日本数学会・２０１１年度年会（早稲田大学）・総合講演
2011年度日本数学会春季賞受賞記念講演
MSJMEETING-2011-03-00-01-0001

過収束アイソクリスタル

志甫　淳　(東京大学)*

1. 序

標数 $p>0$ の体上の代数多様体が与えられたとき，その上の過収束アイソクリスタルというある種の p 進微分方程式系が定義される．それは $\mathbb{C}$ 上の代数多様体上の可積分接続付加群 (本稿では ∇ 加群という) の概念の p 進類似であり，標数 $p\geq 0$ の体上の代数多様体上の smooth l 進層 (l は p と異なる素数) の概念の p 進類似とも思える．本稿では，過収束アイソクリスタルあるいはその局所版である p 進穴あき円板上の ∇ 加群に対して André, Christol, Mebkhout, Kedlaya らにより証明された結果および筆者による関連する結果について書く．

本稿を通じて，K を標数 0 の完備非アルキメデス的付置体，O_K を K の付置環，k を O_K の剰余体とし，k の標数は $p>0$ であるとする．また，$\overline{K}$ を K の代数的閉包とし，$|\cdot|:\overline{K}\longrightarrow\mathbb{R}_{\geq 0}$ を $|p|=p^{-1}$ なる乗法付置，$\Gamma:=|\overline{K}|$ とする．また，k 上の p 乗写像の持ち上げである環準同型 $\sigma:O_K\longrightarrow O_K$ があると仮定する．σ が誘導する体の準同型 $K\longrightarrow K$ も σ と書く．

2. 過収束アイソクリスタル，対数的収束アイソクリスタル

この節では K は完備離散付置体, k は完全体であると仮定する．$j:X\hookrightarrow\overline{X}$ を k 上の smooth な代数多様体の開埋め込みで $\overline{X}\setminus X=:Z=\bigcup_{i=1}^r Z_i$ が単純正規交叉因子となるものとする．すると局所的に $\overline{X}$ は O_K 上 smooth な affine p 進形式 scheme $\overline{\mathcal{X}}$ に持ち上がり，Z は $\overline{\mathcal{X}}$ の相対的単純正規交叉因子 $\mathcal{Z}=\bigcup_{i=1}^r\mathcal{Z}_i$ に持ちあがり，各 $\mathcal{Z}_i$ $(1\leq i\leq r)$ は $\overline{\mathcal{X}}$ 内で $\{t_i=0\}$ と定義されるとしてよい．また $\{t_i\}_{i=1}^r$ を含む $\overline{\mathcal{X}}$ の局所座標系 $\{t_i\}_{i=1}^d$ があるとしてよい．このとき $\mathcal{Z}=\bigcup_{i=1}^r\mathcal{Z}_i,\overline{\mathcal{X}}$ に対応する p 進解析空間 $\mathcal{Z}_K=\bigcup_{i=1}^r\mathcal{Z}_{i,K},\overline{\mathcal{X}}_K$ が定義される．$\lambda\in[0,1)\cap\Gamma$ に対して

$$\mathfrak{U}_\lambda:=\{x\in\overline{\mathcal{X}}_K\,|\,|t_i(x)|\geq\lambda \text{ for } 1\leq i\leq r\}$$

とおき，包含写像 $\mathfrak{U}_\lambda\hookrightarrow\overline{\mathcal{X}}_K$ を j_λ と書く．($\mathfrak{U}_0=\overline{\mathcal{X}}_K$ である.) $\mathfrak{U}_\lambda$ 上の層 $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}$ の過収束切断層と呼ばれる $\overline{\mathcal{X}}_K$ 上の層 $j^\dagger\mathcal{F}$ を $j^\dagger\mathcal{F}:=\varinjlim_{\lambda<\rho\to 1}j_{\rho,*}(\mathcal{F}|_{\mathfrak{U}_\rho})$ と定める．以上の記号の下で過収束アイソクリスタルおよび対数的収束アイソクリスタルの概念を次のように定義する．

定義 2.1. 記号を上の通りとする．

(1)　$\mathcal{E}:=(E,\nabla)$ が $(X,\overline{X})$ 上の過収束アイソクリスタルであるとは E が $\overline{\mathcal{X}}_K$ 上の有限階数局所自由 $j^\dagger\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_K}$ 加群，$\nabla:E\longrightarrow E\otimes_{j^\dagger\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_K}}j^\dagger\Omega^1_{\overline{\mathcal{X}}_K}$ が Leibniz rule, 可積分性を満たす加法的写像で，次の条件を満たすこと：ある $\mathfrak{U}_\lambda$ 上のある有限階数局所自由

本研究は科研費 (課題番号:21740003(代表者:志甫淳), 22340001(代表者:都築暢夫), 19204002(代表者:松本眞)) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 12H25, 14F35
キーワード：overconvergent isocrystal, p-adic differential equation
* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学 大学院数理科学研究科

加群 $\widetilde{E}$ と Leibniz rule, 可積分性を満たすある加法的写像 $\widetilde{\nabla} : \widetilde{E} \longrightarrow \widetilde{E} \otimes_{\mathfrak{U}_\lambda} \Omega^1_{\mathfrak{U}_\lambda}$ で $(E, \nabla) = j^\dagger(\widetilde{E}, \widetilde{\nabla})$ となるものに対し，過収束性

$$(2.1.1) \quad \forall \eta \in (0,1), \exists \rho \in [\lambda, 1), \forall e \in \Gamma(\mathfrak{U}_\rho, \widetilde{E}), \quad \left\| \frac{1}{i!} \partial^i(e) \right\| \eta^{|i|} \to 0 \ \ (i \in \mathbb{N}^d, |i| \to \infty)$$

