

総合講演

インスタントンの数え上げと ドナルドソン不変量

中島 啓 (京都大学数理解析研究所)*

概 要

インスタントンのモジュライ空間を用いて定義される Donaldson 不変量と、モノポールのモジュライ空間を用いて定義される Seiberg-Witten 不変量が等価であるという、Witten の予想は、未だ未解決です。この予想を、複素代数曲面の場合に証明した Göttsche と吉岡氏との共同研究について、紹介します。また、この研究で幾度ともなく使われた固定点公式について、専門外の方に分かるように紹介を試みます。

この講演の目的は、共同研究

[GNY] L. Göttsche, H. Nakajima and K. Yoshioka, *Donaldson = Seiberg-Witten from Mochizuki's formula and instanton counting*, Publ. of RIMS, to appear

を、専門分野外の人に紹介することです。このタイトルにもある通り、望月さんが、Donaldson 型不変量の計算のために作られた理論

[Mo] T. Mochizuki, *Donaldson type invariants for algebraic surfaces. Transition of moduli stacks*, Lecture Notes in Mathematics, **1972**. Springer-Verlag, Berlin, 2009. xxiv+383 pp

を使っています。この二つの論文や、もう一つ基本となる

[NY] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, Invent. Math. **162** (2005), no. 2, 313–355

で使われている、同変コホモロジーの固定点公式を、講演の前半で紹介します。この部分は、分野外の方でも理解することができるように、説明したいと思います。

本研究は科研費(課題番号:19340006)の助成を受けたものです。

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 14D21; Secondary 57R57, 81T13, 81T60

キーワード: インスタントン, ドナルドソン不変量, モノポール, サイバーグ・ウィッテン不変量, 固定点公式

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所

e-mail: nakajima@kurims.kyoto-u.ac.jp

web: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima>

講演の後半では、インスタントンの数え上げと、Donaldson 不変量と Seiberg-Witten 不変量をつなげる、[GNY] の証明のあらすじを説明したいと思います。

1. 数え上げとは

1.1. 留数定理

関数論の留数定理を思い出しましょう。 f が領域 U で正則な関数であり、 U の境界が C であるとする、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \sum_{a \in U} \text{Res } f(a)$$

が成り立ちます。この定理は、 U 上の微分形式 $\alpha = f(z)dz$ に関して、 $d\alpha = 0$ が成り立つことに注意して、 U から f の極の周りの小さな円を除いた領域にストークスの定理を適用することで証明されます。

U 上での積分が、 U の境界での積分に帰着される、というのがストークスの定理のあたりがたみです。また、積分される微分形式が特異性を持っているところに、積分が‘局所化する’というのが、留数定理の特徴です。

留数定理の応用として、複素射影直線 \mathbb{P}^1 上の有理微分形式 α の留数の和は、0 である、という結果を得ます。

$$\sum_{a \in \mathbb{P}^1} \text{Res}_a \alpha = 0.$$

この講演の最後に、 \mathbb{P}^1 がパラメータのモジュライ空間になることを利用して、Donaldson 不変量と Seiberg-Witten 不変量をつなげることになります。

1.2. 固定点公式

多様体上での積分を、定義に従って計算するのは、ほとんどの場合は難しいです。しかし、上で見たようにしばしば積分が局所化して、有限個の点からの寄与を計算すればよい、ということが起こります。実際、高校数学では、積分は不定積分の区間の端の値の差、として計算します。

また、ガウス・ボンネの定理は、コンパクトで向きづけられた 2 次元リーマン多様体 Σ の曲率の積分がオイラー数であることを主張しますが、ポアンカレ・ホップの定理の、多様体のオイラー数が、ベクトル場 X の零点の個数 (をしかるべく重複度を入れて) 足し合わせたものに等しい、という主張と合わせると、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} K dA = e(\Sigma) = \sum_{p \in \Sigma} \text{Index}_p X$$

となります。したがって、多様体上の積分が、有限和により計算されます。

より一般的に、多様体 M にトーラス T が作用しているときに、 M 上の積分をトーラス固定点 M^T 上の和で表す公式が、同変コホモロジーの固定点公式です。 M^T は、しばしば有限個の点になりますので、上と同様に、多様体上の積分が、有限和で表されるわけです。同変コホモロジーの説明は、省略しますが、式を書くと

$$\int_M \alpha = \sum_{p \in M^T} \frac{\alpha_p}{e(T_p M)} \quad (1)$$

となります。 $e(T_p M)$ は、 p における M の接空間 $T_p M$ の同変オイラー類で、もっと簡単にいってしまえば、 $T_p M$ を $t \in T$ の作用する (複素) 線形空間と見たときの、 $\log t$ の固有値の積になります。

たとえば、 $M = \mathbb{P}^1$ とし、 $T = S^1$ の作用を、同次座標を用いて $[z_0 : z_1] \mapsto [z_0 : tz_1]$ で定めると、固定点は $p_0 = [1 : 0]$, $p_\infty = [0 : 1]$ の二つになり、固有値はそれぞれ t , t^{-1} となります。そこで、たとえば α として、 M 上のトートロジカル直線束 L の第一チャーン類 $c_1(L)$ と取ってみます。 \mathbb{P}^1 を \mathbb{C}^2 中の 1 次元部分空間の全体のなす空間と考えたときに、 L は、その部分空間自体をファイバーに持つような直線束です。

$$L = \{([z_0 : z_1], v_0, v_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{C} (v_0, v_1) = \lambda(z_0, z_1)\}.$$

このとき T の作用は、 L に $([z_0 : z_1], v_0, v_1) \mapsto ([z_0 : tz_1], v_0, tv_1)$ としてリフトし、 L は同変ベクトル束という構造を持っています。このとき α_p は、 L の p におけるファイバーを $t \in T$ の作用する線形空間と見たとき、 $\log t$ の固有値の積になります。今の場合は、 p_0 における固有値は $t^0 = 1$, p_∞ における固有値は t になります。したがって、(1) は

$$\int_{\mathbb{P}^1} c_1(L) = \frac{0}{1} + \frac{1}{-1} = -1$$

という、よく知られた式を与えます。

トーラスの次元が 1 のときは、上のようにウェイトは数と置いていいですが、 n 次元のときは、 $t = \text{diag}(t_1, \dots, t_n)$ を対角行列として $\log t = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ と表し、(1) の右辺に出てくる $\alpha_p, e(T_p M)$ は、 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ の多項式として表します。例えば、上の例を \mathbb{P}^n の場合に拡張して、トーラス作用を $[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \mapsto [z_0 : t_1 z_1 : \dots : t_n z_n]$ として、トートロジカル直線束への作用も同様に定めると、固定点は $[1 : 0 : \dots : 0]$, \dots , $[0 : \dots : 0 : 1]$ と $n + 1$ 個生じ、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{P}^n} c_1(L)^n \\ &= \frac{0^n}{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} + \frac{\varepsilon_1^n}{(-\varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdots (\varepsilon_n - \varepsilon_1)} + \cdots + \frac{\varepsilon_n^n}{(-\varepsilon_n)(\varepsilon_2 - \varepsilon_n) \cdots (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)} \end{aligned}$$

