 3^3\cdot 5}-\frac{2k-3}{2^6\cdot 3^2\cdot N^2}+\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot N^3}\right\}.\end{aligned}$$

$\dim S_k(\Gamma_2(N))$ の具体的な数値例.

$N \diagdown k$	4	5	6	7	8	9	10
3	15	76	200	405	709	1130	1686
4	360	1352	3240	6280	10728	16840	24872
5	5655	18980	43680	83005	140205	218530	321230

(3) $n=3$, $k>4$, $N>2$ の場合. Tsushima 1980.

$$\dim S_k(\Gamma_3(N)) = [\Gamma_3(1):\Gamma_3(N)]\times \left\{ \frac{(2k-2)(2k-3)(2k-4)^2(2k-5)(2k-6)}{2^{16}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7} - \frac{2k-4}{2^{10}\cdot 3^2\cdot 5\cdot N^5} + \frac{1}{2^8\cdot 3^3\cdot N^6} \right\}.$$

$\dim S_k(\Gamma_3(N))$ の具体的な数値例.

$N \diagdown k$	5	6	7	8
3	41132	260624	1036100	3154151
4	14400512	87671808	345492480	1048957952
5	2189096000	13202280000	51921714000	157545444875

(4) $n=4,\ k>5,\ N>2$ の場合.

$$\dim S_k(\Gamma_4(N)) = [\Gamma_4(1):\Gamma_4(N)]\times \left\{ \frac{(2k-2)(2k-3)(2k-4)^2(2k-5)^2(2k-6)^2(2k-7)(2k-8)}{2^{25}\cdot 3^8\cdot 5^4\cdot 7^2} + \frac{(2k-3)(2k-4)(2k-5)^2(2k-6)(2k-7)}{2^{17}\cdot 3^7\cdot 5^3\cdot 7\cdot N^4} - \frac{(2k-4)(2k-5)(2k-6)}{2^{15}\cdot 3^5\cdot 5\cdot 7\cdot N^7} + \frac{1}{2^{12}\cdot 3^4\cdot 5\cdot N^{10}} \right\}.$$

$\dim S_k(\Gamma_4(N))$ の具体的な数値例.

$N \diagdown k$	6	7
3	4579839810	59162254866
4	103260267479040	1412646545915904
5	429562396640081250	5989030815121331250

(5) $n=5,\ k>6,\ N>2$ の場合.

$$\dim S_k(\Gamma_5(N)) = [\Gamma_5(1):\Gamma_5(N)]\times \left\{ \frac{(2k-2)(2k-3)(2k-4)^2(2k-5)^2(2k-6)^3(2k-7)^2(2k-8)^2}{2^{33}\cdot 3^{12}\cdot 5^5\cdot 7^3\cdot 11} \times (2k-9)(2k-10) - \frac{(2k-4)(2k-5)(2k-6)^2(2k-7)(2k-8)}{2^{23}\cdot 3^7\cdot 5^3\cdot 7\cdot N^9} - \frac{(2k-5)(2k-6)(2k-7)}{2^{17}\cdot 3^7\cdot 5^2\cdot 7\cdot N^{12}} + \frac{2k-6}{2^{16}\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7\cdot N^{14}} \right\}.$$

$\dim S_k(\Gamma_5(N))$ の具体的な数値例.

$N \diagdown k$	7
3	54749238798613788
4	320755407836707217735680
5	95447256764961220187148437500

次元の漸近挙動について

Savin 1989. 重複度極限公式.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\dim S_k(\Gamma_n(N))}{\mathrm{vol}(\Gamma_n(N)\backslash G(\mathbb{R}))} = d_{n,k}.$$

主定理と特殊値の結果により剰余項の評価が得られる. n が奇数のとき,

$$\dim S_k(\Gamma_n(N)) = \mathrm{vol}(\Gamma_n(N)\backslash G(\mathbb{R}))\, d_{n,k} + O(N^{2n^2-n+1} k^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}})$$

となり, n が偶数のとき

$$\dim S_k(\Gamma_n(N)) = \mathrm{vol}(\Gamma_n(N)\backslash G(\mathbb{R}))\, d_{n,k} + O(N^{2n^2} k^{\frac{n(n-1)}{2}})$$

となる. ただし, $\mathrm{vol}(\Gamma_n(N)\backslash G(\mathbb{R})) \sim N^{n(2n+1)}$, $d_{n,k} \sim k^{n(n+1)/2}$ に注意する.

3. 証明について

- Step 1. Arthur の不変跡公式.
  擬係数と呼ばれる $G(\mathbb{R})$ 上の関数 $\tilde{f}_{n,k}$ を用いることで,
  $\dim S_k(\Gamma)$ が重み付きユニポテント軌道積分の一次結合で記述できる.
  ただし, Γ は neat とし, 係数は不明であることに注意する.
- Step 2. 軌道積分における $\tilde{f}_{n,k}$ と $f_{n,k}$ の交換 (Thanks to T. Finis).
  $\tilde{f}_{n,k}$ と $f_{n,k}$ はフーリエ変換した先で同じ振る舞いをする.
  $\tilde{f}_{n,k}$ はコンパクトサポートを持つが明示的に書けない.
  $f_{n,k}$ はコンパクトサポートを持たないが明示的に書ける.
  今のところ $f_{n,k}$ が適用できる跡公式の一般論は限定的.
- Step 3. 重み付きユニポテント軌道積分の消滅.
- Step 4. 消えずに残った項と Shintani の公式との関連付け.
  Arthur の幾何サイドの展開と Finis-Lapid の収束の議論を用いる.
- Step 5. 重さ k の範囲の拡張（Ibukiyama の議論).
  上述の議論は重さ k を十分大きくする必要があるが, 次元は
  $k > n+1$ の範囲で k の多項式となるため, その範囲までのばせる.