(但し $\nabla = \sum_{j=1}^d \partial_j \mathrm{d}t_i$ とおくとき $i = (i_1, ..., i_d)$ に対して $\partial^i = \prod_{j=1}^d \partial_j^{i_j}$, $\|\cdot\|$ は $\Gamma(\mathfrak{U}_\rho, \widetilde{E})$ の標準的な位相を定めるある norm) が成り立つ．
(2)　$\mathcal{E} := (E, \nabla)$ が $(\overline{X}, Z)$ 上の対数的収束アイソクリスタルであるとは E が有限階数局所自由 $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_K}$ 加群，$\nabla : E \longrightarrow E \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_K}} \Omega^1_{\overline{\mathcal{X}}_K}(\log \mathcal{Z}_K)$ が Leibniz rule, 可積分性を満たし，かつある $E|_{\mathfrak{U}_\lambda}$ が過収束性 (2.1.1) (で $\widetilde{E}$ を $E|_{\mathfrak{U}_\lambda}$ に置き換えたもの) を満たすような加法的写像であること．
以下，$(X, \overline{X})$ 上の過収束アイソクリスタルの圏を $\mathrm{Isoc}^\dagger(X, \overline{X})$, $(\overline{X}, Z)$ 上の対数的収束アイソクリスタルの圏を $\mathrm{Isoc}^{\log}(\overline{X}, Z)$ と書く．また，$X = \overline{X}$ のときは $(X, \overline{X})$ 上の過収束アイソクリスタルのことを $\overline{X}$ 上の収束アイソクリスタルといい，それのなす圏を $\mathrm{Isoc}(\overline{X})$ と書く．

実は $(X, \overline{X})$ 上の過収束アイソクリスタルの圏および $(\overline{X}, Z)$ 上の対数的収束アイソクリスタルの圏は持ちあげ $\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{Z}$ のとりかたに依らないことがわかっている．そして，大域的な持ちあげがなくても，局所的な持ちあげを用いた定義を「貼り合わせる」ことによりこれらの圏を定義することができる．そしてその圏は $(X, \overline{X})/O_K$ に対して関手的である．なお，$(X, \overline{X})$ 上の過収束アイソクリスタルの圏は任意の k 上の代数多様体の開埋め込み $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ に対して定義できるが，本稿ではその定義は省く．

定義 2.1 の状況で，対数的収束アイソクリスタルを過収束アイソクリスタルへと制限する関手

$$j^\dagger : \mathrm{Isoc}^{\log}(\overline{X}, Z) \longrightarrow \mathrm{Isoc}^\dagger(X, \overline{X})$$

が定義されるが，過収束アイソクリスタルは必ずしも対数的収束アイソクリスタルには延びない．本稿では次のタイプの問題を考える．

問題 2.2. (1)　$(X, \overline{X})$ 上の過収束アイソクリスタルはいつ $(\overline{X}, Z)$ 上の対数的収束アイソクリスタルに延びるか？
(2)　与えられた過収束アイソクリスタル $\mathcal{E}$ に対して $(X, \overline{X})$ をうまく取り替えることにより，$\mathcal{E}$(の引き戻し) が対数的収束アイソクリスタルに延びるようにできるか？

3. 局所理論

この節では問題 2.2 の 1 次元局所版を考え，それに対する Christol-Mebkhout, André, Kedlaya, Mebkhout による結果について述べる．この節では，しばらくは K の付置は離散付置であるとは限らず，また k も完全体とは限らない．

$\lambda \in [0,1) \cap \Gamma$ に対して「半径 $[\lambda, 1)$ の 1 次元 p 進穴あき円板」$A^1_K[\lambda, 1)$ が p 進解析空間として定義される．$A^1_K[\lambda, 1)$ の「座標」を t とおく．$\mathcal{A}_K[\lambda, 1) := \Gamma(A^1_K[\lambda, 1), \mathcal{O}_{A^1_K[\lambda,1)})$ とおき，Robba 環 $\mathcal{R}$ を $\mathcal{R} := \varinjlim_{\lambda \to 1^-} \mathcal{A}_K[\lambda, 1)$ と定める．$\mathcal{R}$ または $\mathcal{A}_K[\lambda, 1)$ 上の ∇ 加群および $\mathcal{A}_K[0,1)$ 上の対数的 ∇ 加群を次のように定義する．

定義 3.1. (1)　(E,∇) が $\mathcal{R}$(resp. $\mathcal{A}_K[\lambda,1)$) 上の ∇ 加群であるとは E が有限階数自由 $\mathcal{R}$(resp. $\mathcal{A}_K[\lambda,1)$) 加群，$\nabla : E \longrightarrow E\mathrm{d}t$ が Leibniz rule を満たす加法的写像であること．
(2)　(E,∇) が $\mathcal{A}_K[0,1)$ 上の対数的 ∇ 加群であるとは E が有限階数自由 $\mathcal{A}_K[0,1)$ 加群，$\nabla : E \longrightarrow E\mathrm{dlog}\,t$ が Leibniz rule を満たす加法的写像であること．

p 進穴あき円板上の (対数的)∇ 加群に対する問題 2.2 の類似は次のようになる．

問題 3.2. (1)　$\mathcal{R}$ 上の ∇ 加群はいつ $\mathcal{A}_K[0,1)$ 上の対数的 ∇ 加群に延びるか？
(2)　与えられた $\mathcal{R}$ 上の ∇ 加群 (E,∇) に対して円板 $A^1_K[0,1)$ をうまく取り替えることにより，$\mathcal{E}$(の引き戻し) が $\mathcal{A}_{K'}[0,1)$(K' は K のある有限次拡大) 上の対数的 ∇ 加群に延びるようにできるか？

上記の問題に答える準備をする．(E,∇) を $\mathcal{R}$ 上の ∇ 加群とすると，これはある $\mathcal{A}_K[\lambda,1)$ 上の ∇ 加群として定義されている．(同じ記号 (E,∇) で表わすことにする.) $\rho \in [\lambda,1)$ に対して $K(t)_\rho$ を $K(t)$ の ρ-Gauss norm ($|\sum_n a_n t^n|_\rho = \max_n |a_n|\rho^n$ を満たす norm $|\cdot|_\rho$ のこと) による完備化とすると環の射 $\mathcal{A}_K[\lambda,1) \longrightarrow K(t)_\rho$ があるので $E_\rho := E \otimes_{\mathcal{A}_K[\lambda,1)} K(t)_\rho$ とおくと自然に

$$\partial_\rho : E_\rho \xrightarrow{\nabla\text{ から決まる射}} E_\rho \mathrm{dt} \xrightarrow{=} E_\rho$$