となります。右辺を計算することは演習問題としますが、答えは $(-1)^n$ となります。

ここで、上の $c_1(L)^n$ を $c_1(L)^d$ で置き換えたときに何が起こるか調べてみます。左辺は、コホモロジーの次数と多様体の次元が合っていないので、 $d \neq n$ のときは 0 となりますが、一方で、右辺は $(-1)^n h_{d-n}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ となります。ただし、 $h_{d-n}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ は、 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ に関する $(d-n)$ 次の完全対称多項式です。 $d < n$ のときは、(約束として) これは 0 なのでいいのですが、 $d > n$ のときは、0 でない答えが出てきます。

この現象の正確な説明は、同変コホモロジーによって与えられますが、ここでは省略します。雑なことをいうと、コホモロジー群が、次数が多様体の次元よりも大きいときにも 0 にならないように定義しなおされ、 $\int_{\mathbb{P}^n}$ が、 \mathbb{P}^n のコホモロジー類から、一点のコホモロジー類を定める線形写像として定義されます。このとき、コホモロジーの次数は $2n$ だけ下げられます。

現在、モジュライ空間に基づく不変量が活発に研究されていますが、中でも Gromov-Witten 不変量の研究において、固定点公式は役に立つ公式として多いに利用されています。この不変量は、リーマン面からシンプレクティック多様体への正則写像のモジュライ空間の上で、積分を行って定義されます。シンプレクティック多様体にトーラスの作用があると、モジュライ空間にもトーラスの作用が遺伝するので、固定点公式が適用できるわけです。

ところが、Donaldson 不変量の研究に、固定点公式を本格的に利用することは、(Ellingsrud-Göttsche による壁越え公式の研究を除き) 後述する Nekrasov までなされませんでした。Donaldson 不変量と Gromov-Witten 不変量は、親戚のようなものなので、これは不思議と思われるかもしれません。しかし、以下だんだんと説明するように、その利用法は上のように一言で説明できるものでないので、振り返ってみると多くの新しいアイデアがあったことが分かります。

1.3. コンパクトでない場合

前節の固定点公式 (1) では、 M はコンパクトであると仮定していました。あとで出てくるインスタントンの数え上げでは、コンパクトでない場合に右辺で定義される量を考えます。つまり、左辺は積分が発散するかもしれないので、定義できるかどうか分かりませんが、右辺は、 M^T が有限個である限り意味があるので、それを考えよう、というわけです。

このようなことを考えて、意味があるのか、不思議に思われると思いますが、同変コホモロジーの局所化定理、というものを使うと、意味があることが分かります。また、少しこじつけでいうと、発散する積分から何らかの意味がある量を取り出す、というのは、物理ではよく考えられていることなわけです。

例として、あとで取り扱うものとの関係で、 $M = \mathbb{C}^2$, $T = S^1 \times S^1$ とし、作用は $(x, y) \mapsto (t_1x, t_2y)$ を取ります。固定点は、原点ただ一つからなり、固有値は t_1, t_2 です。そこで、微分形式として $\alpha = 1$ を取り、(1) を形式的に使うと、

$$\int_{\mathbb{C}^2} 1 = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

を得ます。左辺は、コンパクトでない多様体の上の積分で、多様体の次元と微分形式の次数が異なっています。にも関わらず、右辺は非自明な答えになっているわけです。

この式の意味がよく分からないと思いますので、関係した例として $\widehat{\mathbb{C}}^2$ を \mathbb{C}^2 の原点におけるブローアップとします。つまり、原点 0 を射影空間 \mathbb{P}^1 で置き換えるわけです。(図1参照) $\widehat{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ という写像が定義され、トーラスの作用が同変になるように $\widehat{\mathbb{C}}^2$

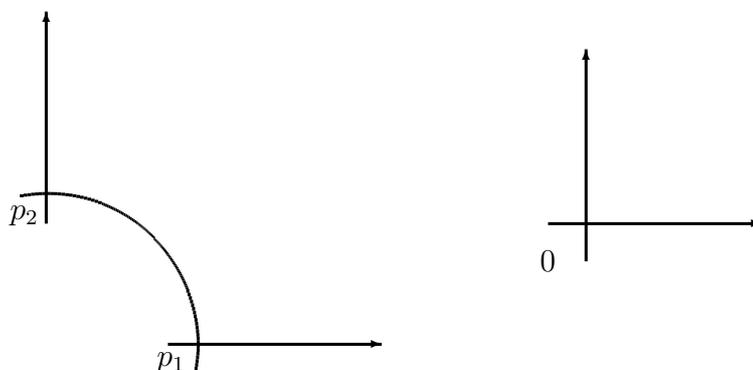


図 1: \mathbb{C}^2 と、その原点でのブローアップ

への T の作用を定義することができます。固定点は、射影空間の p_1 と p_2 の二点になり、トーラス作用の固有値は、それぞれ、 $t_1, t_2/t_1$ と t_1/t_2 と t_2 になるので、固定点公式は

$$\int_{\widehat{\mathbb{C}}^2} 1 = \frac{1}{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} + \frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_2} = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

となり、上の $\int_{\mathbb{C}^2} 1$ と同じ答えになります。この関係式の幾何学的な意味は、 $\widehat{\mathbb{C}}^2$ 上の微分形式 1 を $\widehat{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ のファイバーに沿って積分すると、 \mathbb{C}^2 上の 1 になる、ということです。(ポアンカレ双対に移ると、基本類 $[\widehat{\mathbb{C}}^2]$ の押し出しが $[\mathbb{C}^2]$ であるということです。) この関係は、 $\widehat{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ は殆どどのところで同型ですので、明らかかなことです。

このように、 $\int_{\mathbb{C}^2} 1$, $\int_{\widehat{\mathbb{C}}^2} 1$ の個々の意味は分かりにくいかもしれませんが、両者の間をつないでみると幾何学的な意味が伝わってきます。また、 1 のファイバーに沿った積分が 1 になるという主張は、同変コホモロジーを用いずとも、通常のコホモロジーでも意味がある主張です。あとで紹介する Nekrasov の分配関数を、吉岡さんと調べたときには、このアイデアを用いました。

1.4. \mathbb{C}^2 の対称積とヒルベルト概型

前節の非コンパクトの場合の、もう少しおもしろい例として、Nekrasov の分配関数とつなげることも考えて、 \mathbb{C}^2 の対称積とヒルベルト概型の上の積分を考察します。

