粘性解と漸近問題
割引消去問題を中心に

石井 仁司
早稲田大学

日本数学会７０周年記念講演

企画特別講演，関西大学，2016 年 9 月 18 日

はじめに

偏微分方程式に関する漸近問題への応用の観点から，粘性解（**viscosity solution**）の発展について少し振り返ってみる．

そもそも粘性解の命名は粘性消去法 **(vanishing viscosity method)** の影響を受けたものである．

ここでの粘性消去法は，ハミルトン・ヤコビ方程式の（自然な弱）解を得るために，与えられたハミルトン・ヤコビ **(Hamilton-Jacobi)** 方程式に粘性項を加えた楕円型方程式を解き，この解の粘性項の係数を 0 とする極限として見出そうというものである．この粘性消去法は微分方程式に対する漸近問題の一つといえる．

粘性解が登場した頃（**1981**，**1983** 年）:

1970 年代の偏微分方程式

線形理論，溝畑茂 (偏微分方程式論)，擬微分作用素，**Fourier** 積分作用素，熊ノ郷準

半群理論，非線形半群理論 **(1967)**，吉田耕作，加藤敏夫，宮寺功，幸村幸男

非線形偏微分方程式（関数解析的）研究の黎明期，山口昌哉，藤田宏，飯野理一

保存則に対する **Kruzkov** のエントロピー解，

これに先行したエントロピー解（**A. Douglis, O. Oleinik**），

非線形半群理論からのアプローチ：

保存則，**M. G. Crandall (1972),**

ハミルトン・ヤコビ方程式，相沢貞一 **(1976)**

Kruzkov のエントロピー解の概念のハミルトン・ヤコビ方程式への移行

M. G. Crandall, P.-L. Lions, L. C. Evans による粘性解の導入

佐藤健一

粘性解理論の重要性

L. C. Evans : Research Opportunities in Nonlinear Partial Differential Equations からの引用

(http://www.nsf.gov/pubs/2002/nsf0120/nsf0120_16.htm)

SOME HIGHLIGHTS

1. Free boundary problems.
2. Dispersive equations and harmonic analysis.
3. Optimal transport.
4. Conservation laws.
5. Stochastic differential equations, continuum limits.
6. Geometric motion.
7. Other geometric PDE.
8. Dynamical methods in the calculus of variations.
9. Kinetic formulations.
10. Viscosity solutions.

繰り返せば,

10. Viscosity solutions.

The notion of ”viscosity solutions” has provided a robust and extremely flexible collection of tools for understanding weak solutions of certain highly nonlinear PDE that satisfy a maximum principle. The biggest successes have been in justifying dynamic programming procedures in control theory, but other applications have included large deviation estimates, interface motions, Hamiltonian dynamics, etc.

その他：

Mathscinet タイトル中に **viscosity solution** を持つ論文数：**714** 篇

AMS MSC における **Viscosity solution** という項目

35D40 PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

49L25 CALCULUS OF VARIATIONS AND OPTIMAL CONTROL, OPTIMIZATION

粘性解理論 $\subset$ 最大値原理 $\subset$ 偏微分方程式理論

簡単な歴史

基礎理論

一意存在

比較定理

Banach 空間上の粘性解 (1985)

特異性のある方程式

退化楕円型方程式

L^p 粘性解 (1996)

弱 KAM 理論 (1997)

距離空間上の粘性解 (2008)

ネットワーク上の HJ 方程式 (2010)

最適制御への応用

最適制御・微分ゲームの

HJBI 方程式の理解

大偏差 (Large deviation) 型評価

HJ 方程式の均質化理論

(1987,1999)

偏微分方程式系の制御

曲率流に対する等高面法 (1991)

∞ ラプラシアン (1993)

数理ファイナンス

可測関数を係数とする

楕円・放物型方程式

非線形随伴法

平均場ゲーム (2006)

近年盛んに研究されている粘性解に関連した漸近問題として，ハミルトン・ヤコビ方程式 を含む完全非線形退化楕円型・放物型方程式の**均質化 (homogenization) の研究**，完全非線形退化放物型方程式の**解の長時間漸近挙動 (long-time behavior)** の研究が挙げられる.

