数理ファイナンスと実務への応用
Volatility Smileモデル

筬島　靖文　(BNPパリバ証券　クオンツリサーチ部)*

1. 金融市場の発展と数理ファイナンス

数理ファイナンスは確率論の一分野として発展してきたと同時に，金融ビジネスと結びつき，金融市場の高度化とともに大きく発展してきた．数理モデルを実務に応用するためには，金融市場の特性を捕らえていること，また安定的にリスクマネージメントができることが重要である．そのためには，確率論に限らず，線形代数，微分幾何学，数値解析，偏微分方程式，物理学等々，様々な分野が総動員される．ここでは，デリバティブの価格付け理論を下に，金融市場とモデルの関係を見ていこう．

2. Black-Scholes モデル

1973年にBlack-Scholesの論文 [1] が発表されて以来，金融市場においては，Black-Scholesの公式 [1] はヨーロピアンオプションを価格付けするために広く使われてきた．Black-Scholes モデルは, 金融資産（例えば株）をSで表し, その時点tにおける価格$S(t)$が以下の確率微分方程式に従うとする．

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} &= r(t)dt + \sigma_B dW(t), \\ S(0) &= S_0. \end{aligned}$$

ここで, $r(t)$は短期金利を表し, σ_Bはボラティリティと呼ばれる量で，株価の動きの変動性を表し，$W(t)$はブラウン運動を表す．このとき，満期T, ストライクKのコールオプション価格$C_{BS}(T,K)$は，リスク中立測度の下での期待値として，

$$\begin{aligned} C_{BS}(T,K) &= E^Q[e^{-\int_0^T r(s)ds}(S(T)-K)^+] \\ &= e^{-\int_0^T r(s)ds} BS(F,K,\sigma,T) \end{aligned}$$

としてBlack-Scholes式を用いて計算される．ただし，

$$BS(F,K,\sigma,T) = F\Phi(d_+) - K\Phi(d_-), d_\pm = \frac{\log(F/K) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, F = S_0 e^{\int_0^T r(s)ds}$$

とし，Φは標準正規分布関数を表す．金融市場において多くのヨーロピアンオプションの価格は，逆にブラックショールズボラティリティ σ_B を用いてクォートされる．実際の価格を求めるためには，ブラックショールズ式を用いる．

キーワード：Volatility Smile, Local Volatility, Stochastic volatility, SABR, Malliavin calculus
*100-6740 東京都千代田区丸の内1-9-1 グラントーキョーノースタワー
e-mail: `yasufumi.osajima@japan.bnpparibas.com`

3. Implied Volatility と Volatility Smile

Implied Volatility とは，ヨーロピアンコールオプションの価格 $C(T,K)$ を与えたときに，

$$C_{BS}(T,K,\sigma_{BS}(K)) = C(T,K)$$

を満たす σ_{BS} のことを指す．仮にマーケットが，Black-Scholes model

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t)dt + \sigma(t)dW(t), \quad (\sigma(t)\text{ は確定的})$$

に従うとすると，

$$\sigma_{BS}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(s)ds$$

となるので，ストライクによらず implied volatility は一定値となる．しかし，実際の金融市場（通貨オプション，金利スワップション，株価オプション，コモディティ等）においては，通常，implied volatility はストライクに依存した関数となる．ストライクに関して単調減少の場合，Volatility Skew，アットザマネーが最も低く，インザマネー，アウトオブザマネーに行くに従って高くなる場合に Volatility Smile と呼ばれる．より複雑なエキゾチックオプションを評価し，リスクを適切にヘッジするためには，Volatility Smile に正確にキャリブレートできるモデルを作ることが必要である．

4. Local Volatility Model

Volatility Smile にキャリブレートできる最も有名なモデルが Bruno Dupire による Local Volatility Model [2] である．ここでは，そのヨーロピアンオプションに対するキャリブレーション方法について説明しよう．Local Volatility Model は，以下の確率微分方程式を満たす．

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t)dt + \sigma_{LV}(t,S_t)dW_t.$$

ここで，r は確定的な短期金利を表し，σ_{LV} は確定的な関数として，通常ローカルボラティリティ関数と呼ばれる．このとき，Dupire [2] は以下を示した．