\mathbb{C}^2 の n 次対称積 $S^n(\mathbb{C}^2)$ は、 \mathbb{C}^{2n} を n 次対称群 S_n で割った商空間 \mathbb{C}^{2n}/S_n であり、多様体ではありませんが、高々(有限)商特異点しかもたない、オービフォールドと呼ばれる空間になっており、特に有理係数コホモロジーは、普通の多様体のときと同様にポアンカレ双対性などの、性質を満たします。

前節と同様に、

$$\int_{S^n(\mathbb{C}^2)} 1 = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{C}^{2n}} 1$$

を $T = S^1 \times S^1$ の作用を使って計算してみると、 \mathbb{C}^{2n} において、固定点が多々(有限)にあり、 $(0, \dots, 0)$ しかないこと、そこでの接空間の同変オイラー数が $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^n$ であることに注意して、

$$\frac{1}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^n n!}$$

となります。特に、母関数を取ると

$$\sum_n q^n \int_{S^n(\mathbb{C}^2)} 1 = \exp\left(\frac{q}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\right)$$

となりますが、この式は、対称積の母空間が、もとの空間の‘指数関数’であること

$$\sum_n q^n S^n(\mathbb{C}^2) = \exp(q\mathbb{C}^2)$$

の現れである、と捉えられます。実際、先の式の右辺の \exp の中身の $1/\varepsilon_1 \varepsilon_2$ は、 $\int_{\mathbb{C}^2} 1$ として出てきました。

一方、 \mathbb{C}^2 の上の n 個の点のヒルベルト概型 $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ は、

$$\{I \subset \mathbb{C}[x, y] \mid I \text{ はイデアルで、} \dim \mathbb{C}[x, y]/I = n\}$$

と定義されます。 \mathbb{C}^2 の上に、 n 個の相異なる点を与えられたとすると、その点で消える多項式の全体のなすイデアル I は、 $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の元を与えます。このような元は、 $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の典型的な元ですが、点がぶつかった時には、 I としてはもう少し詳しい情報を考える必要があります。たとえば $n = 2$ のときは、ある点 p と、その接空間の中の一次元部分空間 $L \subset T_p \mathbb{C}^2$ を与えて、 $I = \{f \in \mathbb{C}[x, y] \mid f(p) = 0, df|_L = 0\}$ とすると、 $\text{Hilb}^2(\mathbb{C}^2)$ の元が与えられます。対称積の場合と比べて、 L の分だけ情報が増えていることに注意しましょう。このようにするといいことは、 $S^n(\mathbb{C}^2)$ が特異点を持っていたのに対し、 $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ は特異点を持たない複素多様体になります。

一般の n のときにも、増えている情報を忘れることによって

$$\pi: \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \rightarrow S^n(\mathbb{C}^2)$$

という写像が定義されます。ヒルベルト・チャウ射と呼ばれていて、 $S^n(\mathbb{C}^2)$ の非常にいい、特異点解消であることが知られています。

$\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の上の積分 $\int_{\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)} 1$ を考えると、ブローアップのときと同じように π によって $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ と $S^n(\mathbb{C}^2)$ が‘ほぼ’同じであることから、

$$\int_{\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)} 1 = \int_{S^n(\mathbb{C}^2)} 1$$

が成り立ちます。(同変ホモロジーにおいて、基本類を使って定式化すれば、自明です。) ただし、 $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ は $S^n(\mathbb{C}^2)$ よりもずっと複雑なコホモロジーをしているので、これは 1 を積分していることの特長です。

一方、 $\int_{\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)} 1$ を、固定点公式で計算してみます。 T の \mathbb{C}^2 への作用は $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ への作用を引き起こし、その固定点は単項式で生成されるイデアル(単項式イデアル)です。単項式を xy 平面に並べると、図2の左側のように、ヤング図形と単項式イデアルが一対一に対応することが分かります。

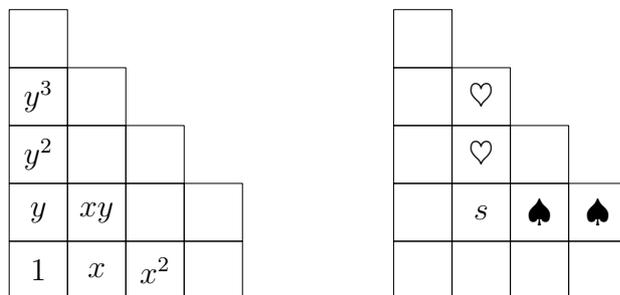


図 2: ヤング図式

ヤング図式 Y を $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の点とみなし、その点の接空間における同変オイラー数を用いて、先の積分は

$$\int_{\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)} 1 = \sum_Y \frac{1}{e(T_Y \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))}$$

で表されます。 $e(T_Y \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))$ を計算すると、

$$\prod_{s \in Y} (-l_Y(s)\varepsilon_1 + (a_Y(s) + 1)\varepsilon_2)((l_Y(s) + 1)\varepsilon_1 - a_Y(s)\varepsilon_2) \tag{2}$$

であることが分かります。ここで、 s はヤング図式 Y 中の箱であり、 l_Y, a_Y は leg length, arm length と呼ばれる量で、図2の右側の♠と♡の個数になります。この式と、前の計算を組み合わせると

$$\sum_Y \prod_{s \in Y} \frac{1}{(-l_Y(s)\varepsilon_1 + (a_Y(s) + 1)\varepsilon_2)((l_Y(s) + 1)\varepsilon_1 - a_Y(s)\varepsilon_2)} = \frac{1}{(\varepsilon_1\varepsilon_2)^n n!}$$

という式が成り立っていないといけないことが分かります。左辺は、ヤング図形の言葉だけで与えられているので、これは組み合わせ論的な恒等式であると考えられますが、実際にも対称多項式の理論 (Jack 多項式) を用いて証明することができることが知られています。そのような恒等式が、幾何学的な背景のもとで導出される場所は、面白いところだと思います。

2. Donaldson 不変量

2.1. 歴史を少し

Donaldson 不変量 (以下、D 不変量) は、1989年に、4次元多様体 X の上で、反自己双対接続 (インスタントン) という非線形偏微分方程式の解を考え、その全体のなす空間、モジュライ空間の上で、あるコホモロジー類を積分することで定義されました。U(2)-接続を A としたとき、その曲率 $F(A)$ は

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]$$

で与えられる2形式ですが、それがホッジのスター作用素 $*$ に関して、

$$*F_A = -F_A$$

を満たす、というのが、インスタントンの方程式です。より正確には、モジュライ空間はコンパクトでないので、曲率が有限個の点でディラックのデルタ関数となる特異な解を合わせてできる空間、Uhlenbeck コンパクト化を考える必要があります。

