–企画特別講演–

Loewner の定理と応用- 行列順序, 多項式系, ガンマ関数, Korovkin の定理-

内山　充　(島根大学総合理工学部)

1. はじめに

Karl Löwner はプラハからアメリカに渡ったのち Charles Loewner と改名した. Loewner は実関数 $f(t)$ による「関数計算」によって定義される行列（作用素）関数 $f(X)$ の単調性を $f(t)$ の解析接続によって特徴づけた. この定理を嚆矢として発展した作用素不等式, 多項式の零点の majorization, 直交多項式, ガンマ関数, Korovkin 定理への応用を紹介することがこの講演の目的である.

2. 基本事項

2.1. Majorization

$\mathbf{x} = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbf{R}$ (or $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$) とする. このとき, $\{x_i\}$ を減少列に並べ替えたものを $x_1^{\downarrow} \geqq \cdots \geqq x_n^{\downarrow}$ と表す.

定義 2.1

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leqq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}\ (1 \leqq k \leqq n), \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}$$

であるとき, $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ は $\mathbf{x}$ の **majorization** であると言い $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ と表す. また, 前者 のみが成立しているとき, $\mathbf{y}$ は $\mathbf{x}$ の **weak majorization** (or **submajorization**) であると言って $\mathbf{x} \prec_w \mathbf{y}$ と書く.

この概念は, 実解のみを持つ多項式についても汎用されている. 下の命題の証明等の詳細は [26],[2] を参考にしていただきたい。

命題 2.1 次は同値である.
(i) $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$. (ii) $\mathbf{x} = D\mathbf{y}$ となる 2 重確率行列 D が存在する.
(iii) $\mathbf{R}$ 上の全ての凸関数 $\phi(t)$ について $\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)$ が成立する.

命題 2.2 $\mathbf{x} \prec_w \mathbf{y}$ であるための必要十分条件は $x_i \leqq u_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $\mathbf{u} \prec \mathbf{y}$ となる $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ が存在することである.

2.2. 行列順序

ここで述べることは, 複素ヒルベルト空間上の有界な自己共役作用素について成立することであるが, 簡単のため複素行列で説明する. 内積についての不等式 $(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqq 0$ が全ての $\mathbf{x}$ について成立するとき行列 A を**半正定値**であると言い $A \geqq 0$ と表す. 一般の行列 T について $T^*T \geqq 0$ である. 半正定値性は, 全ての主小行列式が非負である事によって特徴付けられる. $B - A \geqq 0$ のとき, $A \leqq B$ あるいは $B \geqq A$ と定める.
全ての固有値を区間 I に持つエルミート行列 A のスペクトル分解を $A = \sum \lambda_i P_i = U^* diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)U$ とするとき, I で定義された実数値連続関数 $f(t)$ について $f(A) :=$

$\sum f(\lambda_i)P_i = U^* diag(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n))U$. $(T^*T)^{1/2}$ を $|T|$ と表し T の絶対値と呼ぶ. 以下のことは基本的である.

(1) 三角不等式 $|T+S| \leqq |T| + |S|$ が成立するとは限らない.

(2) (Thompson) S, T に対して, 次のようなユニタリ U, V がある: $|T+S| \leqq U^*|T|U + V^*|S|V$.

(3) $0 \leqq A, B$ が可逆で $A \leqq B$ ならば $B^{-1} \leqq A^{-1}$.

(4) $A, B \geqq 0$ のとき, $A \leqq B \quad \begin{smallmatrix}\not\rightarrow \\ \leftarrow\end{smallmatrix} \quad A^2 \leqq B^2$.

(5) (M.U.) $A, B \geqq 0$ のとき, $AB = BA \iff 0 \leqq AB^n + B^nA \ (\forall n)$.

(6) $0 \leqq A$ が可逆であるとき, $AX + XA = C \geqq 0 \Rightarrow 0 \leqq X$.
実際, $X = \int_0^\infty e^{-tA}Ce^{-tA}dt$.

(7) (Jensen の不等式) f が凸関数, $\|\mathbf{x}\| = 1$ ならば $f((A\mathbf{x}, \mathbf{x})) \leqq (f(A)\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

(8) A が可逆, $\|\mathbf{x}\| = 1$ のとき, $1 \leqq (A^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

(9) (Kantrovich) $0 < a \leqq A \leqq b$, $\|\mathbf{x}\| = 1$ のとき, $(A^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leqq \frac{(a+b)^2}{4ab}$.
右辺の定数は Kantrovich constant と呼ばれている (詳細は 古田-瀬尾等 [10]).

