不完全性定理
形式化された数学の限界と可能性

故 角田譲先生に捧ぐ

2015年9月15日 京都産業大学
日本数学会2015年秋季総合分科会 企画特別講演

菊池 誠（神戸大）

1. はじめに

古典的な数学基礎論の誕生：19世紀

- Cauchy, Weierstrass による解析学の基礎づけ
- Frege による形式的論理の構築
- Dedekind の自然数論・実数論の構築
- Cantor による集合論の創造，連続体仮説への挑戦

古典的な数学基礎論の発展：1900年～1930年

- 様々な集合論の逆理の発見
- Hilbert 23の問題 (１：連続体仮説，２：無矛盾性証明)
- Zermelo, Fraenkel らによる ZFC 集合論の創始
- Browuer の直観主義数学の誕生
- Hilbert のプログラムの提唱と述語論理の誕生
- Gödel のによる完全性定理の証明

1. はじめに

古典的な数学基礎論の終焉：1930年

- Gödel による不完全性定理の証明
- Hilbert のプログラムの破綻

現代的な数学基礎論の誕生：1930年～現代

- Turing 機械の定式化 (1936)
- Gentzen による算術の無矛盾性の証明 (1938)
- Gödel による連続体仮説の無矛盾性の証明 (1940)
- Henkin による完全性定理の別証明 (1949)
- 竹内外史による基本予想の提唱 (1953)
- Cohen による連続体仮説の独立性の証明 (1963)

1. はじめに

Hilbert のプログラム (HP)

(目標) 具体的命題は「超越的に証明可能ならば，有限的に証明可能である」ことを示すこと．そのために：

(HP1) 証明の概念を形式化.

(HP2) 超越的手法を展開するための理論 (=公理系) を構築.

(HP3) その理論の無矛盾性を有限的に証明.

標準的解釈

- 述語論理の提示と完全性定理の証明で (HP1) が完了.
- ZFC 集合論の展開で (HP2) が完了.
- 第二不完全性定理：(ZFC が無矛盾なら) ZFC では ZFC の無矛盾性は証明できない． (HP3) は達成不可能.

1. はじめに

不完全性定理の二つの側面

- 哲学的：古典的な数学基礎論の到達点
- 数学的：現代的な数学基礎論の出発点

数学基礎論の転換点

- 1900年：集合論における逆理の発見
- 1930年：不完全性定理
- 1950年：構造概念の確立（Tarski, Robinson, Henkin）
- 1980年：数学基礎論の数学化の完了

不完全性定理とは？

- 「哲学から数学へ」という捉え方は一面的.
- 形式化された数学とは何なのか，何が可能なのか？

1. はじめに

今日の目標

論理における２つの変化

- 「決定可能性」から「正当化」へ
- 「数学の世界全体」の論理から「構造」の論理へ

３つの世界観

- Frege 流の世界観：世界全体が対象．論理の正当化は不要．
- Hilbert 流の世界観：世界全体が対象．論理の正当化が必要．
- 現代の世界観：構造が対象．論理は分析の道具．

３つの新たな可能性

2. 完全性定理と不完全性定理

構文論 (記号列)

- 形式的証明：「論理的公理」＋非論理的公理から出発し，「推論規則」を用いて得られる論理式の有限列.
- T：理論（非論理的公理の集合），P：論理式とする.

  定義：T $\vdash$ P ⇔ T から出発し P に至る形式的証明が存在.

意味論 (真理値/構造)

- T：理論，P：論理式，M：構造とする.

  定義：M $\models$ P ⇔ M の上で P が真である.

  定義：M $\models$ T (M は T のモデル) ⇔ Q∈T ならば M $\models$ Q.
- T：理論，P：論理式とする.

  定義：T $\models$ P ⇔ M を構造とすると，M $\models$ T ならば M $\models$ P.

2. 完全性定理と不完全性定理

完全性定理（Gödel, 1929）

- T：理論，P：論理式とする． $T \vdash P \Leftrightarrow T \models P$
- 述語論理の「構文論と意味論」を繋ぐ定理.
- 論理的公理と推論規則の選択を「正当化」.

Henkin の証明 (1949) の概略

- 完全性定理は次の主張と同値.

  Tを理論とする． Tが無矛盾 ⇔ Tはモデルを持つ.
- 難しいのは ⇒ 向き． 証明は三段階.
  1. 存在証明できる対象の記号 (Henkin 定数) と公理を付加.
  2. T を極大無矛盾な理論に拡大． (Zorn の補題を使う)
  3. 定数の集合を用いてモデルを構築.