このモジュライ空間の構造を調べることは、一般には難しい問題で、したがって不変量を具体的に計算することは非常に難しいと考えられていました。また、モジュライ空間は、チャーン類という、離散パラメータ

$$\xi = c_1(P), \quad n = c_2(P)$$

に応じて考えることができますので、無限個の不変量が一度に定義されます。特に n は、モジュライ空間の次元に、ほぼ相当し、したがって n が大きくなるに従い、モジュライ空間はどんどん複雑になっていくことが想像されます。

ところが、1994年に Kronheimer と Mrowka は、D 不変量の母関数が、単純な構造を持っていることを発見し (構造定理)、無限個の D 不変量が、有限個の量と、4次元多様体の古典的な幾何的不変量 (具体的には交叉形式) で書けるもので、統制されていることを示しました。このすぐあと、Witten は、Seiberg と直前に行ったゲージ理論の物理的な研究を応用することによって、その有限個の量が、Seiberg-Witten 不変量 (以下、SW 不変量) という、別の非線形偏微分方程式 (モノポール方程式) の解を用いて定義される不変量に他ならない、と洞察しました。

モノポール方程式は、 Spin^c -接続 A と正スピノール ψ の組に対して

$$\begin{cases} D_A^+ \psi = 0, \\ F_A^+ + \mu(\psi, \psi) = 0 \end{cases}$$

で与えられます。 Spin^c 構造についての説明は省略しますが、 A は、だいたい $U(1)$ -接続とっていただきたい。また、 $\mu(\psi, \psi)$ は、 ψ に関する、ある二次式です。インスタントン方程式に比べると非線形度が低く、モジュライ空間の解析がやさしいのが特徴で、しかも SW 不変量が 0 にならないのは、モジュライ空間の次元が 0 になる時に限られることが、多くの場合に証明されており、実際すべての 4次元多様体についてそうなっているのではないかと、という希望的な予想もあります。(あとで述べる simple type 条件)

その後、SW 不変量の研究は大いに進展がありましたが、Witten の D 不変量と SW 不変量が等化であるという主張は、現在のところ数学的に厳密に証明されていません。Witten の議論は、数学としては厳密な基礎付けが与えられていない物理的な考察に基づいていたからです。Seiberg と行ったゲージ理論の物理的な研究では、D 不変量に対応する物理の理論が、楕円曲線の族で統制される、ということを目指しましたが、そこで取り扱われているのは、一般の 4次元多様体の上のインスタントン方程式ではなく、 \mathbb{R}^4 の上のインスタントンでした。 \mathbb{R}^4 は、コンパクトでなく、トポロジーは自明ですし、そこでは D 不変量にあたるものがないので、Seiberg-Witten の主張そのものでさえ、数学的にどのように理解したらいいのか、なかなか分かりませんでした。

2.2. Witten 予想

この節で Witten の導いた式を書き下しておきます。まず、いくつかの記号を準備します。 X のオイラー数 $\chi(X)$ と符号数 $\sigma(X)$ の一次結合として

$$(K_X^2) \stackrel{\text{def.}}{=} 2\chi(X) + 3\sigma(X), \quad \chi_h(X) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\chi(X) + \sigma(X)}{4}$$

とおきます。 X が複素代数曲面であるとする、それぞれ標準束の二乗と正則オイラー標数に等しいので、そこから記号を採用していますが、一般の 4次元多様体でも右辺

によって定義されます。

チャーン類が ξ, n で与えられるインスタントンのモジュライ空間 $M(\xi, n)$ 上で、積分

$$\int_{M(\xi, n)} \mu(\alpha)^k \mu(p)^l$$

を考えます。ここで、 α, p は、4次元多様体 X のホモロジー類で α は $H_2(X)$ の元であり、 p は一点の表すホモロジー類とします。 μ は、 $X \times M(\xi, n)$ 上のユニバーサル束のチャーン類にスラント積するという写像で、結果として $\mu(\alpha), \mu(p)$ はモジュライ空間上のコホモロジー類になります。これが、D不変量です。変数 z, x, Λ を導入し、母関数

$$D^\xi(\exp(\alpha z + px)) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n, k, l} \int_{M(\xi, n)} \mu(\alpha)^k \mu(p)^l \frac{z^k x^l}{k! l!} \Lambda^{4n - (\xi^2) - 3\chi_h(X)}$$

を考えます。 X が、KM-simple type であるとは、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} D^\xi = 4\Lambda^4 D^\xi$$

が、任意の ξ, α について成り立つときをいいます。この条件のもとでは、

$$D^\xi(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n, k} \frac{1}{k!} \left(D^{\xi, n}(\alpha^k) + \frac{1}{2} D^{\xi, n}(\alpha^k p) \right)$$

を考えれば、 $D^\xi(\exp(\alpha z + px))$ がすべて復元されます。Witten が導いた式は、

$$D^\xi(\alpha) = 2^{(K_X^2) - \chi_h(X) + 2} (-1)^{\chi_h(X)} e^{(\alpha^2)/2} \sum_{\mathfrak{s}} \text{SW}(\mathfrak{s}) (-1)^{(\xi, \xi + c_1(\mathfrak{s}))/2} e^{(c_1(\mathfrak{s}), \alpha)} \quad (3)$$

というものです。ここで、 $(,)$ は X の交叉形式、 $(\alpha^2) = (\alpha, \alpha)$ で、 $\text{SW}(\mathfrak{s})$ は、スピン c structure \mathfrak{s} の SW 不変量、 $c_1(\mathfrak{s}) = c_1(S^+) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ は、 \mathfrak{s} のスピノール束の第一チャーン類です。また、 X が、KM-simple type であることと、SW-simple type であること、すなわち、 $\text{SW}(\mathfrak{s})$ が 0 でないのは、 $c_1(\mathfrak{s})^2 = (K_X^2)$ のときに限ることが、同値であることも主張の中に含まれています。

2.3. 望月の公式

Seiberg-Witten の理論や Witten の議論を、とりあえず忘れて、純粹に数学的に、D不変量と SW 不変量を結びつけよう、という試みが、Pidstrigach-Tyurin によって始められ、その後 Feehan-Leness によって詳細が埋められつつあります。(B.Chen によるアプローチもあります。) Feehan-Leness は、ある技術的な主張について証明ができると仮定した上で、

$$D^\xi(\exp(\alpha z + px)) = \sum_{\mathfrak{s}} f(z, x; \chi_h(X), (K_X^2), \mathfrak{s}, \xi, \alpha, \mathfrak{s}_0) \text{SW}(\mathfrak{s}),$$