が定まる．E_ρ の基底を一つとり，それに関する ∂_ρ^n の行列表示を G_n とおく ($n \in \mathbb{N}$)．そして (E,∇) の半径 ρ での intrinsic generic 収束半径 $\mathrm{IR}(E,\rho)$ を

$$\mathrm{IR}(E,\rho) := \min(1, \rho^{-1} \varliminf_{n\to\infty} |G_n/n!|_\rho^{-1/n})$$

と定義する．(行列の norm はその成分の norm の max とする.) $\lim_{\rho\to 1} \mathrm{IR}(E,\rho) = 1$ のとき (E,∇) は solvable であるという．また (E,∇) が solvable のとき，1 に充分近い ρ に対して $\mathrm{IR}(E,\rho) = \rho^b$ を満たす $b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ が一意的に存在することがわかる．この b を (E,∇) の slope という．実は solvability こそが前節における過収束性の局所版である．(正確に対応していることは松田-Trihan[23] による.) また，slope に関しては次の slope 分解定理が知られている ([5], [22] も参照).

定理 3.3 (slope 分解定理, Christol-Mebkhout)**.** (E,∇) を $\mathcal{R}$ 上の solvable な ∇ 加群とすると分解 $(E,\nabla) = \bigoplus_{s\in\mathbb{Q}_{\geq 0}} (E_s,\nabla_s)$ で各 (E_s,∇_s) の任意の部分商が slope s となるようなものが存在する．

また「slope $= 0$」という条件が問題 3.2(1) の延長可能性の答えに近いのであるが，実は技術的な都合で，もう少し条件が必要である．次の補助的な定義をする．

定義 3.4. (1)　$a \in \mathbb{Z}_p$ が p 進非 Liouville 数であるとは級数 $\sum_{s\geq 1,\neq a} \dfrac{x^s}{s-a}, \sum_{s\geq 1,\neq -a} \dfrac{x^s}{s+a}$ の p 進での収束半径が共に 1 であること．
(2)　$\Sigma \subseteq \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ が (NLD) であるとは任意の Σ の 2 元の $\mathbb{Z}_p$ への持ち上げ a, b に対して $a-b$ が p 進非 Liouville 数であること．

なお，$a \in \mathbb{Z}_p$ が代数的数ならば a は p 進非 Liouville 数であり，一方 $a = \sum_{n\geq 1} p^{f(n)}$ を $f(1) = 1, f(n+1) = p^{f(n)}$ により定めるとこの a は p 進 Liouville 数である．また，次のように Σ 冪単性の概念を定める．(あとの都合上，Σ 半単純性の定義もする.)

定義 3.5. $\Sigma \subseteq \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ とする．$\mathcal{R}$ 上の ∇ 加群 (E, ∇) が Σ 冪単 (resp. Σ 半単純) であるとは，(E, ∇) が $(\mathcal{R}, d + \alpha \mathrm{dlog}\, t)$ (α は $\alpha \bmod \mathbb{Z} \in \Sigma$ なる元) の形の ∇ 加群の拡大のくり返し (resp. 直和) で書けること．$\Sigma = 0$ のときは単に冪単 (resp. 定数) であるという．

Christol-Mebkhout, Dwork は，slope $= 0$ の $\mathcal{R}$ 上の階数 μ の ∇ 加群 (E, ∇) に対して，その p 進 exponent $\mathrm{Exp}(E)$ を $(\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z})^\mu / \overset{e}{\sim}$ の元として定義した ([4], [11], [7])．但しここで $\overset{e}{\sim}$ はある複雑な同値関係であり，ここでは説明しない．($\mathrm{Exp}(E)$ の定義も説明しない．p 進穴あき円板の穴の回りを 1 周したときの monodromy の固有値の $\frac{1}{2\pi i}\log$ のような量である.) 以上の準備の下で，Christol-Mebkhout([4], [7], [22] も参照) による問題 3.2(1) に対する解答 (充分条件) は次のようになる (最後の主張は Ext の計算による)：

定理 3.6 (p 進 Fuchs 定理，Christol-Mebkhout)．$\mu \in \mathbb{N}$，$\Sigma \subseteq \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ を (NLD) な集合とし，$\overline{\Sigma} := \mathrm{Im}(\Sigma^\mu \hookrightarrow (\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z})^\mu \longrightarrow (\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z})^\mu / \overset{e}{\sim})$ とおく．(E, ∇) を階数 μ の $\mathcal{R}$ 上の ∇ 加群で slope $= 0$ かつ $\mathrm{Exp}(E) \in \overline{\Sigma}$ であるとする．このとき (E, ∇) は Σ 冪単である．特に (E, ∇) は $\mathcal{A}_K[0, 1)$ 上の対数的 ∇ 加群に延びる．

次に問題 3.2(2) を考える．以下では K は完備離散付置環であるとし，また k は完全体であるとする．σ の延長である環準同型 $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ を $\varphi(t) = t^p$ により定義する．$\mathcal{R}$ 上の ∇ 加群 (E, ∇) が Frobenius 構造をもつとはある $h \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{R} \otimes_{\varphi^h, \mathcal{R}} (E, \nabla)$ が (E, ∇) と同型になることとする．

さて，実は $k((t))$ の有限次分離拡大 $\mathbf{k}$ があると，それに対応して $\mathcal{R}$ の有限拡大が定義でき，それは再び (ある K の有限次拡大 K' を係数とする)Robba 環となる．それを $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ と書くことにする．すると André[1], Mebkhout[24], Kedlaya[15] により独立に証明された次の定理が問題 3.2(2) に対する一つの解答を与える ([22] も参照)：

定理 3.7 (p 進局所 monodromy 定理，André, Mebkhout, Kedlaya)．(E, ∇) を Frobenius 構造をもつ $\mathcal{R}$ 上の ∇ 加群とするとある $k((t))$ の有限次分離拡大 $\mathbf{k}$ に対し，(E, ∇) の $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ への引き戻しは冪単になる．(特にそれは $\mathcal{A}_{K'}[0, 1)$ 上の対数的 ∇ 加群に延びる.)