この様な研究で大事なことは，極限関数が満たす方程式の解空間の構造であるが，与えられた境界条件の下で，解が一意であれば，L^∞ ノルムの評価があれば，この一意解への一様収束が分かる.
Barles-Perthame の **half-relaxed limit** の手法.

一意性が分からない状況では，解空間の解析に**弱 KAM 理論 (Kolmogorov-Arnold-Moser)** が重要な役割を果たしている. **A. Fathi, L. C. Evans, W. E**

三竹大寿氏（広島大学），**Hung V. Tran** 氏 **(Wisconsin 大学 Madison 校)** と共同で研究している一つの漸近問題に焦点を当て，ハミルトン・ヤコビ方程式 を含むような完全非線形偏微分方程式の漸近問題の研究の一端を紹介する.

割引消去 (VANISHING DISCOUNT) 問題

次の偏微分方程式を考える.

$$\text{(DP)} \qquad \lambda v(x) + F(x, Dv(x), D^2 v(x)) = 0 \quad \text{in } \mathbb{T}^n.$$

ただし,

$$\begin{cases} v = v^\lambda \text{ は } \mathbb{T}^n \text{ 上の未知関数} \\ \lambda > 0 \text{ は正定数, 割引率} = \text{減価率} \\ F \text{ は } (x, Dv(x), D^2 v(x)) \text{ の既知関数.} \end{cases}$$

関数 v と $F(\cdot, p, X)$ を $\mathbb{R}^n$ の周期 $\mathbb{Z}^n$ を持つ関数と考える.

$$Dv = (v_{x_1}, \ldots, v_{x_n}), \quad D^2 v = \left(v_{x_i x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

割引消去問題: $\lambda \to 0$ とするときの解 v^λ の漸近挙動.

偏微分方程式のクラス

仮定：

(F1) F はつぎの形のものとする.

$$F(x,p,X)=\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\left(-\operatorname{tr}a(x,\alpha)X-b(x,\alpha)\cdot p-L(x,\alpha)\right)$$

$$\text{for } (x,p,X)\in\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n.$$

ここで, $\mathcal{A}$ は σ-コンパクト, 局所コンパクトな距離空間 ($\neq\emptyset$) とし, $\mathbb{S}^n$ は $n\times n$ 実対称行列の全体を表し,

$$a\in C(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A},\mathbb{S}^n_+),\quad b\in C(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A},\mathbb{R}^n),\quad L\in C(\mathbb{T}^n\times\mathcal{A},\mathbb{R}),$$

と仮定し, $\mathbb{S}^n_+$ は $\mathbb{S}^n$ の行列で非負値なものの全体を表す.

(F2) F は $\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n$ 上の連続関数である.

性質: F はつぎの意味で退化楕円型である.

$$X \le Y \quad \Longrightarrow \quad F(x,p,X) \ge F(x,p,Y)$$

性質: F はつぎの凸性を持つ.

$$(p,X) \mapsto F(x,p,X) \text{ は } \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n \text{ 上の凸関数である.}$$

線形作用素 $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}u(x,\alpha) := -\operatorname{tr} a(x,\alpha)D^2u(x) - b(x,\alpha)\cdot Du(x).$$

このとき,

$$F(x,Du,D^2u) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}}(\mathcal{L}u(x,\alpha) - L(x,\alpha)),$$

$$\lambda u + F[u] \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda u(x) + \mathcal{L}u(x,\alpha) \le L(x,\alpha).$$

エルゴード問題

(DP) $$\lambda v^\lambda + F(x, Dv^\lambda, D^2 v^\lambda) = 0 \quad \text{in } \mathbb{T}^n.$$

上のディスカウント問題の解 v^λ の $\lambda \to 0+$ とした時の漸近挙動に関する古典的な結果はつぎの様なものである **(P.-L. Lions-G. Papanicolaou-S. R. S. Varadhan, 1987, 等)**.