注 2.1 (i). $T^*T - TT^* \geqq 0$ であるとき, T が行列であれば $tr(T^*T - TT^*) = 0$ より T は normal になるが, 無限次元では $T^*T - TT^* \geqq 0$ を満たす T は hyponormal と呼ばれ, 重要な研究対象である (長-古谷, 内山 (敦), 宮島-斎藤, 太田).
(ii). $\{(T\mathbf{x}, \mathbf{x}) : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ は T の数域と呼ばれ, 常に凸集合である. これが $\mathbf{R}$ の区間であることが T がエルミートであるための条件である. 数域については 中里の研究 がある. また, 数域についての写像定理は 加藤 (敏)[20] (cf. 内山 (充)[35]) を参考にしていただきたい.
(iii). (6) に関しては, Banach 環 上の線形写像 $X \mapsto AX - XB$ のスペクトルが Lumer-Rosenblum によって得られている.

2.3. 固有値

エルミート行列 A の固有値 $\lambda_i(A)$ を減少列にならべかえたものを $\lambda_i^\downarrow(A)$ と書く.

(i) $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)$.

(ii) $A, B \geqq 0$ のとき, $tr(AB) \geqq 0$.

(iii) $A \geqq B$ の時, $\lambda_i^\downarrow(A) \geqq \lambda_i^\downarrow(B) \quad (i = 1, \cdots, n)$.

(iv) $\sum_{i=1}^k \lambda_i^\downarrow(A+B) \leqq \sum_{i=1}^k \lambda_i^\downarrow(A) + \sum_{i=1}^k \lambda_i^\downarrow(B) \quad (1 \leqq k \leqq n)$.

(v) $diag(A) := (a_{11}, \cdots, a_{nn}) \prec (\lambda_1(A), \cdots, \lambda_n(A))$.

上記 (iv) と前小節 (2) より, 行列 T について, $\|T\|_{(k)} := \sum_{i=1}^k \lambda_i^\downarrow(|T|)$ はユニタリ不変ノルムである. これは Ky Fan ノルムと呼ばれ, Schatten ノルム $\|T\|_p := (\sum_{i=1}^n \lambda_i(|T|)^p)^{1/p}$ と共に重要である. 本講演では trace, norm について触れることはないが, Schatten[33], Simon[31] を参照していただきたい.

注 2.2 BMV-conjecture[4]: A はエルミート行列, $B \geqq 0$ のとき, $h(t) := tr[\exp(A - tB)]$ は completely monotone (i.e., $(-1)^m h^{(m)}(t) \geqq 0$ for $t > 0$, $m = 0, 1, \cdots$) であるか？Lieb-Seiringer[23] はこの予想を次の問題に帰着したが，未解決である．
$A \geqq 0, B \geqq 0$ のとき, 全ての n について $tr[(A + tB)^n]$ の係数は非負か？

3. Loewner の定理

3.1. 定義・準備

定義 3.1 I で定義された実数値連続関数 $f(t)$ と全ての固有値を区間 I に持つエルミート行列 A について $f(A)$ が定義できる．この行列関数が全てのサイズ（次数）の行列 A, B について

$$A \leqq B \Rightarrow f(A) \leqq f(B) \tag{3.1}$$

を満たしているとき, $f(t)$ は**作用素単調（増加）関数**であるといわれる．作用素単調関数全体を $\mathbf{P}(I)$ と表す．特に非負である作用素単調関数全体を $\mathbf{P}_+(I)$ と書く．

例 3.1 (i) $a + bt \in \mathbf{P}(-\infty, \infty)$, 但し $b \geqq 0$.

(ii) $a \notin I$ について $\frac{1}{a-t} \in \mathbf{P}(\mathbf{I})$.

(iii) (Loewner-Heinz) $0 < a \leqq 1$ について $t^a \in \mathbf{P}_+(0, \infty)$.

注 3.1 (3.1) が n 次行列について成立するとき, f は n-matrix monotone と呼ばれ $f \in \mathbf{P_n}(I)$ と表す．この関数族については Hansen-富山 [12], 大坂-Silvestrov-富山 [28] によって詳しく調べられている．

定義 3.2 I に固有値を持つ全てのエルミート行列 A, B について

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leqq \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B) \quad (0 < \lambda < 1) \tag{3.2}$$

が成立するとき, $f(t)$ は I で**作用素凸**であると言う．また, (3.2) で不等式が逆である時は**作用素凹**であるといわれる．

例 3.2 (i) $c \geqq 0$ のとき, $a + bt + ct^2$ は $(-\infty, \infty)$ で作用素凸である．
$(\because)$ $0 < \mu, \lambda < 1$, $\lambda + \mu = 1$ について
$(\lambda A^2 + \mu B^2) - (\lambda A + \mu B)^2 = \lambda\mu(A - B)^2 \geqq 0$.

(ii) $\frac{1}{t}$ は $(-\infty, 0)$ あるいは $(0, \infty)$ で作用素凸である．
$(\because)$ $\lambda A^{-1} + \mu B^{-1} - (\lambda A + \mu B)^{-1} = X\{(\lambda A)^{-1} + (\mu B)^{-1}\}^{-1}X \geqq 0$.
但し， $X = A^{-1} - B^{-1}$.