定理 3.7 の証明について一言述べる ([8] 参照)．André の証明は $\mathcal{R}(\mathbf{k}) \otimes_{K'} \overline{K}$ 上の Frobenius 構造をもつ ∇ 加群の圏 $\mathrm{MCF}(\mathcal{R}(\mathbf{k}) \otimes_{K'} \overline{K})$ (これは $\mathbf{k}$ で添字づけされた淡中圏の族になる) についてのいくつかの性質 (定理 3.3 など) を仮定して，代数群の考察により淡中圏 $\mathrm{MCF}(\mathcal{R} \otimes_K \overline{K})$ の双対の pro 代数群を決定するという論法である．仮定する大事な性質の 1 つが定理 3.6 の $\mathrm{Exp}(E) = 0$ の場合であること，また Crew[10], 都築 [33] による部分的結果を使うことを注意しておく．また，Mebkhout の証明は既約な (E, ∇) に対して $\mathbf{k}$ と K' の有限次拡大 K'' をうまくとって適切に別の具体的な階数 1 の ∇ 加群とのテンソルをとることにより $\mathcal{R}(\mathbf{k}) \otimes_{K'} K''$ 上で可約または冪単にしていく．(実際には完全既約性という概念と $(E, \nabla)^\vee \otimes (E, \nabla)$ に対する考察も必要である.) やはり定理 3.3，定理 3.6 の $\mathrm{Exp}(E) = 0$ の場合および上述の Crew, 都築による結果を使う．Kedlaya の証明は $\mathcal{R}$ 上の Frobenius 構造を持つ加群 (∇ なし) に対する構造定理が鍵

となり，それを用いて上述の都築の結果に帰着することにより証明がなされる．なお，Mebkhout は強い p 進 non-Liouville 的条件を満たす $\mathcal{R}$ 上の ∇ 加群に対してある $\mathbf{k}$ に対する $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ への引き戻しが Σ 冪単 (ただし $\Sigma = \{p$ 進 non-Liouville 数$\}/\mathbb{Z}$) になることも示している．

4. 半安定還元予想

この節では K は完備離散付置体, k は完全体であると仮定する．$j : X \hookrightarrow \overline{X}$ を k 上の代数多様体の開埋め込みとする．前節の定理3.7を高次元大域化して考えてみると，$(X, \overline{X})$ 上の過収束アイソクリスタル $\mathcal{E}$ が「Frobenius 構造」を持てば問題2.2(2)は肯定的に解けるのではないかと期待される．

以下，p のある冪 $q := p^f$ を固定し $k \supseteq \mathbb{F}_q$ とする．$F : (X, \overline{X}) \longrightarrow (X, \overline{X})$ を Frobenius 写像 (q 乗写像) とすると，これは $(\sigma^f)^* : \mathrm{Spf}\, O_K \longrightarrow \mathrm{Spf}\, O_K$ 上の写像となり，よって過収束アイソクリスタルまたは対数的収束アイソクリスタル $\mathcal{E}$ に対して F による引き戻し $F^*\mathcal{E}$ が定義される．これを用いて過収束 F アイソクリスタルの概念を次のように定義する．

定義 4.1. 記号を上の通りとする．$(X, \overline{X})$ 上の過収束 F アイソクリスタルとは $(X, \overline{X})$ 上の過収束アイソクリスタル $\mathcal{E}$ と同型 $\Psi : F^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ の組 $(\mathcal{E}, \Psi)$ のこと．$(X, \overline{X})$ 上の過収束 F アイソクリスタルの圏を $F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X, \overline{X})$ と書く．

過収束 F アイソクリスタルに対する正確な問題2.2(2)の定式化として次の予想が筆者[27]によりなされた([18]も参照).

予想 4.2 (過収束 F アイソクリスタルの半安定還元予想)**.** $\mathcal{E}$ を $(X, \overline{X})$ 上の過収束 F アイソクリスタルとすると，ある alteration (proper surjective generically etale 射) $f : (X', \overline{X}') \longrightarrow (X, \overline{X})$ で $\overline{X}'$ は smooth, $\overline{X}' \setminus X'$ は $\overline{X}'$ の単純正規交叉因子でかつ $f^*\mathcal{E}$ が $(\overline{X}', Z')$ 上の対数的収束アイソクリスタルに延びる (ここで $Z' := \overline{X}' \setminus X'$) ようなものが存在する．

$\mathcal{E}$ が $(X, \overline{X})$ 上の自明な過収束 F アイソクリスタルのときは予想4.2は de Jong[12] の定理となる．$\dim X = 1$ のときは前節の定理3.7を用いて Kedlaya[14] により次が示された．(但し後半の部分は松田-Trihan[23] による.)

定理 4.3. $\dim X = 1$ のとき予想4.2は正しい．更に f は $f|_{X'}$ が finite etale 射となるようにとれる．

筆者は[27]において，予想4.2を仮定した上で過収束 F アイソクリスタルを係数とする rigid cohomology の有限性を証明した．但し過収束 F アイソクリスタルを係数とする rigid cohomology の有限性はその後に Kedlaya[16] により予想4.2を使わずに証明されている: 定理3.7を相対化したものを証明し，うまく相対的次元が1の場合に帰着できるのである．

予想4.2は unit-root 性 (定義は後述，定理5.6の前を参照) を満たす過収束 F アイソクリスタルの場合には都築[34]により解かれていた．そして，最近 Kedlaya([18], [19], [20], [21]) により予想4.2が一般に証明された：

定理 4.4 (Kedlaya)**.** 予想4.2は正しい.