適当な仮定の下で，ある定数 $c \in \mathbb{R}$ と関数 $u \in C(\mathbb{T}^n)$ に対して，$\lambda \to 0+$ とする時に，つぎが成り立つ.

$$\begin{cases} -\lambda v^\lambda(x) \to c \quad \mathbb{T}^n \text{ 上で一様収束 }, \\ v^\lambda(x) - m^\lambda \to u(x) \quad \text{適当な } \lambda \text{ の列に沿って } \ \mathbb{T}^n \text{ 上で一様収束.} \end{cases}$$

ただし， m_λ としては，例えば， $m^\lambda = \min_{\mathbb{T}^n} v^\lambda$. ここで得られた組 (u, c) はつぎの **(EP)** の解となる.

(EP) $$F(x, Du(x), D^2 u(x)) = c \quad \text{in } \mathbb{T}^n.$$

この問題

$$\text{(EP)} \qquad F(x, Du(x), D^2u(x)) = c \quad \text{in } \mathbb{T}^n.$$

はエルゴード問題 **(ergodic problem)** あるいは 加法的固有値問題 **(additive eigenvalue problem)** と呼ばれる．エルゴード問題 **(EP)** は関数 $u \in C(\mathbb{T}^n)$ と定数 c の組 (u, c) を探す問題である．ただし，この定数 c を与えたとき，u が偏微分方程式 **(EP)** の解になる様な組とする．

問題: $\lambda \to 0+$ とするときに，（列を取らずに ）関数族 $\{v^\lambda - m^\lambda\}_{\lambda>0}$ が全体で収束するか．

最近の結果: **1) A. Davini, A. Fathi, R. Iturriaga, M. Zavidovique:** 1 階の偏微分方程式であるハミルトン・ヤコビ方程式に対して $\mathbb{T}^n$ 上で (もっと一般に閉リーマン多様体上で) 肯定的な一般的な結果を示した．ハミルトニアンは凸で，強圧的な場合．$\lambda u + H(x, Du) = 0$

2) E. S. Al-Aidarous, E. O. Alzahrani, A. M. M. Younas, HI: ノイマン境界条件を持つ 1 階ハミルトン・ヤコビ方程式．ハミルトニアンは凸で，強圧的な場合．

3) H. Mitake, H. V. Tran: $\mathbb{T}^n$ 上の粘性 ハミルトン・ヤコビ方程式．$\lambda u - a(x)\Delta u + H(x, Du) = 0$．ハミルトニアンは滑らか，凸で，強圧的な場合．

4) D. Gomes, H. Mitake, H. V. Tran: $\mathbb{T}^n$ 上の 1 階のハミルトン・ヤコビ方程式．ハミルトニアンは準凸 (quasi-convex) で，強圧的な場合．

5) H. Mitake, K. Soga: 収束率まで求める．$\mathbb{T}^n$ 上の 1 階ハミルトン・ヤコビ方程式．

- Mather 測度 (Mather measures)．L. C. Evans 氏による随伴法

古典的結果

更なる仮定:

(DP) に対して比較原理 **(CP)** が成り立つ.

$$\text{(CP)}\quad \begin{cases} \text{すなわち, } \lambda > 0 \text{ であり, } v \in \mathrm{USC}(\mathbb{T}^n) \text{ と } w \in \mathrm{LSC}(\mathbb{T}^n) \\ \text{がそれぞれ (DP) の劣解と優解であるならば, } v \le w \text{ in } \mathbb{T}^n \\ \text{が成り立つ.} \end{cases}$$

命題 1

(F1), (F2) を仮定し，比較原理 (CP) を仮定する．$\lambda > 0$ とする．ディスカウント問題 (DP) は一意解 $v^\lambda \in C(\mathbb{T}^n)$ を持つ.