(iii) $1 \leqq a \leqq 2$ について t^a は $(0, \infty)$ で作用素凸である．

定義 3.3 複素平面の $\Pi_+ = \{z : \Im z > 0\}$ で定義された正則関数 $h(z)$ が $\Im h(z) \geqq 0$ をみたすとき，$h(z)$ は **Pick 関数** (あるいは **Nevanlinna 関数**) と呼ばれる (実定数も Pick 関数と認める).

定義 3.4 $K(t,s)$ を $I \times I$ で定義された対称な実数値連続関数とする. I の中にコンパクトサポートを持つ全ての連続関数 ϕ について

$$\iint_{I\times I} K(t,s)\phi(t)\phi(s)dt\, ds \geqq 0 \tag{3.3}$$

が成立するとき, 核関数 $K(t,s)$ は I (あるいは$I \times I$) で (半) **正定値**であるという. また, (3.3) が $\int_I \phi(t)dt = 0$ なる ϕ について成立しているとき, $K(t,s)$ は**条件付き (半) 正定値**と呼ばれる. 滑らかな関数 $f(t)$ について核関数

$$K_f(t,s) := \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \quad (t \neq s), \quad K_f(t,t) := f'(t)$$

を f の **Loewner 核**という.

3.2. The Loewner Theorem

定理 3.1 (Loewner[25]) 開区間 I で定義された滑らかな関数 $f(t)$ について次は同値である.

(i) $f(t)$ は I で作用素単調である.

(ii) f の Loewner 核 $K_f(t,s)$ が I で半正定値である.

(iii) $f(t)$ が Π_+ に解析接続を持ち，それが Pick 関数になる.

開単位円板を開右半平面に写す正則関数は Herglotz によって積分表示された．それを用いると，Pick 関数 $f(z)$ を次のように表す事ができる（Nevanlinna）

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{s-z} - \frac{s}{1+s^2})d\mu(s) \quad (\Im z > 0), \tag{3.4}$$

但し，α は実数, $\beta \geqq 0$，そして μ は実軸上の非減少関数で $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(s)}{1+s^2} < \infty$ を満たしている. ここで, μ を右連続であるように正規化すると唯一に定まる. $f(t)$ が I で作用素単調である場合には, Stieltjes inversion formula により, $\mu(I) = 0$ である. それ故 (3.4) が $\Pi_+ \cup \Pi_- \cup I$ で成立する.

定理 3.2 (Krauss, Bendat-Sherman) $g(t)$ が I で作用素凸関数であるための必要十分条件は全ての（実は一点でよい）$t_0 \in I$ について

$$g_0(t) := \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}$$

が作用素単調である.

注 3.2 Loewner の定理 (定理 3.1) の量子論での重要性が Wigner-Neumann によって指摘され, いくつもの別証明が考えられた. Korányi は対称作用素の自己共役拡大を用いて, Bendat-Sherman は moment problem を使い証明した. これらは　Donoghue[6] に纏められている. Hansen-Pedersen[13] は凸集合についての Krein-Milman の定理を使って証明した. Sparr も別証明を得ている. また, Rosenblum-Rovnyak は一般の集合での作用素単調関数について言及している.

定理 3.3 (Daleckii- Krein formula) I で定義された滑らかな実数値関数 $f(t)$ について $A=\sum\lambda_i P_i$ とした時,

$$Df(A)(B)=\frac{d}{dt}|_{t=0}f(A+tB)=\sum_{i,j}K_f(\lambda_i,\lambda_j)P_iBP_j$$

注 3.3 I で定義された行列値関数 $H(t)$ の微分は自然に扱うことができるが, その 関数計算 $f(H(t))$ は $H(t)$ のスペクトル分解を使うため, $f(H(t))$ の微分には $H(t)$ の固有値関数や固有ベクトル関数の微分可能性の問題が生じる. 摂動についてのこの問題は加藤(敏)[19] を見ていただきたい. スペクトル分解によらずに $f(H(t))$ を定義することも可能であるが, f が多項式の場合を除くとその解析は容易ではない.
定理の公式をより一般的にした Birman-Solomyak による作用素値 2 重積分がある. これについては幸崎 [21] による解説を参照していただきたい.

4. 半直線上の作用素単調関数

作用素単調性は局所的性質であり, 区間が $(0,\infty)$ の場合が応用としては重要である. この場合作用素単調関数は著しい特性を持つ.

4.1. 作用素凸 (凹)

定理 4.1 (Hansen-Pedersen[11],[13]) $f(t)$ が $[0,a)$ で定義された連続関数であるとき次の (i)〜(iv) は同値である.

(i) $f(t)$ が作用素凸で $f(0)\leqq 0$.

(ii) $T^*T\leqq 1,\ 0\leqq A<aI$ なる全ての T,A について　$f(T^*AT)\leqq T^*f(A)T$.