が成り立つことを証明しました。ただし、係数 f は具体的に計算されたのではなく、 $\chi_h(X), (K_X^2)$ と、 $\mathfrak{s}, \xi, \alpha, \mathfrak{s}_0$ の間の交叉の関数を係数とする、 z, x の形式的べき級数であるということが分かるだけです。証明のアイデアは、構造群を $U(2)$ に取り替えたモノポール方程式のモジュライ空間をかنگえることで、この方程式の特殊解として $U(2)$ -インスタントンと $U(1)$ -モノポールの両方が現れますので、二つのモジュライ空間の間に関係をつけることが期待できるのは、自然なことです。また、 $U(2)$ -モノポール方程式を考えると、 X のスピン^c構造を初めに取る必要があります、それが上の式にも説明なしにでてきた \mathfrak{s}_0 です。左辺は \mathfrak{s}_0 の取り方によらないはずなので、右辺はもそうならないかもしれませんが、これは式だけを見る限りは、まったく明らかではありません。

上の式を使って Witten 予想を証明するためには、係数 $f(z, x)$ を計算しなければなりません。しかし、これは Feehan-Leness のアプローチを見ても、どのようにおこなったらいいのか、まったく分かりません。そこで、われわれは、 X が複素代数曲面のときに、D 不変量と SW 不変量の関係を導いた望月氏の理論を用いることにしました。望月氏が得た結論は、上と同様の式ですが、大きな違いは係数 $f(z, x)$ が X の上の点のヒルベルト概型の上の積分、もう少し正確に言うと二つのヒルベルト概型の積の上の積分、として具体的に次のような形で与えられることです。

$$\text{Res}_{a=\infty} \sum_{n_1, n_2} \int_{\text{Hilb}^{n_1}(X) \times \text{Hilb}^{n_2}(X)} \cdots da \quad (4)$$

…の部分、具体的に書ける式ですが、記号を準備しなければいけないので、ここでは略します。次の節で、Nekrasov の分配関数を紹介するときに、もう少し説明します。

この式からは、Feehan-Leness の主張のように $f(z, x)$ が $\chi_h(X), (K_X^2)$ と、 $\mathfrak{s}, \xi, \alpha, \mathfrak{s}_0$ の間の交叉の関数として表されることは、明らかではなく、この点については、§4.1 で説明します。このように注意するのは、最後に述べるようにいろいろな $\text{SW}(\mathfrak{s})$ の間に関係式が満たされているために、 $f(z, x)$ が、unique には決まらない、ということがあります。したがって、望月氏のヴァージョンの $f(z, x)$ が Feehan-Leness のものと等しいことは、現時点では分かりません。

また、上の式が留数を取る、という形をしているのは、固定点公式の応用として証明されていることの帰結です。 a は、ある空間 (= $U(2)$ -モノポール方程式のモジュライ空間の代数幾何的な対応物を考え、さらにその安定性を変える状況でのマスター空間) へのトーラス作用に対応する変数であり、上のヒルベルト概型の積が、その空間の中の固定点集合として出てきます。

3. インスタントンの数え上げ

Seiberg-Witten の物理の研究を、数学的に厳密な形で理解できるように、状況が変わり始めたのは、2002年の Nekrasov の研究からです。彼は、 \mathbb{R}^4 の上のインスタントンのモジュライ空間の上で、通常の積分の代わりに、同変コホモロジーの積分を考慮することで、D 不変量の代用物としました。これは、Nekrasov の分配関数とよばれていますが、数学的に厳密に定義ができるものです。さらに、彼は Seiberg-Witten が計算していたものは、この不変量の漸近挙動である、と予想し、それが楕円曲線で統制される、という形で、Seiberg-Witten の主張を数学的に理解する枠組みを与えました。これは、数学者にも理解可能な主張であり、Nekrasov 予想とよばれました。

この Nekrasov 予想に数学的に厳密な証明を与えることは、Nekrasov-Okounkov と、私と吉岡さんの二つのグループで独立に行われ、少し遅れて Braverman-Etingof によっても行われました。

この節では、Nekrasov の分配関数の定義と、我々の結果について簡単に紹介します。

3.1. Nekrasov の分配関数

$M_0(r, n)$ を、 \mathbb{R}^4 上の $SU(r)$ -インスタントンの枠つきモジュライ空間の Uhlenbeck(部分)コンパクト化とします。 n はインスタントン数です。定義の詳細は省略しますが、 \mathbb{R}^4 の一点コンパクト化 S^4 の上でインスタントン方程式を考え、単なる解の全体のなす空間ではなく、解とそれが住んでいるベクトル束 E の無限遠点におけるファイバー E_∞ の自明化 $E_\infty \cong \mathbb{C}^r$ の組の全体のモジュライが、枠つきモジュライ空間です。これに特異な解を前と同様に合わせて考えて、Uhlenbeck 部分コンパクト化を定めます。ただし、特異性は S^4 ではなく、 \mathbb{R}^4 にしか許さないの、コンパクトではなく、そのため部分コンパクト化といっています。

$M_0(r, n)$ には、 $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ への作用を起源にもつ T^2 の作用と、枠を取り替えることによる T^r の作用があります。前者に対応する変数を今までのとおり $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ で表わし、後者に対応する変数を a_1, \dots, a_r とし、まとめて \vec{a} とします。このとき Nekrasov の分配関数は

$$Z^{\text{inst}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}, \Lambda) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_n \Lambda^{2rn} \int_{M_0(r, n)} 1$$

と定義されます。 $M_0(r, n)$ は商特異点よりもずっと悪い特異点を持つことが知られていますので、 $\int_{M_0(r, n)}$ を正当化するには、議論が必要です。一つは、同変ホモロジー群とその局所化定理を用いる方法ですが、ここでは省略します。もう一つは、

$$\pi: M(r, n) \rightarrow M_0(r, n)$$

という特異点解消が存在することを用いて、 $\int_{M(r,n)}$ として定義する方法です。ここで、 $M(r,n)$ は \mathbb{C}^2 上の階数 r の torsion free sheaf の枠つきモジュライ空間という、 $M_0(r,n)$ の代数幾何学での対応物です。 $S^n(\mathbb{C}^2)$ と $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の違いと同様に $M(r,n)$ の方が $M_0(r,n)$ よりも情報を持っており、そのおかげで $M(r,n)$ は複素多様体になります。 $M(r,n)$ への $T^2 \times T^r$ の作用の固定点は、ヒルベルト概型のとくとよく似ていて、 r 個のヤング図形の組 (Y_1, \dots, Y_r) で箱の総数が n のものでパラメトライズされ、その点における接空間の同変オイラー類も (2) を一般化した式によって、ヤング図形の言葉だけで表示することができます。この方法を用いると、 Z^{inst} は、 r 個のヤング図形の組の全体のなす集合上で、具体的な式を足し合わせることで与えられます。