$$\text{(EC)}\quad \begin{cases} \text{任意の } \lambda > 0 \text{ に対して, (DP) の解 } v^\lambda \in C(\mathbb{T}^n) \text{ が存在し,} \\ \text{関数族 } \{v^\lambda\}_{\lambda>0} \text{ は } \mathbb{T}^n \text{ 上の同程度連続 (equi-continuous) な} \\ \text{関数族を成す.} \end{cases}$$

命題 2

(F1), (F2), 比較原理 (CP), 同程度連続性 (EC) を仮定する. **(i)** エルゴード問題 (EP) は解 $(u, c) \in C(\mathbb{T}^n) \times \mathbb{R}$ を持つ. 定数 c は一意に定まる. **(ii)** $\lambda > 0$ に対する (DP) の一意解を $v^\lambda \in C(\mathbb{T}^n)$ とするとき,

$$c = -\lim_{\lambda \to 0+} \lambda v^\lambda(x) \text{ in } C(\mathbb{T}^n)$$

が成り立つ. 更に, $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ が 0 に収束する列であれば, その部分列を, この部分列に沿って, $\{v^{\lambda_j} - \min_{\mathbb{T}^n} v^{\lambda_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ が一様収束する様に選べる. この極限関数を $u \in C(\mathbb{T}^n)$ と表すとき, (u, c) はエルゴード問題 (EP) の解である.

$(u, c) \in C(\mathbb{T}^n) \times \mathbb{R}$ が (EP) の解であるとき, 定数 c を**臨界値 (critical value)** あるいは 加法的固有値 **(additive eigenvalue)** と呼ぶ.

主定理

当面 $\mathcal{A}$ に強い仮定をおく.

(AC)　$\mathcal{A}$ はコンパクト距離空間.

x の関数 $F(x, Du(x), D^2u(x))$ を $F[u]$ と表す.

$\phi \in C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ に対して, F_ϕ をつぎで定義する.

$$F_\phi(x, p, X) = \sup\left(-\operatorname{tr} a(x,\alpha)X - b(x,\alpha)\cdot p - \phi(x,\alpha)\right).$$

本来のディスカウント問題よりも一般なディスカウント問題を考える.

(DP$_\phi$)
$$\lambda v(x) + F_\phi[v] = 0 \quad \text{in } \mathbb{T}^n.$$

(DP$_\phi$) に対する（局所）比較原理 **(CP′)** を仮定する.

(CP′) すなわち, $\lambda > 0$ とし, $\phi \in C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ とし, U を $\mathbb{T}^n$ の開集合とするとき, $v, w \in C(\overline{U})$ がそれぞれ $\lambda u + F_\phi[u] = 0$ in U の劣解と優解であり, $v \le w$ on ∂U が成り立つならば, $v \le w$ in U.

主定理

(F1), (F2), コンパクト性 **(AC)**, 比較原理 (CP′), 同程度連続性 (EC) を仮定する．c を臨界値とし，それぞれの $\lambda > 0$ に対して，$v^\lambda \in C(\mathbb{T}^n)$ を (DP) の一意解とする．このとき，関数族 $\{v^\lambda + \lambda^{-1}c\}_{\lambda>0}$ はある関数 u に，$\lambda \to 0$ とするときに，$C(\mathbb{T}^n)$ において収束する．さらに，組 (u, c) はエルゴード問題 (EP) の解である．