(iii) $T^*T+S^*S\leqq I,\ 0\leqq A,B<aI$ なる全ての T,S,A,B について

$$f(T^*AT+S^*BS)\leqq T^*f(A)T+S^*f(B)S.$$

(iv) 全ての直交射影 P について $f(PAP)\leqq Pf(A)P$.

また, $[0,\infty)$ で定義された $h(t)\geqq 0$ について,

$$h\in\mathbf{P}[0,\infty)\ \Leftrightarrow\ h(t) \text{ が作用素凹.}$$

命題 4.2 (Bhatia- Sano[3], M. U.[42], Hiai-Sano[16]) $f(t)$ が無限区間 (a,∞) で定義された滑らかな関数であるとき, $f(t)$ が作用素凹であるための必要十分条件はLoewner 核 $K_f(t,s)$ が I で条件付き半正定値で, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t}<\infty$ が成り立つことである.

命題 4.3 ([42])

(i) $f(t)\in\mathbf{P}(I)\ \Rightarrow\int f(t)dt$ は I で作用素凸.

(ii) $g(t)$ が $(0,\infty)$ で作用素凸ならば $g'(\sqrt{t})\in\mathbf{P}(0,\infty)$.

(iii) $h(t)$ が (a,∞) で 定義された連続関数であるとき,

$$h\in\mathbf{P}(a,\infty)\ \Leftrightarrow\ h(t) \text{ が作用素凹, } h(\infty)>-\infty.$$

4.2. 作用素平均

Pedersen-竹崎 [29] は，$A, B \geqq 0$ かつ A が可逆であるとき，作用素に関する 2 次方程式 $B = XAX$ の半正定値解 X は $A^{-1/2}(A^{1/2}BA^{1/2})^{1/2}A^{-1/2}$ である事を示した．また，Pusz-Woronowicz[30] は $\begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geqq 0$ を満たす最大の半正定値 X は $A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$ で与えられることを示した。この作用素は A と B の**幾何平均**と呼ばれている.

定義 4.1 (久保-安藤[22]) 下の(i)〜(iv) の性質を持つ半正定値作用素に関する2項演算 σ を**作用素平均**と呼び，更に(v)を満たすとき **対称** と言う.

(i) $A \leqq C,\ B \leqq D \ \Rightarrow\ A\sigma B \leqq C\sigma D,$

(ii) $C(A\sigma B)C \leqq (CAC)\sigma(CBC),$

(iii) $A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B$ (strongly) $\ \Rightarrow\ (A_n\sigma B_n) \downarrow (A\sigma B)$ (strongly)

(iv) $A\sigma A = A$

(v) $A\sigma B = B\sigma A.$

なお, (ii) でC が可逆ならば等号が成立することを注意しておく.

定理 4.4 (久保-安藤[22]) 作用素平均 σ 全体と $\{f:\ f(t) \in \mathbf{P}_+(0,\infty), f(1) = 1\}$ は次の関係式で1対1に対応している.

$$A\sigma B = A^{1/2}f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}, \quad f(t)I = I\sigma(tI).$$

なお，対称の場合には条件 $f(t) = tf(t^{-1})$ が加わる.

詳細は[22] あるいは日合-柳[17] を見ていただきたい.

日合-幸崎[15]は行列環上の「線形写像としての平均」を作用素値2重積分を用いて研究している. 例えば,

$$\tfrac{1}{2}(AX + XB),\ A^{1/2}XB^{1/2},\ \int_0^1 A^tXB^{1-t}dt.$$

多くの基本的な行列（作用素）がこの形で書かれるため応用的にも重要であることは言を俟たない.

4.3. 不等式

例3.1 で述べたLoewner-Heinz 不等式を拡張する画期的な不等式が古田によって得られた.

定理 4.5 (古田不等式[7])

$$0 \leqq A \leqq B \Rightarrow A^{1+r} = (A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \leqq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}\ (1 \leqq p,\ 0 < r). \tag{4.1}$$

両辺の指数に, 1 以下の正の数をかけても成立するが, 棚橋 [34] は指数 $\frac{1+r}{p+r}$ はこれ以上大きくはできないことを示した.

定理 4.6 (安藤, 藤井(正)-古田-亀井, 内山).

$$A \leqq B,\ 0 < p, r \Rightarrow e^{rA} \leqq (e^{\frac{rA}{2}} e^{pB} e^{\frac{rA}{2}})^{\frac{r}{r+p}}. \tag{4.2}$$

注 4.1 (4.2) は A, B が正定値とは限らないことに注意しよう. また, これらの不等式で A, B を交換すると逆向きの不等式が成立する. (4.1) は古田[8] によって, 次のように拡張された.

$$A^{1-t+r} \leqq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{ps-ts+r}} \quad (t \leqq r,\ 0 \leqq t \leqq 1 \leqq s, p)$$

これらの不等式については, 吉野, 中本, 泉野, 藤井(淳), 柳田, 山崎, 伊藤, 儀我の各氏によって研究された(文献名については古田[9] を見ていただきたい).