Theorem 1 (Dupire). 満期 T のすべてのストライク K に対してコールオプションの価格 $C(S_0,K,T)$ が与えられているとしたときローカルボラティリティ関数 $\sigma(T,K)$ は以下で与えられる．

$$\sigma_{LV}^2(T,K) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + r(T)K\frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

Proof. オプション満期 T に対して現在価値を S_0 とし，$S(T)$ の density の存在を仮定するとオプション価格は

$$C(S_0, K, T) = e^{-\int_0^T r(s)ds} \int_K^\infty dS_T \phi(S_T, T; S_0)(S_T - K)$$

と表せる．K で2回微分することにより

$$\phi(K, T; S) = e^{-\int_0^T r(s)ds} \frac{\partial^2}{\partial K^2} C(S, K, T)$$

が得られる．ここで，　ϕ は (K, T) の関数として Forward Kolmogorov 方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} - \frac{\partial^2}{\partial K^2}\Big(\frac{\sigma^2(T, K)}{2} K^2 \phi\Big) + r(T)\frac{\partial}{\partial K}(K\phi) + r(T)K = 0$$

を満たすので，コールオプション価格を T で微分した方程式に代入することにより

$$\frac{\partial C}{\partial T} - \frac{\sigma^2(T, K)}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + r(T)K\frac{\partial C}{\partial K} = 0$$

が得られる． □

　このモデルの自然な拡張としては，次に述べる Local Volatility Model に確率ボラティリティを組み合わせたモデルや，金利を確定的とせず，確率モデルを仮定した場合等が考えられる．

5. SLV モデル

Local Volatility Model は，実務的にも非常にいいモデルで一般的に使われているが，volatility smile の dynamics が実際のマーケットに合っていない場合もあり，さらに確率ボラティリティモデルと組み合わせた SLV モデル [9] (Stochastic Local Volatility Model) もしばしば用いられる．

$$\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_t} &= r_t dt + \sigma(t, S_t) Z_t dW_1(t), \\
d(\log Z_t) &= \lambda(\theta(t) - \log Z_t)dt + \nu dW_2(t), \\
Z(0) &= 1.
\end{aligned}$$

ただし，$W_1(t)$, $W_2(t)$ は独立な Brown 運動とし，$Z(t)$ は volatility process, $\sigma(t, x)$ は local volatility 関数である．λ はボラティリティの平均回帰係数，$\theta(t)$ は deterministic な関数である．このとき，コールオプションの現在価値

$$C(T, K) = E^Q[e^{-\int_0^T r_s ds}(S_T - K)^+]$$

は, $\Psi(T, K) = E^Q[Z(T)^2 | S_T = K]$ として，次の微分方程式を満たす．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T} C(T, K) &= -K r_T \frac{\partial}{\partial K} C(T, K) \\
&\quad + \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) \Phi(T, K) \frac{\partial^2}{\partial K^2} C(T, K).
\end{aligned}$$

Dupireのlocal volatility $\sigma_{LV}(T,K)$と比較すると，

$$\sigma^2(T,K) = \frac{\sigma_{LV}^2(T,K)}{\Psi(T,K)}$$

と満たすことがわかる．σ_{LV}は前述の通り, コールオプション価格から偏微分により求めることができた．では，$\Psi(T,K)$はどのようにして求められるか.

$$X_t = \log S_t, \quad Y_t = \log Z_t$$

とし，その密度関数$p(x,y,T)$を用いると

$$\Psi(T,K) = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{2y} p(\log K, y, T) dy}{\int_{\mathbb{R}} p(\log K, y, T) dy}$$

と書け，さらに，$p(x,y,T)$が次のKolmogorovのforward equation

$$\begin{aligned} &\partial_t p + \partial_x \left[\left(r - \frac{e^{2y}\sigma^2(t,e^x)}{2} \right) p \right] - \partial_{xx} \left[\left(\frac{e^{2y}\sigma^2(t,e^x)}{2} \right) p \right] \\ &+ \partial_y \left[\lambda(\theta(t) - y) p \right] - \partial_{yy} [\frac{\nu^2}{2} p] = 0 \end{aligned}$$