比較原理 **(CP′)** は比較原理 **(CP)** よりも強い条件である．

粘性 Mather 測度

2 階の退化楕円型方程式に適用できるような一般化された Mather 測度を導入する． つぎの論文が大きなヒントであった．

D. Gomes, Duality principle for fully nonlinear ... 2005.

$\phi \in C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ とつぎの方程式の劣解 $u \in C(\mathbb{T}^n)$ の組 (ϕ, u) に注目する．

$$(\mathrm{EP}_\phi) \qquad F_\phi[u] = 0 \quad \text{in } \mathbb{T}^n.$$

このような組 (ϕ, u) の全体を $\mathcal{F}_\pi(0)$ と表す．形式的には

$$\mathcal{L}u \le \phi \quad \text{in } \mathbb{T}^n \times \mathcal{A}$$

が成り立つことが，$(\phi, u) \in \mathcal{F}_\pi(0)$ が成り立つ必要十分条件である．

ここで，少し形式的に議論する．$(\phi_i, u_i) \in \mathcal{F}_\pi(0)$ **$(i=1,2)$** とし，$t_i > 0$ **(i=1,2)** とする．

$$t_i \mathcal{L} u_i = \mathcal{L}(t_i u_i) \leq t_i \phi_i,$$

となり，この 2 式を加えて，

$$\mathcal{L}(t_1 u_1 + t_2 u_2) \leq t_1 \phi_1 + t_1 \phi_2$$

従って，$t_1(\phi_1, u_1) + t_1(\phi_2, u_2) \in \mathcal{F}_\pi(0)$ が分かる．

この議論はつぎの補題により正当化される．

補題 1

(F1), (F2), 局所比較原理 (CP′) を仮定するとき，$\mathcal{F}_\pi(0)$ は $C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ の原点を頂点とする凸錘 **(convex cone)** である．

凸錘 $\mathcal{F}_\pi(0)$ の双対錘 (dual cone) $\mathcal{F}_\pi{}'(0)$ を考える.（Riesz の表現定理より）$C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ の双対空間はラドン測度の空間 $\mathcal{R}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ である. $\mu \in \mathcal{R}(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ と $\phi \in C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})$ に対して，つぎの様におく.

$$\langle \mu, \phi \rangle := \int_{\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}} \phi(x, \alpha)\mu(dx d\alpha) \quad (C^*(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \overset{\text{duality}}{\longleftrightarrow} C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A})).$$

双対錘 $\mathcal{F}_\pi{}'(0)$ をつぎで定義する. $\mu \in \mathcal{F}'_\pi(0)$ であるとは

$$\langle \mu, \phi \rangle \geq 0 \quad \text{for all } (\phi, u) \in \mathcal{F}_\pi(0).$$

さらに,

$$\mathcal{P}_\pi(0) := \{\mu \in \mathcal{F}_\pi{}'(0) : \mu \text{ は } \mathbb{T}^n \times \mathcal{A} \text{ 上の確率 (probability) 測度 }\}.$$

つぎの定理は一般化された **Mather** 測度の存在定理である.

定理 1

(F1), (F2), (AC), (CP′), (EC) を仮定する. c を臨界値とするとき,

(MM)
$$\min_{\mu\in\mathcal{P}_\pi(0)} \langle \mu, L\rangle = -c.$$

上の定理では, (EC) の代わりに, (EP) が解を持つことを仮定すれば十分である.

(MM) における最小化問題の最小点 $\mu \in \mathcal{P}_\pi(0)$ を **粘性 Mather 測度 (viscosity Mather measure)** と呼ぶ.

D. Gomes 氏は同様な結論 **($a(x) = a_0$** の場合**)** を与えている. 凸解析における双対性 **(convex duality)** を使う議論をしている. 上記の定理 **1** の証明には **Sion** のミニマックス定理 **(Sion's minimax theorem)** を用いた.