5. 関数の Majorization と主定理

5.1. 定義

Loewner-Heinz 不等式より, $0 \leqq A, B,\ A^m \leqq B^m \Rightarrow A \leqq B.$
これを一般化して次の問題を考えた.
$A, B \geqq 0,\ c_n > 0, c_i \geqq 0$ のとき, $\sum_{i=1}^n c_i A^i \geqq \sum_{i=1}^n c_i B^i \Longrightarrow A \geqq B$?
これについては 反例 $t + t^3$ があるが, もう少し系統的に調べる.

定義 5.1 $h(t)$ は I で非減少関数, $g(t)$ は I で増加とする.

$$g(A) \leqq g(B) \Longrightarrow h(A) \leqq h(B)$$

が成立するとき, g は h の **majorization** と言い, 次のように書く.

$$h \preceq g \quad \text{on } I.$$

次のことが成立する.

(i) $f(t) \preceq t$ on $I \Leftrightarrow f(t) \in P(I)$.

(ii) (Loewner-Heinz) 増加関数 $g(t) \geqq 0$ と $0 < \alpha \leqq \beta$ について, $g(t)^\alpha \preceq g(t)^\beta$ on I.

(iii) $g \preceq h$ on J, $h \preceq k$ on I, $I \subseteqq J \Rightarrow g \preceq k$ on I.

(iv) τ が増加, τ の値域$=g$ の定義域 であるとき, $h \preceq g \Leftrightarrow h \circ \tau \preceq g \circ \tau$.

(v) I 上の g の値域が $(0, \infty)$ で $h \geqq 0$ とする. $h \preceq g$ on I $\Rightarrow h^2 \preceq g^2$ on I.

注 5.1 上記(v)の値域条件は必要である. 例えば, $(t+1) \preceq t$, $(t+1)^2 \preceq t^2$ on $(0, \infty)$. $t \preceq (t+1)$ on $(0, \infty)$, but $t^2 \not\preceq (t+1)^2$ on $(0, \infty)$.

定義 5.2 $h(t)$ と $g(t)$ は I で定義された滑らかな関数で, $g(t)$ は増加とする. このとき連続で対称な核関数 $K_{h,g}$ を次のように定める。

$$K_{h,g}(t, s) := \frac{h(t) - h(s)}{g(t) - g(s)} \quad (s \neq t), \quad K_{h,g}(t, t) := \frac{h'(t)}{g'(t)}.$$

この記号によると Loewner 核 $K_f(t,s)$ は $K_{f,t}(t,s)$ と表されることに注意しておく. また, Loewner の定理から次のことが言える.

命題 5.1 $K_{h,\,g}(t,s)$ が正定値であることは, 次の各々と同値である.
(i) $h\circ g^{-1}\in \mathbf{P}(g(I))$, (ii) $h\preceq g$ on I.

例 5.1 $a\geqq 0$ のとき, $h:=t+a\preceq g(t):=(t+a)^2$ on $[0,\infty)$ であるから, $K_{h,\,g}(t,s)=\frac{1}{t+s+2a}$ は正定値核である. これから, Hilbert matrix $(\frac{1}{i+j-1})$ は正定値であることを見ることができる.

定義 5.3 $-\infty\leqq a<b\leqq\infty$ とする.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_+^{-1}(a,b) &:= \{h|h(t)\nearrow\ \mathit{on}\ (a,b), h^{-1}\in\mathbf{P}(0,\infty)\},\\
\mathbf{LP}_+(a,b) &:= \{g|g(t)>0\ \mathit{on}\ (a,b), \log g\in\mathbf{P}(a,b)\},\\
\mathbf{P}_+^{-1}[a,b) &:= \{h|h(a)=h(a+)=0, h|_{(a,b)}\in\mathbf{P}_+^{-1}(a,b)\}
\end{aligned}$$

$\mathbf{LP}_+[a,b)$ も同様に定義される.

例 5.2 (i) $\mathbf{P}_+(a,b)\subsetneqq\mathbf{LP}_+(a,b)$

(ii) $g\in\mathbf{P}_+^{-1}(a,b)\Leftrightarrow g^{-1}(t)\in\mathbf{P}(0,\infty)\Leftrightarrow t\preceq g$ on (a,b).

(iii) $t^\alpha\in\mathbf{P}_+^{-1}[0,\infty)$ for $\alpha\geqq 1$.

(iv) $t^\alpha\in\mathbf{LP}_+[0,\infty)$ for $\alpha>0$. $t^\alpha\in\mathbf{P}_+[0,\infty)$ for $0<\alpha\leqq 1$.