を満たしていることを用いて，差分方程式による数値計算，例えばADI法（Alternative direction implicit method)などにより解くことができる．このモデルの拡張としては，ここでは，原資産と確率ボラティリティが独立と仮定したが，相関がある場合や，ローカルボラティリティモデルの場合と同様に，金利モデルを仮定した場合等への拡張が考えられる．

6. Hestonモデル

SLV model やLV modelは，実務的によく使われるモデルであるが，すべてのK, Tについてコールオプション価格$C(T,K)$が与えられていることを仮定しているnon-parametricなモデルなので，逆にそれらがあまり市場で観測されない場合，むしろ，parametricなモデルの方が望ましい場合もある．次のモデルは，確率ボラティリティモデルのひとつでHestonモデル[5]と呼ばれる．

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} &= r(t)dt + \sqrt{V(t)} dW_1(t), \\ dV(t) &= \lambda(\theta - V(t))dt + \nu\sqrt{V(t)} dW_2(t). \end{aligned}$$

ここで，$(W_1(t), W_2(t)$は相関のある Brown 運動で，$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$ とする．$\lambda > 0$は平均回帰係数，$\sqrt{\theta}$はlong vol, すなわち，$\sqrt{V(t)} \to \sqrt{\theta}$, $(t \to \infty)$, $\sqrt{V(0)}$はshort volと呼ばれる．　これらのパラメーターを調節することにより，volatility smileの期間構造に合わせることができる．実は，Hestonモデルに対しては，コールオプション価格のフーリエ変換を用いた解析解が存在する．

7. SABR モデル

パラメトリックな確率ボラティリティモデルの例として次に，'SABR' (stochastic-$\alpha\beta\rho$) モデルを考えよう．

$$\begin{aligned} dX(t) &= \alpha(t)X(t)^{\beta}dW_1(t), \\ d\alpha(t) &= \nu\alpha(t)dW_2(t), \\ dW_1(t)dW_2(t) &= \rho dt. \end{aligned}$$

このモデルは implied volatility に対してかなり正確な（かつ簡単に実装できる）漸近展開公式が知られ，かつマーケットにもよくフィットすることから，多くの金融機関で使われている．このモデルは Hagan-Kumar-Lesniewski-Woodward [3] により最初に導入され．特異摂動理論を用いた漸近展開公式が [3] に述べられている． 特殊な場合には，漸近式でなく解析解を導くこともできるが一般には知られていない．

ここでは，まず，implied normal volatility の定義から行おう．原資産がガウス過程に従うモデルを考えた場合

$$d\tilde{X}(t) = \sigma_N dW(t),\ X(0) = x_0,$$

コールオプションの価格は以下で得られる．

$$C_N(T, K, \sigma_N) = E[(X(T) - K)^+] = \sigma_N\sqrt{T}G\Big(\frac{K - x_0}{\sigma_N\sqrt{T}}\Big).$$

ただし，$G(x) = \int_x^{\infty}(y - x)\phi(y)dy, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ とする．コールオプション価格 $C(T, K)$ に対して implied normal volatility $\sigma_N(K)$ は以下を満たす値である．

$$C(T, K) = C_N(T, K, \sigma_N(K)).$$

このとき，SABR モデル

$$\begin{aligned} dX(t) &= \varepsilon\alpha(t)\sigma(X(t))dW_1(t), \\ d\alpha(t) &= \varepsilon\nu\alpha(t)dW_2(t), \\ d\langle W_1, W_2\rangle &= \rho dt,\ X(0) = x_0,\ \alpha(0) = \alpha. \end{aligned}$$

に対して implied normal volatility の漸近展開式は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \sigma_N(K) = &\frac{\alpha(x_0 - K)}{\int_K^{x_0}\frac{dx}{\sigma(x)}}\Big(\frac{\zeta}{\hat{x}(\zeta)}\Big) \\ &\Big\{1 + \Big[\frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2}{24}\alpha^2\sigma^2(x_{av}) + \frac{1}{4}\rho\nu\alpha\gamma_1\sigma(x_{av}) + \frac{2 - 3\rho^2}{24}\nu^2\Big]\varepsilon^2 T + O(\varepsilon^3)\Big\} \end{aligned}$$