$\mathcal{P}_\pi(0)$ の重要な性質は $\mathcal{F}_\pi(0)$ の双対錘という性質である．そこでは粘性劣解という性質が重要な役割を持つ．双対錘の役割は，**Mather** 測度における「**closedness**」という主要な性質に対応するものである．**D. Gomes** 氏は, $\mathcal{F}_\pi(0)$ の代わりに, つぎのような組

$$(\mathcal{L}\psi, \psi) \in C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \times C^2(\mathbb{T}^n)$$

の全体 **(**$\mathcal{F}$ と表す**)** を考えている．$\phi := \mathcal{L}\psi$ とおくとき，(ϕ, ψ) は $\mathcal{F}_\pi(0)$ に属する**.** 実際**,**

$$F_\phi[\psi] = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \{\mathcal{L}\psi(x, \alpha) - \phi(x, \alpha)\} = 0.$$

$\mathcal{F}$ の線形性から，$\mathcal{F}$ の双対錘の条件は以下の様な（線形な）ものになる．

$$\langle \mu, \mathcal{L}\psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in C^2(\mathbb{T}^n).$$

これはハミルトン・ヤコビ方程式の **Mather** 測度の「**closedness**」の条件にほぼ対応している．

定理 **1** では，粘性劣解の性質を基に「**closedness**」の条件（$\mu \in \mathcal{F}_\pi{}'(0)$）を考えたので，得られた一般化された **Mather** 測度を粘性 **Mather** 測度 と呼ぶことにした．

ディスカウント問題 (DP) に対しても上の定理 $\mathbf{1}$ と同様な結果が得られる．この結果を説明する．$(z, \lambda) \in \mathbb{T}^n \times (0, \infty)$ を固定する．$\mathcal{F}_\pi(\lambda) \subset C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \times C(\mathbb{T}^n)$ をつぎで定義する．

$$\mathcal{F}_\pi(\lambda) = \{(\phi, u) \in C(\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}) \times C(\mathbb{T}^n) : u \text{ は } (\mathrm{DP}_\phi) \text{ の劣解}\}.$$

つぎに $\mathcal{P}_\pi(z, \lambda)$ を $\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}$ 上の確率測度 μ のうちでつぎの性質 (双対錘) を持つものの全体とする．

$$\langle \mu, \phi - \lambda u(z) \rangle \geq 0 \quad \text{for all} \quad (\phi, u) \in \mathcal{F}_\pi(\lambda).$$

定理 2

(F1), **(F2)**, **(AC)**, (CP′) を仮定する．$\lambda > 0$ とし，$v^\lambda \in C(\mathbb{T}^n)$ を (DP) の一意解とする．このとき，

$$\lambda v^\lambda(z) = \min_{\mu \in \mathcal{P}_\pi(z, \lambda)} \langle \mu, L \rangle.$$

これは (DP) の解の表現公式 (representation formula) の一つと見ることが出来る．

定理 1 と定理 2 は殆ど平行な議論で証明できる．また，定理 1 は定理 2 から容易に得られる．

定理 2 の公式における最小点 $\mu \in \mathcal{P}_\pi(z, \lambda)$ に対して，$\lambda^{-1}\mu$ を**粘性 Green 測度 (viscosity Green measure)** と呼ぶ．

定理 2 を用いると，主定理が主張する割引消去問題の収束は（**Davini-Fathi-Iturriaga-Zavidovique** の議論の最後の部分を援用して）比較的容易に証明できる．

Davini-Fathi-Iturriaga-Zavidovique の論文では，凸で強圧的なハミルトニアン $H(x, p)$ を考えて，$F = H$ の場合にここでの主定理と同じ収束の結果を証明している．ここでの主定理を応用して，この結果を容易に導くことが出来る．

Green ' s Mill is a restored and working 19th century tower windmill in Nottingham, UK. In the early 19th century it was owned and operated by the mathematical physicist George Green (1793-1841).