定理4.4の証明の道筋を説明する．まず定理3.7の証明には定理3.6の $\mathrm{Exp}(E) = 0$ の場合が出発点として重要であったことを思いだそう．同じように，定理4.4の証明の出発点は定理3.6 の特別な場合を高次元大域化する定理，つまり問題2.2(1)の特別な場合である．それを説明する．$j : X \hookrightarrow \overline{X}$ を k 上のsmoothな代数多様体の開埋め込みで $\overline{X} \setminus X =: Z = \bigcup_{i=1}^r Z_i$ が単純正規交叉因子となるものとする．すると各 Z_i の生成点のまわりで $\mathcal{Z}_{i,K}$ の $\overline{\mathcal{X}}_K$ 内の管状近傍 $\mathcal{Z}_{i,K} \times A^1_K[0,1) \subseteq \overline{\mathcal{X}}_K$ がとれる．$L_i := (\mathrm{Frac}\,\Gamma(\mathcal{Z}_{i,K}, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_{i,K}}))^\wedge$ ($\wedge$はsup normによる完備化)とし，$\mathcal{R}_i$ を L_i を係数体とするRobba環とする．すると $(X, \overline{X})$ 上の過収束アイソクリスタル $\mathcal{E} := (E, \nabla)$ は「$\mathcal{Z}_{i,K}$ のgeneric pointの周りへの制限」により $\mathcal{R}_i$ 上の ∇ 加群 (E_i, ∇_i) を定める．以上の準備の下で以下のように冪単monodromy, 定数monodromyの概念を定義する．

定義 4.5. $(X, \overline{X})$ 上の過収束アイソクリスタル $\mathcal{E} := (E, \nabla)$ が冪単monodromy (resp. 定数monodromy)をもつとは, 各 $1 \leq i \leq r$ に対して (E_i, ∇_i) が冪単(resp. 定数)であること．(冪単性は (E_i, ∇_i) のslope$= 0$でかつ $\mathrm{Exp}(E_i) = 0$ であることと同値なのでそう述べてもよい.)

次に対数的収束アイソクリスタルのexponentを定義する．$j : X \hookrightarrow \overline{X}, Z = \bigcup_{i=1}^r Z_i$, $\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{Z} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{Z}_i$ を定義2.1の前の通りとすると，$(\overline{X}, Z)$ 上の対数的収束アイソクリスタル $\mathcal{E} := (E, \nabla)$ に対し各 $\mathcal{Z}_{i,K}$ に沿ったresidue res_i と呼ばれる $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_{i,K}}}(E|_{\mathcal{Z}_{i,K}})$ の元が定まり，またある多項式 $0 \neq P_i(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ により $P_i(\mathrm{res}_i) = 0$ となることが証明できる．res_i の最小多項式 $\in \mathbb{Z}_p[x]$ の根たちを (E, ∇) の $\mathcal{Z}_{i,K}$ に沿ったexponentと呼ぶ．これを用いて以下のような定義をする．

定義 4.6. $\Sigma = \prod_{i=1}^r \Sigma_i \subseteq \mathbb{Z}_p^r$ とする．$(\overline{X}, Z)$ 上の対数的収束アイソクリスタル $\mathcal{E} := (E, \nabla)$ が冪零residueであるとは，各 $1 \leq i \leq r$ に対して (E, ∇) の $\mathcal{Z}_{i,K}$ に沿ったexponent達が0であること．

以上の準備の下でKedlaya[18]は $(X, \overline{X})$ 上の冪単(定数)monodromyをもつ過収束アイソクリスタルの(対数的)収束クリスタルへの延長可能性について次の定理を証明した．

定理 4.7. $X, \overline{X}, Z$ を上の通りとするとき次の圏同値がある．

$$j^\dagger : \begin{pmatrix} \mathcal{E} \in \mathrm{Isoc}^{\log}(\overline{X}, Z) \\ \text{冪零 residue} \end{pmatrix} \xrightarrow{=} \begin{pmatrix} \mathcal{E} \in \mathrm{Isoc}^\dagger(X, \overline{X}) \\ \text{冪単 monodromy} \end{pmatrix}. \tag{4.7.1}$$

$$j^\dagger : \mathrm{Isoc}(\overline{X}) \xrightarrow{=} \begin{pmatrix} \mathcal{E} \in \mathrm{Isoc}^\dagger(X, \overline{X}) \\ \text{定数 monodromy} \end{pmatrix}. \tag{4.7.2}$$

また(4.7.2)(のより一般的なヴァージョン)の系として次の純性定理を示した．

定理 4.8. $X \hookrightarrow \overline{X}$ を連結な代数多様体の開埋め込みで X はsmoothとし，また $Y \subseteq X$ を余次元2以上の閉部分多様体とする．このとき制限関手 $\mathrm{Isoc}^\dagger(X, \overline{X}) \longrightarrow \mathrm{Isoc}^\dagger(X \setminus Y, \overline{X})$ は圏同値である．

定理4.4の証明の説明に戻る．定理4.4の証明にはvaluation theoryを用いる．つまり過収束アイソクリスタル$\mathcal{E}$が与えられたとき，Xの関数体$k(X)$の各付置vに対してその付置の中心の近傍において予想4.2の主張を証明する．論文[18]の主定理である定理4.7の圏同値(4.7.1)は付置が高さ1の離散付置の場合に当たる．そして論文[19]においては一般の付置の場合を高さ1で剰余体$= k = \overline{k}$の付置の場合に帰着している．論文[20]では更に付置vの像$\otimes\mathbb{Q}$の次元rが最大の時を扱い(ここで定理3.7の変種[17]も用いる)，最後に論文[21]でrを帰納法で下げて一般の場合を扱う．

定理4.4は相対的なp進コホモロジー理論への応用を持つ：筆者[30]は代数多様体の開埋め込みの射$f : (X, \overline{X}) \longrightarrow (Y, \overline{Y})$で$\overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$がproperなものが与えられた時，$(X, \overline{X})$上の過収束$F$アイソクリスタルを係数とする相対的リジッドコホモロジーがYの稠密なある開集合Uに対してある意味で$(U, \overline{Y})$上の過収束Fアイソクリスタルを定めることを定理4.4を用いて示した．また，Caro-都築[2]はやはり定理4.4を用いてk上のsmoothな代数多様体上のoverholonomic F-$\mathcal{D}^{\dagger}$加群という数論的D加群の導来圏がGrothendieckの6つの関手で閉じていることを示した．de Jongの定理が数論幾何に進展をもたらしたようにKedlayaの定理4.4もp進数論幾何に進展をもたらしていると言える．