ただし，

$$x_{av} = \sqrt{x_0 K}, \gamma_1 = \frac{\sigma'(x_{av})}{\sigma(x_{av})}, \gamma_2 = \frac{\sigma''(x_{av})}{\sigma(x_{av})},$$

$$\zeta = \frac{\nu}{\alpha}\frac{x_0 - K}{\sigma(x_{av})},\ \hat{x}(\zeta) = \log\frac{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2}-\rho+\zeta}{1-\rho}.$$

とする．このモデルの確率ボラティリティを平均回帰過程にしたものは，λ SABR model と呼ばれ，同様の漸近展開式が，多様体上の Heat-Kernel expansion を用いて Labordère [4] により得られている．

8. 一般化 SABR 公式

さらに SABR の公式はより一般の拡散過程に従うモデルで X^1_ε を原資産とするコールオプションの implied normal volatility の漸近展開式まで拡張できることがわかった [6]．

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間として $\{W^1(t), \cdots, W^d(t)\ ;\ t \in [0,T]\}$ を d-次元 ブラウン運動とする．$X_\varepsilon(t),\ t\in[0,T],\ \varepsilon\in(0,1]$ を以下の確率微分方程式の解とする．

$$\begin{aligned} dX^i_\varepsilon(t) &= \sum_{k=1}^d \varepsilon V^i_k(t, X_\varepsilon(t))dW^k(t) + V^i_0(t, X_\varepsilon(t))dt, \quad 1\le i\le N, \\ X_\varepsilon(0) &= x_0 = (x^1_0, \ldots, x^N_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

ただし $V_0, \cdots, V_d \in C^\infty_b([0,T]\times\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ とする．ここで，$V^1_0 \equiv 0$ とし，また $V_1, \cdots, V_d$, の x_0 における強楕円性を仮定する．H を Cameron-Martin 空間とする. 対応する常微分方程式

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y^i(t;h) = \sum_{k=1}^d V^i_k(t, y(t;h))\dot{h}^k(t) + V^i_0(t, y(t;h)), \quad t\in[0,T], \quad h\in H, \\ &y(0;h) = x_0, \quad x_0\in\mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

を考える．また path のエネルギー e を以下のように定義する．

$$e(y) = \inf\Big\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\int_0^T |\dot{h}^i(s)|^2 ds; h\in H,\ y^1(T;h) = y\Big\}.$$

このとき，後述する楠岡-Stroock の定理 5 より

$$e(y) = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^2\log p^\varepsilon(y).$$

が成り立つ．

ここでは，上記の拡散過程に対してエネルギー関数の漸近展開を与える方法について説明しよう．まず，$V^1_0\equiv 0$ であることから, エネルギー関数は $e(x^1_0) = 0$ を満たすことに注意しよう．$\varepsilon = 0$ の場合に対応して, フロー $\phi: [0,T]\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\phi(t,x) = V_0(t, \phi(t,x)), \quad t\in[0,T], \\ &\phi(0,x) = x. \end{aligned}$$

ベクトル場 V の ϕ_t による push-forward を以下で定義する.

$$\tilde{V}_k^i(t,y) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}(-t,\phi(t,y))V_k^j(t,\phi(t,y)), \quad 1 \le i \le N, \quad 1 \le k \le d,$$

このとき，リーマン計量 $(g^{ij})_{1\le i,j\le N} : [0,T]\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ を

$$g^{ij}(t,x) = \sum_{k=1}^d \tilde{V}_k^i(t,x)\tilde{V}_k^j(t,x),\ 1 \le i,j \le N.$$

により定義する．また拡散過程の生成作用素を $L_t,\ t\in[0,T]$

$$(L_t f)(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N g^{ij}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \sum_{i=1}^N b^i(t,x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x),$$

により定義する．ただし，$b \in C_b^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ は

$$b^i(t,y) = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^N\sum_{m=1}^d \frac{\partial^2\phi^i}{\partial x^k\partial x^l}(-t,\phi(t,y))V_m^k(t,\phi(t,y))V_m^l(t,\phi(t,y)).$$