(v) $e^t\in\mathbf{P}_+^{-1}(-\infty,\infty)\cap\mathbf{LP}_+(-\infty,\infty)$

(vi) $g(t)\in\mathbf{P}_+^{-1}[0,\infty)$ は Orlicz 関数である. ($\because$ 増加で凸, $g(0)=0,\ g(\infty)=\infty$).

(vii) (安藤) $f(t)\in\mathbf{P}_+[0,\infty)$ ならば $tf(t)\in\mathbf{P}_+^{-1}[0,\infty)$.

5.2. 主定理

定理 5.2 (Product theorem) ([39, 40, 41], 荷見-内山 [38]) I を (a,b) あるいは $[a,b)$ とするとき次が成立する.

$$\mathbf{LP}_+(I)\cdot\mathbf{P}_+^{-1}(I)\subset\mathbf{P}_+^{-1}(I),\qquad \mathbf{P}_+^{-1}(I)\cdot\mathbf{P}_+^{-1}(I)\subset\mathbf{P}_+^{-1}(I).$$

また, $h_i(t)\in\mathbf{P}_+^{-1}(I)$ $(1\leqq i\leqq m)$, $g_j(t)\in\mathbf{LP}_+(I)$ $(1\leqq j\leqq n)$ の時, 全ての $\psi_i,\phi_j\in\mathbf{P}_+(0,\infty)$ に対して

$$\prod_i\psi_i(h_i)\prod_j\phi_j(g_j)\preceq\prod_i h_i\prod_j g_j\in\mathbf{P}_+^{-1}(I)$$

が成立する.

注 5.2 (i) 注意 5.1(v) で述べたように $\psi_i,\phi_j\in\mathbf{P}_+(0,\infty)$ は欠くことができない.
(ii) この定理は前の例 5.2(vii) を含んでいる.
(iii) $t^ae^{bt}\prod_{i=1}^\infty(1+c_it)\in\mathbf{P}_+^{-1}(0,\infty)$, 但し $a\geqq 1,\ b>0,\ c_i>0,\ \sum c_i<\infty$.
(iv) (Bourin-Uchiyama) 任意の $a>0$ について,
$h_r(t):=\frac{1}{2}\{\sqrt{(t-a)^2+r}+t-\sqrt{a^2+r}\}\in\mathbf{P}_+^{-1}(0,\infty)$, $\lim_{r\to+0}h_r(t)=(t-a)_+$.

6. 応用

6.1. 不等式の一般化

定理 6.1 $h(t) \in \mathbf{P}_+^{-1}(I)$, $g(t) \in \mathbf{LP}_+(I)$, $0 \leqq \tilde{h} \preceq h \quad on\ I$ とする．このとき，

$$\varphi(g(t)h(t)) := g(t)\tilde{h}(t) \quad (t \in I)$$

で φ を定めると、$\varphi \in \mathbf{P}_+[0,\infty)$. そして, $\sigma(A), \sigma(B) \subset I$ なる A, B について

$$A \leqq B \Rightarrow \varphi(g(A)^{\frac{1}{2}}h(B)g(A)^{\frac{1}{2}}) \geqq g(A)^{\frac{1}{2}}\tilde{h}(B)g(A)^{\frac{1}{2}}.$$

さらに, $\tilde{h} \in \mathbf{P}_+(I)$ ならば,

$$A \leqq B \Rightarrow \varphi(g(A)^{\frac{1}{2}}h(B)g(A)^{\frac{1}{2}}) \geqq \varphi(g(A)^{\frac{1}{2}}\tilde{h}(A)g(A)^{\frac{1}{2}}) = g(A)\tilde{h}(A) \tag{6.1}$$

例 6.1 (i). $p \geqq 1$, $r > 0$ に対して, $h(t) := t^p \in \mathbf{P}_+^{-1}[0,\infty)$, $g(t) := t^r$, $\tilde{h}(t) := t$. このとき, $0 \leqq \tilde{h} \preceq h$. また, $\varphi(h(t)g(t)) := \tilde{h}(t)g(t)$ によって定まる $\varphi(t)$ は $t^{\frac{1+r}{p+r}}$ である．よって, (6.1) は古田不等式(4.1)になる．
(ii). 次に, $I = (-\infty,\infty)$, $p \geqq 1, r > 0$ としたとき, $e^{pt} \in \mathbf{P}_+^{-1}(-\infty,\infty)$, $e^{rt} \in \mathbf{LP}_+(-\infty,\infty)$, $1 \preceq e^{pt}$ である．このとき, $\varphi(e^{pt}e^{rt}) := e^{rt}$ で定まる $[0,\infty)$ 上の $\varphi(t)$ は $t^{r/(p+r)}$ であるので(6.1) は(4.2) となる．