5. 対数的延長可能性，純性定理など

記号は前節の通りとする．この節では前節までの話と関連した筆者の結果についていくつか述べる．

半安定還元予想の証明の出発点であった定理4.7は定理3.6の$\mathrm{Exp}(E) = 0$の場合を高次元大域化する結果であったが，$\mathrm{Exp}(E) = 0$の条件を外した場合の高次元大域化が筆者により証明された．まずそれについて説明する．

$j : X \hookrightarrow \overline{X}$を$k$上のsmoothな代数多様体の開埋め込みで$\overline{X} \setminus X =: Z = \bigcup_{i=1}^{r} Z_i$が単純正規交叉因子となるものとする．すると各$Z_i$の生成点のまわりでRobba環$\mathcal{R}_i$が定義され，$(X, \overline{X})$上の過収束アイソクリスタル$\mathcal{E} := (E, \nabla)$は「$\mathcal{Z}_{i,K}$のgeneric pointの周りへの制限」により$\mathcal{R}_i$上の∇加群(E_i, ∇_i)を定めるのであった．まず定義4.5の拡張としてΣ冪単monodromy, Σ半単純monodromyの概念を定義する．以下$\Sigma = \prod_{i=1}^{r} \Sigma_i \subseteq \mathbb{Z}_p^r/\mathbb{Z}^r$に対して各$\Sigma_i$が(NLD)のとき$\Sigma$は(NLD)であると言うことにする．

定義 5.1. $\Sigma = \prod_{i=1}^{r} \Sigma_i \subseteq \mathbb{Z}_p^r/\mathbb{Z}^r$を(NLD)な集合とする．$(X, \overline{X})$上の過収束アイソクリスタル$(E, \nabla)$が$\Sigma$冪単monodromy (resp. Σ半単純monodromy)をもつとは，各$1 \leq i \leq r$に対して(E_i, ∇_i)がΣ_i冪単(resp. Σ_i半単純)であること．(Σ_i冪単性は(E_i, ∇_i)のslope$= 0$でかつ$\mathrm{Exp}(E_i) \in \overline{\Sigma_i}$(ただし$\overline{}$は定理3.6の通り)であることと同値なのでそう述べてもよい.)

また，対数的収束アイソクリスタルのexponentに対して次の定義をする．

定義 5.2. $\Sigma = \prod_{i=1}^{r} \Sigma_i \subseteq \mathbb{Z}_p^r$とする．$(\overline{X}, Z)$上の対数的収束アイソクリスタル$(E, \nabla)$がexponent$\in \Sigma$であるとは，各$1 \leq i \leq r$に対して$(E, \nabla)$の$\mathcal{Z}_{i,K}$に沿ったexponent達が$\Sigma_i$に属すること．またresidueが半単純であるとは各$1 \leq i \leq r$に対して(E, ∇)の$\mathcal{Z}_{i,K}$に沿ったresidueが半単純であること．

以上の準備の下で，$(X,\overline{X})$ 上の Σ 冪単 monodromy をもつ過収束アイソクリスタルの対数的収束アイソクリスタルへの延長可能性について次の定理を証明した ([28], [32]). これは定理 4.7 の一般化，定理 3.6 を高次元大域化する定理であり，問題 2.2(1) の解答 (充分条件) を与えている．

定理 5.3. $X,\overline{X},Z$ を上の通りとし，$\Sigma = \prod_{i=1}^{r}\Sigma_i \subseteq \mathbb{Z}_p^r/\mathbb{Z}^r$ を (NLD) な集合，$\tau = \prod_{i=1}^{r}\tau_i : \mathbb{Z}_p^r/\mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{Z}_p^r$ を自然な射影 $\mathbb{Z}_p^r \longrightarrow \mathbb{Z}_p^r/\mathbb{Z}^r$ の section とするとき次の圏同値がある．

$$j^\dagger : \begin{pmatrix} \mathcal{E} \in \mathrm{Isoc}^{\log}(\overline{X},Z) \\ \text{exponent} \in \tau(\Sigma) \end{pmatrix} \xrightarrow{=} \begin{pmatrix} \mathcal{E} \in \mathrm{Isoc}^{\dagger}(X,\overline{X}) \\ \Sigma\text{ 冪単 monodromy} \end{pmatrix}. \tag{5.3.1}$$

$$j^\dagger : \begin{pmatrix} \mathcal{E} \in \mathrm{Isoc}^{\log}(\overline{X},Z) \\ \text{exponent} \in \tau(\Sigma) \\ \text{residue が半単純} \end{pmatrix} \xrightarrow{=} \begin{pmatrix} \mathcal{E} \in \mathrm{Isoc}^{\dagger}(X,\overline{X}) \\ \Sigma\text{ 半単純 monodromy} \end{pmatrix}. \tag{5.3.2}$$

証明は定理 4.7 の証明を適宜修正，一般化すればよいが，途中の一部の計算は更に複雑になる．定理 5.3 を出発点として Frobenius 構造がない時への半安定還元予想 4.2 の一般化ができることが期待される．なお，$\overline{X}$ がある種の正規交叉 log 多様体の場合に，(5.3.1) に相当する結果が di Proietto[26] により得られている．

また，Σ 冪単 monodromy という性質に関して，次の「曲線切断による判定条件」を証明した [29]．(これも上の定理を通じて問題 2.2(1) に関連していると言える.)

定理 5.4. k が非可算であると仮定する．$X,\overline{X},Z$ を上の通りとし，$\Sigma = \prod_{i=1}^{r}\Sigma_i \subseteq \mathbb{Z}_p^r/\mathbb{Z}^r$ を (NLD) な集合とする．このとき $(X,\overline{X})$ 上の過収束アイソクリスタル $\mathcal{E} := (E,\nabla)$ に対して次は同値.

(1)　$\mathcal{E}$ は Σ 冪単 monodromy をもつ.

(2)　任意の曲線からの局所閉埋め込み $\overline{C} \hookrightarrow \overline{X}$ で Z と横断的に 1 点で交わるものに対し，$\mathcal{E}|_{(C,\overline{C})}$ (ここで $C := X \cap \overline{C}$) は $(C,\overline{C})$ 上の過収束アイソクリスタルとして Σ_i 冪単 monodromy をもつ (ここで i は $\overline{C} \cap Z \subseteq Z_i$ なる添え字).