により与えられる．次に線形作用素 V，Γ を以下で定義する．

$$(Vf)(t,x) \equiv \sum_{i=1}^N g^{1i}(t,x)\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x^i}(s,x)ds,$$
$$\Gamma(f,g)(x) \equiv \sum_{i,j=1}^N \int_0^T g^{ij}(t,x)\Big(\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x^i}(s,x)ds\Big)\Big(\int_t^T \frac{\partial g}{\partial x^j}(s,x)ds\Big)dt.$$

このとき，以下の定理が成り立つ．

Theorem 2. 定数 $r_0 > 0$ と $C_0 > 0$ が存在して，エネルギー関数 e は以下を満たす.

$$\Big|e(y) - \Big[\frac{1}{2b_1}(y-x_0^1)^2 - \frac{b_2}{3b_1^3}(y-x_0^1)^3 + \Big(-\frac{b_3}{4b_1^4}+\frac{b_2^2}{2b_1^5}\Big)(y-x_0^1)^4\Big]\Big| \le C_0|y-x_0^1|^5,$$

ただし，$y\in[x_0^1-r_0, x_0^1+r_0]$ 　かつ $b_1,\ b_2,\ b_3$ は以下で定義する．

$$b_1 = \int_0^T g^{11}(t,x_0)dt,\ b_2 = \frac{3}{2}\int_0^T (Vg^{11})(t,x_0)dt,$$
$$b_3 = 2\int_0^T (V^2g^{11})(t,x_0)dt + \frac{1}{2}\Gamma(g^{11},g^{11})(x_0).$$

さらに，確率密度関数の漸近展開は以下のように求められる．

Theorem 3. 定数$r_0, C_1, C_2 > 0$が存在して，確率密度関数$p_\varepsilon(y)$は以下を満たす．

$$\Big|(2\pi\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\exp\Big(\frac{e(y)}{\varepsilon^2}\Big)p_\varepsilon(y) - a_0(y) - \varepsilon^2 a_2(y)\Big| \leq \varepsilon^4 C_1, \quad y \in [x_0^1 - r_0, x_0^1 + r_0].$$

ここで, a_0，a_2は連続関数で次を満たす．

$$\Big|a_0(y) - \Big(\frac{\partial^2 e(y)}{\partial y^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\exp\Big(\frac{L(y-x_0^1)^2}{2b_1^2}\Big)\Big| \leq C_2|y - x_0^1|^3,$$
$$a_2(x_0^1) = \frac{1}{\sqrt{b_1}}\Big(-\frac{L}{2b_1} - \frac{5}{6}\frac{b_2^2}{b_1^3} + \frac{3}{4}\frac{b_3}{b_1^2}\Big),$$

ただし，

$$L = \int_{0<u<t<T} L_u(g^{11}(t,\cdot))(x_0)dudt.$$

とする．

コールオプション価格の漸近展開を求めることにより次の定理を得る．

Theorem 4. *Implied normal volatility*の漸近展開は以下で与えられる．

$$\Big|\Big(\frac{\varepsilon|K - x_0^1|}{\sqrt{2e(K)T}}\Big)^{-1}\sigma_N(T,K) - \exp(J)\Big| \leq C(\varepsilon + |K - x_0^1|)^3, \quad K \in [x_0^1, K_1],$$

ただし

$$J = \frac{|K-x_0^1|^2}{b_1^2}\Big(\frac{L}{2} + \frac{1}{6}\frac{b_2^2}{b_1^2} - \frac{1}{4}\frac{b_3}{b_1}\Big)\varphi_1\big(\frac{\sqrt{2e(K)}}{\varepsilon}\big) + \frac{\varepsilon^2}{b_1}\Big(-\frac{L}{2} - \frac{5}{6}\frac{b_2^2}{b_1^2} + \frac{3}{4}\frac{b_3}{b_1}\Big)\varphi_1\big(\frac{\sqrt{2e(K)}}{\varepsilon}\big)$$
$$+ \frac{\varepsilon}{\sqrt{b_1}}\frac{|K-x_0^1|}{b_1}\Big(L + \frac{2}{3}\frac{b_2^2}{b_1^2} - \frac{3}{4}\frac{b_3}{b_1}\Big)\varphi_2\big(\frac{\sqrt{2e(K)}}{\varepsilon}\big) + \frac{\varepsilon^2}{b_1}\Big(\frac{L}{2} + \frac{b_2^2}{2b_1^2} - \frac{b_3}{2b_1}\Big)\varphi_3\big(\frac{\sqrt{2e(K)}}{\varepsilon}\big)$$