6.2. 多項式

定理 6.2 [37, 39, 40] $\{a_i\}_{i=1}^n$ と $\{b_i\}_{i=1}^m$ は共に非増加とする．

$$u(t) := \textstyle\prod_{i=1}^n (t-a_i) \quad v(t) := \prod_{i=1}^m (t-b_i).$$

このとき, $u(t) \in \mathbf{P}_+^{-1}(a_1,\infty)$. また,

$$m \leqq n, \quad \textstyle\sum_{i=1}^k b_i \leqq \sum_{i=1}^k a_i\ (1 \leqq k \leqq m) \Rightarrow v \preceq u \text{ on } (a_1,\infty),$$
$$\text{従って、} m = n,\ v(t) \prec_w u(t) \Rightarrow v \preceq u \text{ on } (a_1,\infty).$$

$v(t)$ が虚数解を持つ実多項式の場合も同様の結果を得る．

系 6.3 [40] $w(t) := \prod_{j=1}^m (t-\beta_j)$, $\Re\beta_1 \geqq \Re\beta_2 \geqq \cdots \geqq \Re\beta_m$ とするとき,

$$m \leqq n\ \textstyle\sum_{j=1}^k \Re\beta_j \leqq \sum_{j=1}^k a_j\ (1 \leqq k \leqq m) \implies w \preceq u \text{ on } (a_1,\infty).$$

6.3. 直交多項式

$\{p_n(t)\}_{n=0}^\infty$ を最高次の係数が正の正規直交多項式系とする．全ての根は実数の単純根であり, $p_{n-1}(t)$ の根は それと交叉している．直交多項式については膨大な文献があり, 私はほんの一部しか知らないので, $p_{n+1}(t)/p_n(t)$ に関連したものとして Nevai[27], simon[32] のみを参考に挙げておく．

定理 6.4 $p_n(t)$ の零点を $a_1 > \cdots > a_n$ とする．各 i について,

$$\tfrac{p_{n+1}(t)}{p_n(t)} \in \mathbf{P}(a_i, a_{i+1}), \quad p_n(t) \in \mathbf{P}_+^{-1}(a_1,\infty), \quad p_{n-1}(t) \preceq p_n(t)\ on\ (a_1,\infty).$$

6.4. Gamma 関数

$\Gamma(x)$ は実軸上の gamma 関数を表わす．$\Gamma'(x)$ の最大の零点を α とおくと，$\alpha = 1.4616\cdots$ である．$\Gamma(x)|_{(\alpha,\infty)}$ の逆関数を $\Gamma(x)$ の主逆関数と呼び$\Gamma^{-1}(x)$ と書く．

定理 6.5 ([43]) 核関数 $\frac{t-s}{\Gamma(t)-\Gamma(s)}$ は (α,∞) で半正定値である．よって，$\Gamma^{-1}(x) \in \mathbf{P}(\alpha,\infty)$ であり，$\Gamma^{-1}(x)$ はPick 関数となる解析接続$\Gamma^{-1}(z)$ を持つ．更にそれは単葉である．

6.5. Korovkin の定理

定理 6.6 (Korovkin) $C_r[a,b]$ の正値線型写像の列 $\{\Phi_n\}$ が

$$\Phi_n x^j \to x^j \ (n\to\infty)\ (j=0,1,2) \text{ ならば } \Phi_n u \to u \ (n\to\infty)\ (\forall u \in C_r[a,b]).$$

更に Korovkin は上の定理は $\{1,x,x^2\}$ の代わりに Tschebyshev system でも成立する事を示した．このような集合は Korovkin 集合と呼ばれる．この分野については, 西白保, 高橋 (眞), 泉池, 高木 (啓) の貢献があるが, 詳細はAltomare-Campiti[1] を参照していただきたい．次の結果は C^*-環 で成立するのであるが, 可換の場合について説明する．X を compact Hausdorff space, $C(X)$ を複素連続関数全体の C^*-環, $C(X)$ 上の Schwarz linear map の列を $\Phi_n(x)$ とする（すなわち, $0 \leqq \Phi_n,\ \Phi_n(1) \leqq 1$).

定理 6.7 ([36], cf.[24]) $g(t) \in \mathbf{P}_+^{-1}(0,\infty)$, $S=\{u_1,\ldots,u_m\} \subseteq C(X)$ が X の点を分離するとき, $S \cup \{g(|u_1|^2+\cdots+|u_m|^2)\}$ は Korovkin 集合である．

参考文献

[1] F. Altomare, M. Campiti, Korovkin-type Approximation Theory and its Applications, de Gruyter Studies in Mathematics 17, 1994, Walter de Gruyter.

[2] R. Bhatia, Matrix Analysis, Springer, 1996.

[3] R. Bahtia and T. Sano, Loewner matrices and operator convexity, Math. Ann., 344(2009)703–716.

[4] D. Bessis, P. Moussa, M. Villani, Monotonic converging variational approximations to the functional integrals in quantum statistical mechanics, J. Math. Phy. 16(1975) 2318–2325.

[5] J. Borcea, P. Branden, Hyperbolicity preservers and majorization, C. R. Acd. Sci. Paris, Ser.I, 348(2010)843–846.