望月氏の公式で出てきた (4) と比べるために、分配関数をヒルベルト概型の積の上の積分に書き直してみましよう。上では $M(r,n)$ への $T^2 \times T^r$ 作用を考えて、その固定点を記述しましたが、 T^r 作用だけに関する固定点を考えることもできます。そうすると、

$$M(r,n)^{T^r} = \bigsqcup_{n_\alpha} \prod_{\alpha=1}^r M(1, n_\alpha)$$

となります。ただし、和は $n = n_1 + \dots + n_r$ となる n_α を走ります。 $M(1, n_\alpha)$ は、 n_α 個の点のヒルベルト概型に他なりません。これから

$$Z^{\text{inst}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}, \Lambda) = \sum_{n_\alpha} \Lambda^{\sum n_\alpha} \int_{\text{Hilb}^{n_1}(\mathbb{C}^2) \times \dots \times \text{Hilb}^{n_r}(\mathbb{C}^2)} \frac{1}{e(N)}$$

が従います。ただし、 N は、 $\text{Hilb}^{n_1}(\mathbb{C}^2) \times \dots \times \text{Hilb}^{n_r}(\mathbb{C}^2)$ の $M(r,n)$ 中での normal bundle で $e(N)$ はその同変オイラー類です。先に紹介した (4) でも、 \dots の部分に同様の $1/e(N)$ が出てきます。また、留数を取るときに使う変数 a が、枠を取り換えるトラス作用に関するパラメータとして表れます。(すぐ下に述べるように $r=2$ の場合を考えるので、ベクトル変数 \vec{a} は、一つの変数 a になってしまいます。)

3.2. Seiberg-Witten 曲線

ここでは、話を簡単にするため、階数 r は 2 であるとしします。上で、 T^r のスカラー行列が $M_0(r,n)$ に自明に作用することから、 T^r を T^{r-1} で置き換えても本質的には変わらないので、 $a_1 + \dots + a_r = 0$ を仮定します。さらに $r=2$ の場合には、 $a = a_2 = -a_1$ とおきます。

Seiberg-Witten の理論では、ゲージ理論が楕円曲線で統制されるということが主張される、と上に述べました。これを、もう少し詳しく言うと、経路積分で定義されていたゲージ理論のプレポテンシャルという量が、楕円曲線の周期積分をもちいて計算できる、という主張になります。

経路積分は数学的に厳密に定式化されていませんので、これは数学者の理解可能な主張ではありませんでした。そこで、Nekrasov は、プレポテンシャルは、次のように、 $\log Z^{\text{inst}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}, \Lambda)$ を $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ について

$$\log Z^{\text{inst}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}, \Lambda) = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (\mathcal{F}^{\text{inst}}(\vec{a}, \Lambda) + O(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$$

と展開したときの主要項 $\mathcal{F}^{\text{inst}}$ に他ならない、と (物理的に) 洞察しました。ただし、 $\log Z^{\text{inst}}$ が上のように mild な特異性しか持たないこと自体も証明を要することであり、明らかでないことを注意しておきます。

ここで、 Z^{inst} は、経路積分を用いずに数学的に厳密に定義されるので、上のような mild な特異性しか持たないことを仮定して、 $\mathcal{F}^{\text{inst}}$ は厳密な定義を持ちます。したがって、Seiberg-Witten の主張は、 $\mathcal{F}^{\text{inst}}$ が楕円曲線で記述できる、という数学者にも理解可能な主張になりました。

話の本筋からずれるので、あまり詳しく立ち入らないことにします。感じだけをつかんでいただければいいのですが、この主張を紹介しましょう。パラメータ u と Λ をもった楕円曲線の族

$$y^2 = (z^2 + u)^2 - 4\Lambda^4 = (z^2 + u - 2\Lambda^2)(z^2 + u + 2\Lambda^2) \quad (5)$$

を考え、その上の有理微分形式

$$dS = -\frac{1}{\pi} \frac{z^2 dz}{y}$$

を A, B -サイクルで積分し、

$$a = \int_A dS, \quad a^D = \int_B dS$$

と定めます。これは、 u と Λ の関数です。このとき、

$$\frac{da}{du} = \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{dz}{y}$$

と、よく知られている正則微分の積分になります。特にこれは 0 ではないので、少なくとも局所的には、 u の代わりに a を変数とすることができます。そこで、 a^D を a (と Λ) の関数と考え、

$$a^D = -2\pi\sqrt{-1} \frac{\partial F}{\partial a}$$

によって、 F を定義します。定数項をどのように調整するかは省略しますが、これが、プレポテンシャルです。 F を Λ に関して展開すると、摂動項とよばれる

$$4a^2 \log \left(\frac{2\sqrt{-1}a}{\Lambda} \right) - 3a^2$$

が最初の部分で、以下は Λ についてのべき級数になります。この摂動項を除いた部分が、上で定義した $\mathcal{F}^{\text{inst}}$ に等しい、ということが、上で説明した数学者にも理解できる主張です。

ちなみに、この主張が正しいとすると、インスタントンの数え上げ側では、

$$u = a^2 - \frac{1}{4}\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \mathcal{F}^{\text{inst}} \quad (6)$$

となっていることが従います。 a と u が、変数になったり、関数になったりしましたが、インスタントンと Seiberg-Witten 曲線では、役割が逆になっていることに注意しましょう。この手の役割の逆転は、ミラー対称性ではよく起こります。

3.3. 証明のアイデア

実は、Seiberg-Witten が上の楕円曲線を発見する前から、同じ楕円曲線が D 不変量のコンテキストで現れることが、Fintushel-Stern によって観察されていました。これは、4次元多様体 X と、連結和 $X \# \overline{\mathbb{P}}^2$ の D 不変量が楕円関数を用いて関係付けられるという、ブローアップ公式でした。(ここでは、 u も上の (6) とよく似た幾何学的な意味付けを持ちます。)

そこで、我々は Nekrasov の分配関数に対してもブローアップを考えることにしました。 $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ の一点ブローアップ $\widehat{\mathbb{C}}^2$ を取り、その上の $U(r)$ -インスタントンの枠つきモジュライ空間の Uhlenbeck(部分)コンパクト化 $\widehat{M}_0(r, k, n)$ を考えます。ここで $k = -\langle c_1(E), [C] \rangle$ で、これは \mathbb{C}^2 のときには無かった新しい離散パラメータです。

しかるべく n' を取ると、 $\widehat{M}_0(r, k, n) \rightarrow M_0(r, n')$ という射が定義されることが証明できます。($k = 0$ のときは $n' = n$ です。) この射を用いて、 $\widehat{M}_0(r, k, n)$ 上の積分と、 $M_0(r, n')$ 上の積分を関係させることができます。例えば

$$\int_{\widehat{M}_0(r, 0, n)} 1 = \int_{M_0(r, n)} 1$$

が、その中でも一番簡単なものです。

一方で、 $\widehat{\mathbb{C}}^2$ 上でも $\widehat{M}(r, k, n)$ という torsino free sheaf の枠つきモジュライ空間という、 $\widehat{M}_0(r, k, n)$ の代数幾何学における対応物を考えることができ、 $\widehat{M}(r, k, n) \rightarrow \widehat{M}_0(r, k, n)$ は特異点解消になります。そこで $\widehat{M}_0(r, k, n)$ 上の積分は、 $\widehat{M}(r, k, n)$ 上の積分と等しく、さらにそれは固定点公式によって具体的な式で書き下すことができます。 $\widehat{M}(r, k, n)$ の固定点を記述することは簡単で、ヤング図式の組みが $(Y_1^1, \dots, Y_r^1), (Y_1^2, \dots, Y_r^2)$ の他に、 r 個の整数 k_1, \dots, k_r が出てきて、

$$\sum k_\alpha = k, \quad \sum_\alpha |Y_\alpha^1| + |Y_\alpha^2| + \frac{1}{2r} \sum_{\alpha < \beta} (k_\alpha - k_\beta)^2 = n$$