(http:www.nottinghamcity.gov.ukgreenswindmill)

注意

1. $\mathcal{A}$ がコンパクトではない場合．L に対して，つぎを仮定する．

(L) $$L = +\infty \quad \textbf{at infinity.}$$

原点を頂点に持つ凸錘

$$\Phi^+ = \{tL + \chi : t > 0,\ \chi \in C(\mathbb{T}^n)\}$$

を考えて，これまでの $\mathcal{F}_\pi(0)$ と $\mathcal{F}_\pi(\lambda)$ の定義において，組 (ϕ, u) を考える際に $\phi \in \Phi^+$ となるものだけを考える．$(\phi, u) \in \mathcal{F}_\pi(0)$ であれば，$\phi \in \Phi^+$ とし，u は (EP$_\phi$)($F_\phi[u] = 0$ in $\mathbb{T}^n$) の劣解とする．$\mathcal{P}_L$ により，Radon 確率測度 μ の内で L が $\mathbb{T}^n \times \mathcal{A}$ 上で μ に関して積分可能であるものの空間とする．

このように定義した $\mathcal{F}_\pi(0)$ と $\mathcal{F}_\pi(\lambda)$ を使って，前と同様に $\mathcal{P}_\pi(0)$ と $\mathcal{P}_\pi(z, \lambda)$ を定義する．すなわち，$\mu \in \mathcal{P}_L$ が $\mathcal{P}_\pi(0)$(同じく，$\mathcal{P}_\pi(z, \lambda)$) に属することをつぎで定義する．

$$\langle \mu, \phi \rangle \geq 0 \quad \text{for all } (\phi, u) \in \mathcal{F}_\pi(0)$$

$$\Big(\text{同じく}, \langle \mu, \phi - \lambda u(z) \rangle \geq 0 \quad \text{for all } (\phi, u) \in \mathcal{F}_\pi(\lambda)\Big).$$

(CP′′) $\left\{ \right.$ 局所比較原理が $\lambda u + F[u] = \eta$ **in** $\mathbb{T}^n$ に対して成立する. ただし, $\eta \in C(\mathbb{T}^n)$ は任意とする. すなわち, $\lambda > 0$ とし, U は任意の $\mathbb{T}^n$ の開集合とするとき, $v,\ w \in C(U)$ がそれぞれ $\lambda u + F(x, Du, D^2u) = \eta$ **in** U の劣解と優解であり, $v \le w$ **on** ∂U が成り立つならば, 不等式 $v \le w$ **in** U が成立する.

定理 3

(F1), **(F2)**, (L), (CP′′), (EC) を仮定する. c を臨界値とする. このとき,

$$\min_{\mu \in \mathcal{P}_\pi(0)} \langle \mu, L \rangle = -c.$$

$(z, \lambda) \in \mathbb{T}^n \times (0,\ \infty)$ とし, $v^\lambda \in C(\mathbb{T}^n)$ を (DP) の解であるとする. このとき

$$\lambda v^\lambda(z) = \min_{\mu \in \mathcal{P}_\pi(z,\lambda)} \langle \mu, L \rangle.$$

状態拘束条件，ディリクレ条件，ノイマン条件の場合については，対応した境界条件の下で **(DP)** と **(EP)** を考える時に，主定理と同様な結果が得られる．基本的な仮定は

局所的比較原理　　　　解の族 $\{v^\lambda\}$ の同程度連続性

の二つである．

F の例：

$F = H(x,p)$, H は強圧的で凸なハミルトニアン．

$F = F_0(x,X) + H(p)$, F_0 は Pucci 型の楕円型作用素，$H(p) = |p|^m$ $(m > 1)$.

今後の課題：

I. 割引消去問題関連

(1) 粘性 **Mather** 測度の性質．**support**

(2) 解の同程度連続性の評価.

(3) F が凸性を持たない場合．**(i)** 収束の問題, **(ii)** 粘性 **Green** 測度のようなものが考えられるか **(**確率微分ゲームの値関数の関数解析的な扱い**)**

II. その他

(1) 他の漸近問題への **Mather** 測度，その一般化の有用性

(2) 弱 **KAM** 理論の完全非線形楕円型方程式への整備：**(i)** 解の長時間挙動の研究，**(ii)** 粘性消去法の研究 **(iii)** 方程式の凸性の仮定の排除

(3) 粘性解と測度．連続関数の空間 C とラドン測度の空間との双対性. **Evans** の非線形随伴法，**Lasry-Lions** の平均場ゲーム