証明の方針を述べる．$\mathcal{E} = (E,\nabla)$ は前述したように各 Robba 環 $\mathcal{R}_i$ 上の ∇ 加群 (E_i,∇_i) を定めるが，一方，上記の曲線切断 $\overline{C} \hookrightarrow \overline{X}$ に対する $\overline{C} \cap Z$ の周りでの Robba 環上の ∇ 加群 $(E_{\overline{C}},\nabla_{\overline{C}})$ も定める．(E_i,∇_i) の slope および p 進 exponent が充分多くの $\overline{C} \cap Z \subseteq Z_i$ なる曲線切断 $\overline{C} \hookrightarrow \overline{X}$ に対する $(E_{\overline{C}},\nabla_{\overline{C}})$ の slope および p 進 exponent と一致することを slope，p 進 exponent の定義に戻ってうまく確かめることにより証明がなされる．

また，純性定理 (定理 4.8) の変種について述べる．定理 4.8 は $(X,\overline{X})$ の X の方に対する純性定理であるが，$\overline{X}$ の方 (過収束域) に対してはどうなるかという問題が考えられる．次の定理 [31] は Frobenius 構造付きで考えた場合，良い状況では $\overline{X}$ に対しても純性が成り立つことを示している．

定理 5.5. $X \hookrightarrow \overline{X}$ を連結 smooth な代数多様体の開埋め込みで $\overline{X} \setminus X$ は単純正規交叉因子であるとし，また $\overline{Y} \subseteq Y \subseteq \overline{X}$ を余次元 2 以上の閉部分多様体とする．このとき制限関手 $F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X,\overline{X}) \longrightarrow F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X \setminus Y, \overline{X} \setminus \overline{Y})$ は圏同値である．

これの証明はうまく $\overline{X}=\mathbb{A}^d_k, X=\mathbb{G}^a_{m,k}\times\mathbb{A}^{d-a}_k\,(0\le a\le d)$ のときに帰着し，この場合は弱完備有限生成代数の性質を用いて示すことによりなされる．

定理5.5の応用を一つ示す．$X\hookrightarrow\overline{X}$ を定理5.5の通り，$\overline{X}\setminus X=:Z=\bigcup_{i=1}^r Z_i$ とする．$\pi_1(X)$ の p 進表現 V が有限局所monodromyをもつとは各 Z_i の生成点に対応する付置 v_i による $k(X)$ の完備化 $k(X)_{v_i}$ の惰性群の V への作用が有限商を経由することとする．一方，$(X,\overline{X})$ 上の過収束 F アイソクリスタル $(\mathcal{E},\Psi)$ が与えられた時，X の閉点 x に対して x への引き戻し $x^*(\mathcal{E},\Psi)$ は σ^f 半線形同型つきの有限次元線形空間となるが，それのNewton polygonがどの x に対しても傾き0の直線となるとき $(\mathcal{E},\Psi)$ はunit-rootであるという．このとき次が言える[31].

定理 5.6. $X\hookrightarrow\overline{X}$ を上の通りとする．このとき次の圏同値がある．

$$\begin{pmatrix}\pi_1(X)\text{ の }K^\sigma\text{ 上の}\\ p\text{ 進表現，有限局所monodromy}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}(X,\overline{X})\text{ 上のunit-root}\\ \text{過収束 }F\text{ アイソクリスタル}\end{pmatrix}. \tag{5.6.1}$$

これは1次元の時は都築[33]による定理であり，高次元の場合も都築の結果[34]が重要な部分であるが，余次元 ≥ 2 の所の技術的部分の処理に定理5.5を用いる．

定理5.3, 5.6に関連した結果をもう一つ紹介する．そのために，$(\overline{X},Z)$ 上のadjusted parabolic対数的収束アイソクリスタルを，$(\overline{X},Z)$ 上の対数的収束アイソクリスタルの帰納系 $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^r_{(p)}}:=(E_\alpha,\nabla_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^r_{(p)}}$ で次の条件を満たすものとして定義する．

- $e_i\,(1\le i\le r)$ を $\mathbb{N}^r$ の自然な基底とするとき自然な同型 $(\mathcal{E}_{\alpha+e_i})_\alpha\cong(\mathcal{E}_\alpha(Z_i))_\alpha$ がある．(ただし $\mathcal{E}_\alpha(Z_i)$ は局所的に $(E_\alpha,\nabla_\alpha)\otimes(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_K}(\mathcal{Z}_{i,K}),\mathrm{d})$ として定義される対数的収束アイソクリスタル.)
- ある自然数 n に対してtransition maps $\mathcal{E}_{[n\alpha]/n}\longrightarrow\mathcal{E}_\alpha$ は同型.
- (Adjusted) $\forall\alpha=(\alpha_i)_i\in\mathbb{Z}^r_{(p)}$ に対して $\mathcal{E}_\alpha$ のexponent$\in\prod_{i=1}^r([-\alpha_i,-\alpha_i+1)\cap\mathbb{Z}_{(p)})$.

また，$(\overline{X},Z)$ 上の adjusted parabolic 対数的収束 F アイソクリスタルを，adjusted parabolic対数的収束アイソクリスタル $(\mathcal{E}_\alpha)_\alpha$ とind-objectとしての同型 $\Psi:\varinjlim F^*\mathcal{E}_\alpha\xrightarrow{=}\varinjlim\mathcal{E}_\alpha$ の組 $((\mathcal{E}_\alpha)_\alpha,\Psi)$ として定義する．

また，$(\overline{X},Z)$ 上のadjusted parabolic対数的収束 F アイソクリスタル $\mathcal{E}:=((\mathcal{E}_\alpha)_\alpha,\Psi)\neq 0$ に対して，X の閉点 x への $\mathcal{E}$ の制限 (σ^f 半線形同型つきの線形空間) の Newton polygon のendpointと原点を結ぶ直線の傾きは x の取りかたに依らないので，これを $\mu(\mathcal{E})$ とおく．そして $\mathcal{E}$ がgenerically semistable (gss)であるという概念を「任意の空でない開部分多様体 $U\subseteq X$ と任意の $0\neq\mathcal{E}'\subseteq\mathcal{E}|_U$ に対して $\mu(\mathcal{E}')\ge\mu(\mathcal{E})$」という条件により定義する．以上の設定の下で，次の定理が言える[32].