を満たすものの全体で固定点集合がパラメトライズされていることが証明できます。ヤング図式が計 $2r$ 個出てくることは、 $\widehat{\mathbb{C}}^2$ に二つのトーラス固定点があることに対応し、 $(Y_1^1, \dots, Y_r^1), (Y_1^2, \dots, Y_r^2)$ がそれぞれ、その点の周りの座標系における単項式イデアルに対応します。

この固定点公式を書き下してみると、 \mathbb{C}^2 上の固定点公式に現れる表示式を用いて表されます。これは、 $\widehat{M}(r, k, n)$ と $M(r, n)$ が固定点の周辺で、トーラスの作用まで込めて同型になっていることの反映です。例えば、ヒルベルト概型のとときの接空間の同変オイラー類を計算すると ($k = 0$ とするので、 k の情報は含まれていません)

$$e(T_{Y^1} \text{Hilb}^{|Y^1|}(\mathbb{C}^2)) \Big|_{\substack{\varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \mapsto \varepsilon_2 - \varepsilon_1}} \times e(T_{Y^2} \text{Hilb}^{|Y^2|}(\mathbb{C}^2)) \Big|_{\substack{\varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \mapsto \varepsilon_2}}$$

と、 \mathbb{C}^2 の場合のものを適当に変数の入れ替えをしたものの、二つの積で書けることが分かります。

このように \mathbb{C}^2 上のインスタントンの数え上げと、 $\widehat{\mathbb{C}}^2$ 上のインスタントンの数え上げは、

- (1) 射 $\widehat{M}_0(r, k, n) \rightarrow M_0(r, n')$ を通じて得られる関係式
- (2) 固定点公式を比べて得られる関係式

の二つの関係式で結ばれています。両者を連立させることによって Z^{inst} の満たす関数方程式が導かれ、その方程式が Z^{inst} を決定することが証明できます。

この関係式は、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ の極限とも相性がよく、 $\mathcal{F}^{\text{inst}}$ の満たす微分方程式を導くことができます。これは、contact term 方程式とよばれている物理で研究されていた方程式であり、Seiberg-Witten の楕円曲線から導くことができます。contact term 方程式は $\mathcal{F}^{\text{inst}}$ を決定することが証明できるので、 $\mathcal{F}^{\text{inst}}$ が プレポテンシャル F (の摂動項を除いたもの) であることが従います。

4. Witten 予想の証明

いよいよ、この節で [GNY] の証明のあらすじを説明します。

4.1. ヒルベルト概型上の積分の普遍性

§2.3 で説明したように、D 不変量と SW 不変量は、ヒルベルト概型上の積分で書ける (望月氏のヴァージョンの) 係数 f を用いてつなげることができます。このタイプのヒルベルト概型上の積分については、[EGL] による一般的な構造定理があり、簡単な形で表されることが分かっています。一言でいうと、

積分は曲面 X に対して普遍性を持ち、いくつかの特別な曲面について計算すれば、自動的に決定される。

ということです。

もう少し詳しくいうと、 f に具体的に分かる項 (実は、Nekrasov の分配関数の摂動項に対応します) を掛けて正規化しておくと、

$$f(z, x) \propto \exp(F(z, x))$$

となります。ここで、 $F(z, x)$ は、コホモロジー類 $\xi, \mathfrak{s}, \mathfrak{s}_0, \alpha, p, c_1(X), c_2(X)$ の (カップ積に関する) 多項式を X の上で積分した、という形をしています。

この式の証明には立ち入りませんが、1 を積分すると、たしかにそのようになっていること、

$$\sum_n q^n \int_{\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)} 1 = \exp(q \int_{\mathbb{C}^2} 1)$$

を先に紹介しました。

この構造定理と、 α^3, α^4 等は、積分が 0 になってしまうことから $F(z, x)$ の中には出てこないことを考え合わせると、 $f(z, x)$ は、 $(\alpha^2), (\xi, \alpha), (c_1(X), \alpha), (\mathfrak{s}, \alpha)$ 等の一次式で書けることが分かり、その係数は X に依存しません。この主張は、Feehan-Leness のバージョンの $f(z, x)$ が、 $\chi_h(X), (K_X^2)$ と、 $\mathfrak{s}, \xi, \alpha, \mathfrak{s}_0$ の間の交叉の関数である、といった主張と似ていますが、次の二つの点で相違があります。

(1) 今の場合、 $c_1(X)$ との交叉が出てくる可能性があります。この部分については一般の 4次元多様体の場合にどのように理解したらいいのか分かりません。

(2) $\log f(z, x)$ は、交叉たちの一次式で、一般の関数であるよりもずっと簡単です。

(2) は、このアプローチの利点で、(1) については、次の節の計算を行うと、(符号の部分を除いて) 消えてしまうことが分かります。

4.2. Nekrasov の分配関数による記述

次に $F(z, x)$ を計算することを考えます。前節の普遍性の結果から X として、トーリック曲面の場合に計算して、一次式の係数の部分だけを決定すればいいことが分かります。さらに X がトーリック曲面であるとする、その上の点のヒルベルト概型 $\text{Hilb}^n(X)$ もトーラスの作用があり、固定点が有限個の点になります。実際、 $\text{Hilb}^n(X)$ のトーラス固定点は、 X のトーラス固定点の回りの座標系のもとで単項式イデアルで表されるイデアル層の共通部分として与えられます。特に、母関数を取ると

$$\bigsqcup_n \text{Hilb}^n(X)^T = \underbrace{(\text{分割の集合}) \times \cdots \times (\text{分割の集合})}_{X^T \text{ 個}}$$

となります。

そこで、 $f(z, x)$ 、もしくは $\exp F(z, x)$ に固定点公式を適用すると、

$$F(z, x) = \sum_{p \in X^T} F^p(z, x)$$

という X^T の固定点に関する和の形をしていることが従います。そして $F^p(z, x)$ は、 p における接空間のトーラスのウェイト $\varepsilon_1(p), \varepsilon_2(p)$ や、コホモロジー類の制限 α_p, ξ_p, \dots で書けます。このように書いてみると、 $F^p(z, x)$ は $X = \mathbb{C}^2$ の上の点のヒルベルト概型上の積分の \log を取り、トーラス・ウェイト $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ やコホモロジー類 α を、 p におけるもの $\varepsilon_1(p), \varepsilon_2(p), \alpha_p$ 等で置き換えたものに他ならないことが、容易に分かります。