2. 完全性定理と不完全性定理

完全性定理にまつわる疑問

1. Zorn の補題を使うことは循環論法なのでは？
2. 構造 (モデル) の概念は1929年にはない．完全性定理とは何であったのか？

Gödel の証明 (1929) の特徴

- 構造上ではなく，自然数の集合上で真偽を解釈.
- Henkin 定数のかわりに Skolem 関数を用いる.
  「あとは良く知られた方法でできる」
- Skolem の定理 (1923) に酷似.
- ただし，Skolem の問題意識は「決定可能性」であって「正当化」でない．「正当化」という問題を提示したのは Hilbert & Ackermann (1928).

2. 完全性定理と不完全性定理

命題論理の完全性定理

- Post (1921),　Bernays (1926) が証明.
- Post：T |= P は T |– P の「決定可能性」を与える.
- Bernays：T |= P は T |– P を「正当化」する.

二つの流れ

- 決定可能性：Post (命題論理), Skolem (述語論理)
- 正当化： Bernays (命題論理), Gödel (述語論理)

「決定可能性」から「正当化」へ (1920’s)

- 「決定可能性」が問題ならば循環論法ではない.
- Tarski の世界観：主役は T |– P ではなく T |= P.
- 「正当化」でも一般化しなければ Zorn の補題はいらない.

2. 完全性定理と不完全性定理

高階論理

- 1 階論理 (= 述語論理) ： 「対象」の量化が可能な論理.　∀x P(x)「すべての対象 x は P(x) を満たす」
- 2 階論理 ： 「対象と概念 (=論理式)」の量化が可能な論理. ∀P P(a)「a はすべての概念 P(x) を満たす」
- 高階論理 ： 「概念の概念の...」の量化が可能な論理.
- 事実 : 2 階以上の論理で完全性定理は不成立.

Henkin (1949) の証明の特徴

- 非可算な言語に拡張.
- ２階の量化子が量化する範囲を限定し，高階論理へ拡張. (実質的には１階の述語論理に還元)
- 高階論理とは対象を分類した１階論理.

2. 完全性定理と不完全性定理

Gödel (1940) の影響

- 「集合」を扱う ZF と「集合とクラス」を扱う BG.
- BG は「２種類の対象」がある１階論理の集合論.
- 世間では，BG は２階論理の集合論.
- 「高階 = 多種類の対象」

「数学の世界全体」から「構造」へ (1950's)

- Henkin 以前は「すべて」とは「数学の世界すべて」
- 現在は「すべて」は構造を特定して初めて意味を持つ.「構造」概念の誕生は，量化子の明確化.
- 数学基礎論が数学化．Cohen による連続体仮説と選択公理の ZF 集合論からの独立性の証明.
- 「数学の世界全体」を論じようとする論理主義の終焉.

2. 完全性定理と不完全性定理

不完全性定理 (Gödel, 1931)

T：算術を含み再帰的 (=計算可能) な理論.

- 第一不完全性定理：T がω無矛盾なら T は不完全.
- 第二不完全性定理：Con(T) を「T は無矛盾」を意味する論理式とすると，T が無矛盾なら T $\vdash$ Con(T) でない.

記号の説明

- Gödel 数：論理式や形式的証明を自然数でコード化.
- Pf(x, y)：y は Gödel 数が x の論理式の証明の Gödel 数.
- Pr(x) = ∃y Pf(x, y)：x は証明可能な論理式の Gödel 数.
- Con(T) = ¬ Pr([0=1])：T は無矛盾.

2. 完全性定理と不完全性定理

不完全性定理にまつわる疑問

- 原題は「決定不可能命題」決定不可能性？不完全性？
- オリジナルでは T = Principia Mathematica (PM) .
- 「算術が本質的」という意味で PA に関する定理であるが, PA < PM (ZF) なので PA が不完全なのは当たり前.
- なぜ PA を考える？

不完全性定理の意義

- 第二不完全性定理の意義は数学的 (= 技術的). 理論を分離. T+ P |– Con(T) ならば T < T+ P.
- 第一不完全性定理の意義は哲学的 (= 数学的). 「究極的な数学の理論には到達し得ない (ZFC)」「算術的な数学的帰納法では証明できない算術の命題が存在 (PA)」

2. 完全性定理と不完全性定理

二つの変化

- 「決定不可能性」から「不完全性」へ.
- 「数学の世界全体」に関わる定理から「算術」の定理へ.