とする．

9. 楠岡-Stroock理論を用いた漸近展開理論

前章の結果はすべて楠岡-StroockのWiener汎関数に関する漸近展開理論を確率微分方程式の解に適用して得られたものであるため，最後に楠岡-Stroock理論について簡単に解説しよう． まず，必要な記号を準備する．$(\Theta, \|\cdot\|_\Theta)$を可分なバナッハ空間，$(H, \|\cdot\|_H)$を可分なヒルベルト空間とし，さらに$H$は$\Theta$の稠密な部分空間で包含写像は連続とする．次に$\mu_s$, $s \in [0,\infty)$, を$(\Theta, \mathcal{B}_\Theta)$上の確率測度で以下を満たすとする．

$$\int_\Theta \exp[\sqrt{-1}\langle\lambda,\theta\rangle]\mu_s(d\theta) = \exp(-\frac{s}{2}\|\lambda\|_H^2), \quad \lambda \in \Theta^*.$$

このとき，(Θ, H, μ_1)は抽象ウィーナー空間と呼ばれる．

与えられた可分なヒルベルト空間 E と $n \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$, に対して，$C^\infty_{\nearrow}(\mathbb{R}^n; E)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな E-値関数 f で，各マルチインデックス $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqq 0}$, に対して，$\nu_\alpha$, $C_\alpha \in (0, \infty)$ が存在して

$$\Big\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x) \Big\|_E \leqq C_\alpha (1 + |x|^2)^{\nu_\alpha/2},\ x \in \mathbb{R}^n$$

という性質を持つ関数全体のなす空間としよう．次に，$\mathcal{F}C^\infty_{\nearrow}([0,\infty) \times \Theta; E)$ を，$f : [0,\infty) \times \Theta \to E$ で，$n \in \mathbb{N}$，$\tilde{f} \in C^\infty_{\nearrow}(\mathbb{R}^{1+n}; E)$ と連続な線形写像 $A : \Theta \to \mathbb{R}^n$ が存在して

$$f(s,\theta) = \tilde{f}(s, A\theta),\ (s,\theta) \in [0,\infty) \times \Theta.$$

を満たすような関数全体のなす空間とする．$\mathcal{H}(E)$ により，$H \otimes E$ (もしくは, H から E への Hilbert-Schmidt 作用素全体の空間 $H.S.(H;E)$ とする)．作用素 $D : \mathcal{F}C^\infty_{\nearrow}([0,\infty) \times \Theta; E) \to \mathcal{F}C^\infty_{\nearrow}([0,\infty) \times \Theta; \mathcal{H}(E))$ を

$$Df(s,\theta)(h) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(s, \theta + \tau h) - f(s,\theta)}{\tau},\ (s,\theta) \in [0,\infty) \times \Theta,\ h \in H.$$

により定義する．

$\mathcal{H}^m(E)$ は $m \geqq 2$ に対しては帰納的に $\mathcal{H}^m(E) = \mathcal{H}(\mathcal{H}^{m-1}(E))$ により定義し，D^m についても同様に，$D^{m+1} = D \circ D^m$ により定義する．H の正規直交系 $\{h_i\}$ として，各 $f \in \mathcal{F}C^\infty_{\nearrow}([0,\infty] \times \Theta; E)$, $(s,\theta) \in [0,\infty) \times \Theta$ に対してラプラシアン Δf を以下で定義する

$$\Delta f(s,\theta) = T_H D^2 f(s,\theta) \equiv \sum_i D^2 f(s,\theta)(h_i, h_i) \in E$$

次に熱作用素 $\mathcal{A} : \mathcal{F}C^\infty_{\nearrow}([0,\infty) \times \Theta; E) \to \mathcal{F}C^\infty_{\nearrow}([0,\infty) \times \Theta; E)$ を

$$\mathcal{A}f(s,\theta) = [\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2} T_H D^2 f](s,\theta),\ (s,\theta) \in [0,\infty) \times \Theta.$$

により定義する.