さらに、 $X = \mathbb{C}^2$ のときの積分を見ると、 $\exp F^p(z, x)$ は Nekrasov の分配関数を使って書き下せることが分かります。これは、上の積分が、正確には二つのヒルベルト概型の積の上の積分であったことから、 $r = 2$ の場合の分配関数と見比べると、自然に結論できます。ただし、ひとつだけ違いがあり、 $M_0(2, n)$ の上で 1 を積分したのではなく、各 ASD 接続 A に対して、正ディラック作用素の核 $\text{Ker } D_A^+$ を考えて定まる、ベクトル束 \mathcal{V} の同変オイラー類 $e(\mathcal{V})$ を積分したもの

$$Z^{\text{inst}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, m, \Lambda) = \sum_n \Lambda^{3n} \int_{M(2, n)} e(\mathcal{V})$$

を使わないといけません。技術的な細かいことをいうと、このベクトル束は、枠付きモジュライ空間の上には定義されますが、Uhlenbeck 部分コンパクト化には拡張されないので、 $M_0(2, n)$ を $M(2, n)$ で置き換え、代数幾何的なドルボー・コホモロジーによって置き換えることで、 \mathcal{V} を $M(2, n)$ 上のベクトル束として定義します。また、新しい変数 m は、 \mathcal{V} のファイバーへの S^1 作用に対応する、変数です。ただし、望月氏の公式に用いるときには、この変数は $m = a$ として枠の取り換えの変数と一致させてしまいます。

このようなベクトル束がでてくる理由は、望月氏の公式で $U(2)$ -インスタントン方程式でなく、モノポール方程式を使っていたことに起因します。このようなベクトル束は、物質場として、物理のゲージ理論でも扱われており、特に Seiberg-Witten の理論は、そのようなものも取り扱っています。

4.3. 最後の計算

$F^p(z, x)$ が、 $Z^{\text{inst}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, m, \Lambda)$ を用いて書ける、と書きましたが、実際には、 $\log Z^{\text{inst}}$ を取って、これをトーリック曲面の固定点の上で足しあげることから、

$$\log Z^{\text{inst}} = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left(\mathcal{F}^{\text{inst}} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) H^{\text{inst}} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 A^{\text{inst}} + \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{3} B^{\text{inst}} + \dots \right)$$

と展開したときに、 \dots 以下の項は寄与しないことがすぐに分かります。前に述べたように $\mathcal{F}^{\text{inst}}$ は、Seiberg-Witten 曲線の周期積分を用いて書き下すことができますが、 $A^{\text{inst}}, B^{\text{inst}}$ についても、我々のアプローチでは同様に計算することができ、また H^{inst} については0になっていることが証明できます。

ただし、 $a = \infty$ で、 $\mathcal{F}^{\text{inst}}$ 等は極めて悪い特異性を持っているので、留数を直接計算するのは、とても不可能に思えます。そこで、留数定理を利用することを考えます。もともと a は ∞ の近傍でしか定義されなかったと考えるのが自然ですが、Seiberg-Witten 曲線を用いて変数 u に移ると、全平面に有理的に拡張されますので、そこで他の極を調べます。(正確には、 u でない変数を用いるのですが、ここでは、ごまかすことにします。)

a は u の関数である、と書きましたが、正確には、 A, B サイクルを u について global に取ることはできませんので、 a は u の多価関数です。また、インスタントの数え上げ側では、逆に u は a の多価関数として自然に出てきますので、 u を変数と思って、極を調べるということが、直感的な理解が非常にしにくいことがお分かりいただけるかと思います。

他の極として、まず $u = \pm 2\Lambda^2$ があります。(5)を見ると、この点で楕円曲線が退化しているので、これは自然です。この点での留数を計算してみると、Witten 予想で期待される係数になっていることが示せます。微分形式がその点では、マイルドな特異性しか持たないので、 $a = \infty$ における留数とは違って計算ができます。

他に極がなければ、これで Witten 予想が証明され、(5)を見る限り、他に極はないのですが、我々の Nekrasov 分配関数が $e(\mathcal{V})$ を積分していたことから、Seiberg-Witten 曲線自体も変更する必要が生じ、少し事情が変わってきます。新たな極が生じ、そこでの留数も計算する必要が出てきます。

Witten 予想が成立するためには、新たな極からの寄与はあってはいけないので、留数が0になっているはず、と安直には思うのですが、驚くべきことに、留数自体は0でないにも関わらず、スピンの構造に関して、(3)のように和を取ると、0になる、ということになっています。これは、SW 不変量の間には非自明な関係式が成立しているということを意味します。具体的には、次の条件が成り立つことが、新たな極からの寄与がキャンセルして Witten 予想が成立することと同値です。

定義 7. 4次元多様体は、SW-simple type であると仮定します。このとき、 X が、superconformal simple type であるとは、 $(K_X^2) \geq \chi_h(X) - 3$ が成り立つか、さもない

くば

$$\sum_{\mathfrak{s}} (-1)^{(\tilde{w}_2(X), \tilde{w}_2(X) + c_1(\mathfrak{s}))/2} \text{SW}(\mathfrak{s})(c_1(\mathfrak{s}), \alpha)^n = 0 \quad (8)$$

が、すべての $w_2(X)$ の整数係数コホモロジー類へのリフト $\tilde{w}_2(X)$ と $0 \leq n \leq \chi_h(X) - (K_X^2) - 4$ について成り立つ。

この条件は、もともとは [MMP] において、物質場付きの Seiberg-Witten 理論が、4次元多様体の D 不変量と SW 不変量に関して、どのようなことをいうかを、物理的に議論して導き出したものです。

[MMP] では、 X が代数曲面の場合には、分類論を用いて、superconformal simple type 条件が つねに満たされていることをチェックしていました。我々は、そのような議論を経ることなく、D 不変量が、もともと $\xi \pmod{2}$ にしか (符号を除いて) 依存しないことを用いて、superconformal simple type 条件が満たされていることをチェックしました。

従って、Witten 予想が成立することになります。

参考文献

- [EGL] G. Ellingsrud, L. Göttsche, M. Lehn, *On the cobordism class of the Hilbert scheme of a surface*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), 81–100; arXiv:math.AG/9904095.
- [MMP] M. Marino, G. Moore and G. Peradze, *Superconformal invariance and the geography of four-manifolds*, Commun.Math.Phys. 205 (1999) 691-735; arXiv:hep-th/9812055.