三つの世界観

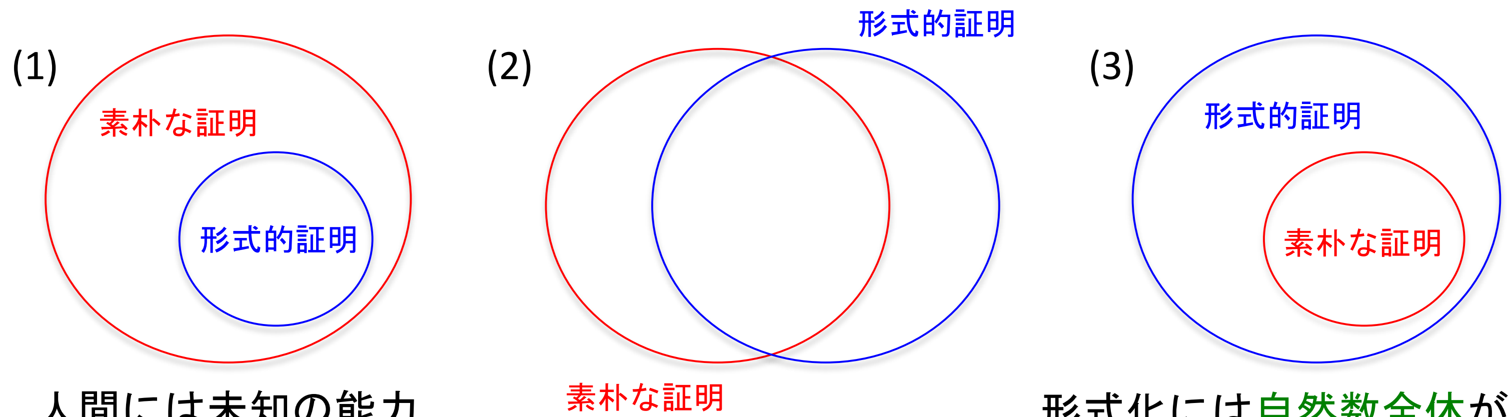
- Frege 流の世界観：世界全体が対象. 論理の正当化は不要.
- Hilbert 流の世界観：世界全体が対象. 論理の正当化が必要.
- 現代の世界観：構造が対象. 論理は分析の道具.

現代の世界観のもとでは

- 「形式的証明＝素朴な証明」とは限らない.
- 形式的証明とは何か？

3. 新たな可能性

三つの可能性



人間には未知の能力
ゲーデル，ゲンツェン，竹内

形式化には自然数全体が必要
形式化は概念拡張

無矛盾性を表す論理式

- Con(T) = ¬ Pr([0=1]) = ∀y ¬ Pf([0=1], y)
- ∀y が量化する範囲は自然数全体．実質的に形式的証明全体.
- (1) の場合には狭すぎる．（ただし十分）
- (3) の場合には広すぎる．

3. 新たな可能性

証明の形式化とは？

- 証明の形式化により「証明」ではなく「証明可能性」の議論が可能になった.
- ただし証明の形式化は，証明概念の拡張をもたらした.
- 「長すぎて書けない証明」は「証明」なのか？
- 1980’s以降，竹内外史らの限定算術，計算量理論へと発展.

Hilbert のプログラム (HP) の再検討

- S：有限の立場，T：数学全体を形式化する枠組み
- Con(T)：形式的無矛盾性，HP の目標：$S \vdash \mathrm{Con}(T)$
- Con’(T)：素朴な無矛盾性，Con’(T) < Con(T)
- $S \vdash \mathrm{Con}(T)$ ならば $S \vdash \mathrm{Con}'(T)$.
- $T \vdash \mathrm{Con}(T)$ でなくても，$S \vdash \mathrm{Con}'(T)$ の可能性.

3. 新たな可能性

Hilbert のプログラムを達成することは

- Con(T) の形式的証明を具体的に一つ与えること.
- S |– Con(T) から「T の無矛盾性」が導かれる.
- 「形式的証明=素朴な証明？」という問題とは無関係.

第二不完全性定理を理解するためには

- 第二不完全性定理：T が無矛盾なら T |– Con(T) でない.
- 「T では T の無矛盾性は証明できない」と読むためには「形式的証明＝素朴な証明」と考える必要がある.

前原昭二の問題：Con(T) は何を意味するのか？

- Hilbert のプログラムが達成できたときと，不完全性定理とでは「Con(T) の意味」は異なる.

3. 新たな可能性

竹内外史の「Growing Universe」

- 「集合論の逆理」は「本当の問題」ではない.
- 「集合全体の世界」は本当は Growing Universe である. 固定した世界だと考えるから矛盾が生じる.
- しかし，これまで Growing Universe を扱う数学はないし，Growing Universe なら量化子の意味は分からなくなる.
- 「構造」に基づく量化子解釈の限界が，今の論理の限界.