次に，ベクトル空間 $\mathcal{F}C^\infty_{\nearrow}([0,\infty) \times \Theta; E)$ 上にあるセミノルムを定め，その完備化を $\mathcal{G}^\infty(\mathcal{A}; E)$ とし，さらに，完備 P-正則関数を $\mathcal{G}^\infty(\mathcal{A}; E)$ 内に定める．ここで，$f : (0,\infty) \times \Theta \times Y \to \mathbb{R}$, $g : (0,\infty) \times \Theta \times Y \to \mathbb{R}$ と $F : (0,\infty) \times \Theta \times Y \to \mathbb{R}^N$ を完備 P-正則関数とし，Y を $\mathbb{R}^N$ のコンパクトな部分集合とする.

このとき，楠岡-Stroock [8] は以下を証明した.

Theorem 5 (楠岡, Stroock)**.** 各 $s \in (0,1]$ に対して, $\mathbb{R}^N$ 上の符号付測度 $P_s(\cdot)$ を

$$P_s(\Gamma) = \int_{F(s,\theta) \in \Gamma} g(s,\theta) \exp[\frac{f(s,\theta)}{s}] \mu_s(d\theta),\ \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N),$$

により定義すると，滑らかな密度関数$p_s(\cdot)$を持つ．さらに, $\{a_n\}_0^\infty \subseteq C(Y;\mathbb{R})$と$\{K_n\}_0^\infty \subseteq (0,\infty)$が存在して, 各$n\in\mathbb{N}$に対して,

$$\left|(2\pi s)^{N/2} e^{e(y)/s} p_s(y;0) - \sum_{m=0}^{n} s^{m/2} a_m(y)\right| \leqq K_n s^{n(n+1)/2},\ (s,y)\in(0,1]\times Y.$$

を満たす.

さらに$a_0(y)$は以下のように具体的に与えられるKusuoka-O[6].

Theorem 6. eはYの近傍で滑らかで $y\in Y$に対して

$$a_0(y) = \det\nabla^2 e(y)^{\frac{1}{2}} \det{}_2(I_H - B(y))^{-\frac{1}{2}} \exp\Big(\sum_{l=1}^{N} \nabla_l e(y) \mathcal{A}F^l(0,h(y)) + \mathcal{A}f(0,h(y))\Big),$$

が成り立つ. ただし

$$B(y) \equiv \sum_{l=1}^{N} \nabla_l e(y) D^2 F^l(0,h(y)) + D^2 f(0,h(y)).$$

とする． ここで$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\nabla_{ij}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^i,\partial x^j}$, とし$\nabla^2 e(y) = (\nabla_{ij}^2 e(y))_{1\leq i,j\leq N}$とする． ここでは，連続な対称 *2* 次形式$B : H\times H \to \mathbb{R}$と，有界対称線形作用素$\tilde{B} : H \to H$を

$$(\tilde{B}h,k)_H = B(h,k), \qquad h,k\in H.$$

により同一視し，$\det_2$は，*Carleman-Fredholm*行列式と呼ばれる.

参考文献

[1] Black, F., Scholes, M. (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81, 637-654.

[2] Dupire. B. (1994), *Pricing with a smile*, Risk, 7, 18-20.

[3] Hagan, P. S., Kumar D., Lesniewski, S. Woodward, D. E. (2002), *Managing smile risk*, Wilmott 18, no. 11, pages 84-108.

[4] Henry-Labordère, P. (2005), *A General Asymptotic Implied Volatility for Stochastic Volatility Models*, preprint, SSRN.

[5] Heston, S. (1993), *A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, Review of Financial Studies 6, 327-343.

[6] Kusuoka, S. and Osajima, Y. (2008), *A Remark on the Asymptotic Expansion of density function of Wiener functionals*, J. Fuct. Analysis 255(2008),. 2545-2562.

[7] Osajima, Y. (2007), *General Asymptotics of Wiener Functionals and Application to Mathematical Finance*, preprint, The University of Tokyo.

[8] Kusuoka, S. and Stroock, D. W. (1991), *Precise Asymptotics of Certain Wiener Functionals*, J. Funct. Anal., 99, 1-74.

[9] Ren, Madan and Qian Qian (2007): *Calibrating and pricing with embedded local volatility models*, Risk, 9, pp. 138—143