[6] W. Donoghue, Monotone matrix functions and analytic continuation, Springer, 1974.

[7] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^rA^pB^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r\geq 0, p\geq 0, q\geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 85–88.

[8] T. Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, Linear Algebra Appl., **219** (1995), 139–155.

[9] T. Furuta, 線形作用素への誘い， 培風館, 2001.

[10] T. Furuta, J. Mićić, J.E. Pečarić and Y. Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities 1, Element, Zagreb, 2005.

[11] F. Hansen, An operator inequality, Math. Ann. 246(1980), 249–250.

[12] F.Hansen, J. Guoxing, J. Tomiyama, Gaps between classes of matrix monotone functions. Bull. London Math. Soc. 36 (2004), no. 1, 53–58.

[13] F. Hansen, G. K. Pedersen, Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem, Math. Ann., **258** (1982), 229–241.

[14] E. Heinz, Beiträge zur störungstheorie der spektralzerlegung, Math. Ann., **123** (1951), 415–438.

[15] F. Hiai, H. Kosaki, Means for matrices and comparison of their norms, Indiana Univ. Math. J., **48** (1999), 899–936.

[16] F. Hiai, T. Sano, Loewner matrices of matrix convex and monotone funcitons, J. M. S. Japan to appear.

[17] F. Hiai, K. Yanagi, ヒルベルト空間と線形作用素，牧野書店, 1995.

[18] R. A. Horn, C. R. Johnson, Topics in matrix analysis, Cambridge Univ. Press, 1991.

[19] T.Kato, Perturbation Theory for linear operators, Springer, 1980.

[20] T. Kato, Some mapping theorems for the numerical range, Proc. Japan Academy, 41(1965) 652–655.

[21] H. Kosaki, 作用素平均について，「数学」論説　58(2006)165–182.

[22] F. Kubo, T. Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann., **246** (1980), 205–224.

[23] E. H. Lieb, R. Seiringer, Equivalent forms of the Bessis-Moussa-Villani conjecture, J. Stat. Phys. 115(2004)185–190.

[24] B. V. Limaye, N. N. Namboodiri, Weak approximation by positive maps on C^*-algebras. Math. Slovaca 36, 91 - 99 (1986).

[25] K. Löwner, Über monotone matrixfunktionen, Math. Z., **38** (1934), 177–216.

[26] A. W. Marshall, I. Olkin, Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Academic Press 1979.

[27] P. Nevai, Orthogonal Polynomials, Memoirs of the American Math. Society, Vol. 18, No.213,1979.

[28] H. Osaka, S. Silvestrov, J. Tomiyama, Monotone operator functions, gaps and power moment problem. Math. Scand. 100 (2007), no. 1, 161–183

[29] G. K. Pedersen, M. Takesaki, The operator equation $THT = K$, Proc. Amer. Math. Soc., **36** (1972), 311–312.

[30] W. Pusz, S. L. Woronowicz, Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map, Rep. Math. Phys., **8** (1975), 159–170.

[31] B. Simon, Trace ideals and Their Applications, 2nd edition, Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys and Monographs 120, 2005.

[32] B. Simon, Ratio asymptotics and weak asymptotic measures for orthogonal polynomials on the real line, J. of Approximation Th. 126(2004)198–217.

[33] R. Schatten, Norm ideals of completely continuous operators, Springer, 1960.

[34] K. Tanahashi, Best possibility of the Furuta inequality, Proc. A. M. S., **124** (1996), 141–146.

[35] M. Uchiyama, Numerical ranges of elements of involutive Banach algebras and commutativity. Arch. Math. (Basel) 69 (1997), no. 4, 313-318.

[36] M. Uchiyama, Korovkin-type theorems for Schwarz maps and operator monotone functions in C^*-algebras, Math. Z. 230(1999)785–797.

[37] M. Uchiyama, Operator monotone functions which are defined implicitly and operator inequalities, J. Funct. Anal., **175** (2000), 330–347.

[38] M. Uchiyama, M. Hasumi, On some operator monotone functions, Integral Equations Operator Theory, **42** (2002), 243–251.

[39] M. Uchiyama, Inverse functions of polynomials and orthogonal polynomials as operator monotone functions, Trans. Amer. Math. Soc. **355**(2003) 4111–4123

[40] M. Uchiyama, A new majorization between functions, polynomials, and operator inequalities, J. Funct. Anal. 231 (2006) no. 1, 221–244.

[41] M. Uchiyama, A new majorization between functions, polynomials, and operator inequalities II, J. Math. Soc. Japan 60(2008) no. 1, 291–310

[42] M. Uchiyama, Operator monotone functions, positive definite kernels and majorization, Proc.A.M.S. 138(2010)3985–3996.

[43] M. Uchiyama, The principal inverse of the gamma function, Proc.A.M.S. to appear.