類似の考え方

- Dummett の「無際限拡張可能性」(1960’s)
- 「集合論的多元宇宙論」(2000’s)

3. 新たな可能性

Tが矛盾する世界を考える

- Tが矛盾することは，数学の破綻ではない．
- 数学の定理全てを証明するためにはTの有限部分集合があれば良い．その有限部分集合の無矛盾性で十分．

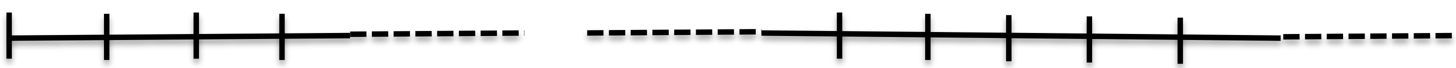
T + ¬Con(T) の超準モデル

- T = PA とする．
- 第二不完全性定理から T ⊢ Con(T) でない．
- このとき T + ¬Con(T) は無矛盾なので，完全性定理から，T + ¬Con(T) はモデルを持つ．
- T + ¬Con(T) のモデルは自然数全体 {0, 1, 2, ...} とは異なる．超準モデル．
- この超準モデルは「Tが矛盾する世界」．可証性述語を使うことで超準モデル上で証明可能性が議論できる．

3. 新たな可能性

T + ¬Con(T) の超準モデルの構造

0　1　2　3 . . .　　　　　　. . . a-2 a-1 a a+1 a+2 . . .



標準 (有限) 自然数　　　　超準 (無限大) 自然数

（この中に「0=1」の証明がある）

T + ¬Con(T) の超準モデルとは

- その超準モデル上の「T の証明可能性」は破綻している．およそ「常識と良識」のある人は考えるべきでない．
- しかし「その超準モデル自身」が破綻している訳ではない．
- その超準モデルの構造を調べることは「T が矛盾する」世界の構造を調べること．

3. 新たな可能性

定理（菊池・倉橋）

1. 超準モデルで定理が増えていれば，必ず偽な定理がある.
2. どのような超準的始切片をとっても，必ず定理が増えている PA + ¬Con(PA) の超準モデルがある.
3. どのような超準的始切片をとっても，定理が増えていないような PA + ¬Con(PA) の超準モデルがある.

定理（菊池・倉橋）

次の条件を満たす PA の可証性述語がある.

T を完全で無矛盾な理論とすると，

M 上の PA の定理の集合が T と一致するような，

PA + ¬Con(PA) の超準モデル M が存在する.

4. おわりに

有名な笑い話

スコットランドの草原に一頭の黒い羊がいた.

- 天文学者「スコットランドの羊はみな黒い.」
- 物理学者「スコットランドには黒い羊がいる.」
- 数学者「スコットランドには少なくとも一頭，少なくとも片面が黒く見える羊がいる.」

よくある笑えない話

不完全性定理とは？

- 文学者「理性の限界を明らかにした.」
- 哲学者「数学の無矛盾性は数学的には証明できない.」
- 数学者「算術を含み再帰的で無矛盾な公理系Ｔの無矛盾性は，Ｔでは証明できない.」

4. おわりに

なぜ笑えないのか？

- 「不完全性定理は『理性の限界』を示した」という「誤解」が愚かだからなのではない.
- 「不完全性定理は『理性の限界』を示した」と考えることを「愚かな誤解」とする数学者が，実は「不完全性定理は『理性の限界』を示した」と信じているからである.

素朴な明晰主義

- 仮説１：数学的＝理性的.
- 仮説２：数学的な議論は遍く ZFC で形式化できる.
- ２つの仮説から直ちに「不完全性定理は『理性の限界』を示した」という主張が得られる.
- 何が間違いなのか？

4. おわりに

参考文献

- 前原昭二, 数学基礎論入門 (復刊版), 朝倉書店, 2006.
- 前原昭二, 第二不完全性定理の内容的解釈, 科学基礎論研究, 20 (3), pp.15-19, 1991.
- 竹内外史, 集合とはなにか (新装版), 講談社, 2001.
- G. Takeuti, Proof Theory (2nd ed.), North-Holland, 1987. (Dover ed. 2013)
- J.D. Hamkins, The Set-Theoretic Multiverse, Review in Symbolic Logic, 5, 416-449, 2012.
- M. Kikuchi and T. Kurahashi, Illusory Models of Peano Arithmetic, Journal of Symbolic Logic, to appear.
- M. Kikuchi and T. Kurahashi, Universal Rosser Predicate, submitted.
- 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.