定理 5.7. $X,\overline{X},Z$ を上の通りとし，また $\pi_1^t(X)$ を各 Z_i の生成点に対応する付置 $v_i\,(1\le i\le r)$ に関する X のtame基本群とするとき，次の圏同値がある．

$$\begin{pmatrix}\pi_1^t(X)\text{ の}\\ K^\sigma\text{ 上の }p\text{ 進表現}\end{pmatrix}\xrightarrow{=}\begin{pmatrix}(\overline{X},Z)\text{ 上のadjusted parabolic}\\ \text{対数的収束 }F\text{ アイソクリスタル}\\ \text{generically semistable, }\mu=0\end{pmatrix}. \tag{5.7.1}$$

証明は定理 5.6 の圏同値で $\pi_1^t(X)$ の p 進表現が $(\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z})^r$ 半単純 monodromy をもつ unit-root 過収束 F アイソクリスタルと対応することに注意し，それに対して定理 5.3 をいろいろな τ について用いて対数的収束 F アイソクリスタルにいろいろ延長して adjusted parabolic 対数的収束 F アイソクリスタルを構成し，unit-root 性と residue の半単純性を gss および $\mu = 0$ の条件に書き直せばよい．この結果は Mehta-Seshadri[25] による $\mathbb{C}$ 上の双曲的代数曲線の基本群の unitary 表現と polystable parabolic vector bundle との対応の類似として Weng[35] により予想されているものの一つの形である．

参考文献

[1] Y. André, Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, Invent. Math. 148(2002), no. 2, 285–317.

[2] D. Caro and N. Tsuzuki, Overholonomicity of overconvergent F-isocrystals over smooth varieties, arXiv:0803.2105v1.

[3] G. Christol and Z. Mebkhout, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques I, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43(1993), no. 5, 1545–1574.

[4] G. Christol and Z. Mebkhout, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II, Ann. of Math. (2) 146(1997), no. 2, 345–410.

[5] G. Christol and Z. Mebkhout, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III, Ann. of Math. (2) 151(2000), no. 2, 385–457.

[6] G. Christol and Z. Mebkhout, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques IV, Invent. Math. 143(2001), no. 3, 629–672.

[7] G. Christol and Z. Mebkhout, Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes, Astérisque No. 279(2002), 125–183.

[8] P. Colmez, Les conjectures de monodromie p-adiques, Séminaire Bourbaki, Astérisque No. 290(2003), 53–101.

[9] R. Crew, Specialization of crystalline cohomology, Duke Math. J. 53(1986), no. 3, 749?757.

[10] R. Crew, F-isocrystals and p-adic representations, Proc. Sympos. Pure Math. 46, Part 2 (1987), 111–138.

[11] B. Dwork, On exponents of p-adic differential modules, J. Reine Angew. Math. 484(1997), 85–126.

[12] A. J. de Jong, Smoothness, semi-stability and alterations, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 83(1996), 51–93.

[13] N. M. Katz, Slope filtration of F-crystals, Astérisque, 63(1979), 113–163.

[14] K. S. Kedlaya, Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals on a curve, Math. Res. Lett. 10(2003), no. 2-3, 151–159.

[15] K. S. Kedlaya, A p-adic local monodromy theorem, Ann. of Math. (2) 160(2004), no. 1, 93–184.

[16] K. S. Kedlaya, Finiteness of rigid cohomology with coefficients, Duke Math. J. 134(2006), no. 1, 15–97.

[17] K. S. Kedlaya, The p-adic local monodromy theorem for fake annuli, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 118(2007), 101–146.

[18] K. S. Kedlaya, Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals I: Unipotence and

logarithmic extensions, Compos. Math. 143(2007), no. 5, 1164–1212.

[19] K. S. Kedlaya, Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals II: A valuation-theoretic approach, Compos. Math. 144(2008), no. 3, 657?672.

[20] K. S. Kedlaya, Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals III: Local semistable reduction at monomial valuations, Compos. Math. 145(2009), no. 1, 143–172.

[21] K. S. Kedlaya, Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals IV: Local semistable reduction at nonmonomial valuations, arXiv:0712.3400v4, to appear in Compos. Math.

[22] K. S. Kedlaya, p-adic Differential Equations, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 125, Cambridge Univ. Press, 2010.

[23] S. Matsuda and F. Trihan, Image directe supérieure et unipotence, J. Reine Angew. Math. 569(2004), 47–54.

[24] Z. Mebkhout, Analogue p-adique du théorme de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique. Invent. Math. 148(2002), no. 2, 319–351.

[25] V. B. Mehta and C. S. Seshadri, Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures, Math. Ann. 248(1980), no. 3, 205–239.

[26] V. di Proietto, On p-adic differential equations on semistable varieties, arXiv:1003.3994v2.

[27] A. Shiho, Crystalline fundamental groups II — Log convergent cohomology and rigid cohomology, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 9 (2002), no. 1, 1–163.

[28] A. Shiho, On logarithmic extension of overconvergent isocrystals, Math. Ann. 348(2010), no. 2, 467–512.

[29] A. Shiho, Cut-by-curves criterion for the log extendability of overconvergent isocrystals, arXiv:0906.4381v1, to appear in Math. Z.

[30] A. Shiho, Relative log convergent cohomology and relative rigid cohomology III, arXiv:0805.3229v1.

[31] A. Shiho, Purity for overconvergence, arXiv:1007.3345v1.

[32] A. Shiho, Parabolic log convergent isocrystals, arXiv:1010.4364v1 (revision in preparation).

[33] N. Tsuzuki, Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve. Amer. J. Math. 120(1998), no. 6, 1165–1190.

[34] N. Tsuzuki, Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals. Duke Math. J. 111(2002), no. 3, 385–418.

[35] L. Weng, Stability and arithmetic, Adv. Study in Pure Math. 58(2010), 225–359.