ユニポテント軌道積分の消滅について

（重み付き軌道積分の消滅を証明する必要がありますが，説明が長くなるので，重みのない軌道積分の消滅についてのみ解説します．）

$G(\mathbb{C}) = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ のユニポテント共役類全体と，

$(n_1^{l_1}, n_2^{l_2}, \ldots, n_t^{l_t})$, $\quad \sum_{j=1}^{t} n_j l_j = 2n$, $\quad n_j$ が奇数なら l_j は偶数，

のような分割数全体の間には一対一対応が存在する．

各 n_j は対応する共役類のジョルダンブロックのサイズを意味する．

以下，$G(\mathbb{R})$ についてのみ考えるので，$\boxed{G(\mathbb{R}) \text{ を略して } G \text{ と書く．}}$

u を G のユニポテント元とする． $G_u = \{x \in G \mid x^{-1}ux = u\}$ とすると，u の軌道積分 $J_G(u, f)$ が次のように定義される．

$$J_G(u, f) = \int_{G_u \backslash G} f(x^{-1}ux)\, \mathrm{d}x \quad (f \in C^\infty(G)).$$

$(2^r, 1^{2n-2r})$ の形の分割数に対応しないユニポテント共役類の寄与が消滅することを示すためには，そのような共役類の元 u について $J_G(u, f_{n,k}) = 0$ を示す必要がある．（$(2^r, 1^{2n-2r})$ の形の分割数に対応する共役類の寄与が主定理の右辺となる．）

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $X = \log(u) \in \mathfrak{g}$ とおく．Jacobson-Morozov の定理より，$\exists H \in \mathfrak{g}$, $\exists Y \in \mathfrak{g}$ s.t. H は半単純，Y はニルポテント，$[H, X] = 2X$，$[H, Y] = -2Y$，$[X, Y] = H$.

$$\mathfrak{g}_j = \{Z \in \mathfrak{g} \mid [H, Z] = jZ\}, \quad U_{>2} = \exp\left(\bigoplus_{j>2} \mathfrak{g}_j\right)$$

とおく．そして，$L = \{g \in G \mid gH = Hg\}$ とする．X は $\mathfrak{g}_2$ の元であり，L は $\mathfrak{g}_2$ 上に随伴表現で作用しており，$O_u = L \cdot X \subset \mathfrak{g}_2$ とおく．

Ranga Rao 1972

$$J_G(u, f) = \int_K \mathrm{d}k \int_{U_{>2}} \mathrm{d}u \int_{O_u} \mathrm{d}Z \; f(k^{-1} \exp(Z) uk) \, |\varphi(Z)|.$$

ただし，K は G の極大コンパクト群，$\varphi(Z)$ は $\mathfrak{g}_2$ 上のある多項式とする．

補題 1

次の二つの条件は同値である

- u は $(2^r, 1^{2n-2r})$ の形の分割数に対応する．
- $U_{>2}$ は自明な群である．

補題 2

関数 $f_{n,k}$ は次のような性質を満たす.

$$\int_{\mathbb{R}} f_{n,k}(x^{-1}\begin{pmatrix} I_n & B(t) \\ O_n & I_n \end{pmatrix} y)\mathrm{d}t = 0 \quad (x, y \in G).$$

ただし，$B(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ とおいた.

補題 1 と補題 2 より，もし u が $(2^r, 1^{2n-2r})$ に対応しないのであれば，

$$\int_{U_{>2}} f_{n,k}(k^{-1}\exp(Z)uk)\,\mathrm{d}u = 0$$

となり，$J_G(u, f_{n,k}) = 0$ が従う.

4. 今後の課題と関連する話題

- 次元公式に現れた新谷ゼータ関数の特殊値の幾何学的解釈
  Hirzebruch，Satake, Ogata, et. al.
  尖点からの寄与の研究
- ヘッケ作用素の跡の明示的計算
  Selberg, Eichler, Hijikata, et. al. （$n = 1$ の場合のみ）
- ヘッケ作用素の固有値の平均値の漸近挙動
  Katz-Sarnak, Shin-Templier, et. al.
  Low-lying zeros of L-functions
  （最近，H. Kim と T. Yamauchi との共同研究で，2 次の正則ジーゲルカスプ形式に対して成果を得た.）
- Arthur 跡公式の幾何サイドの大域係数
  Chaudouard, Hoffmann, et. al.
  概均質ベクトル空間のゼータ関数によって記述できることが期待される.（$\mathrm{Sp}(2)$ に関しては W. Hoffmann との共同研究で解決した.）

ご清聴ありがとうございました.