

企画特別講演, 3月26日(金).

波面の幾何学  
(その内的双対性とガウス・ボンネの定理)

梅原 雅顕 (阪大・理)

佐治 健太郎氏 (岐阜大)

山田 光太郎氏 (東工大)

との共同研究.

微分幾何的な見地から特異点を眺める.

内容

- (1) 波面の定義
- (2) カスプ辺とツバメの尾の判定条件,
- (3) 閉波面上の2つのガウス・ボンネ型の定理,
- (4) 連接接束 (内的な波面の定式化),
- (5) 内的な波面の双対性,
- (6) 定曲率空間の2次元閉波面に関する4つのガウス・ボンネ型の定理.

## 波面としての超曲面

$M^n$ ; (向き付け可能な) $C^\infty$ -多様体,  
 $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ ;  $C^\infty$ -写像.

$p \in M^n$  が

$$\text{Rank}(df)_p < n,$$

を満たすとき特異点 (singular point) という.

$C^\infty$ -写像  $f$  が **波面** (wave front) であるとは,  
 $f$  に沿う単位ベクトル場  $\nu : M^n \rightarrow S^n$  が存在し,  
以下の条件を満たすときを云う.

- (1) 各点  $p \in M^n$  に対して  $\nu_p \perp df(T_p M^n)$ ,
- (2)  $(f, \nu) : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1} \times S^n$  は, はめ込み.

$\nu$  は  $f$  の**単位法線ベクトル場**と云う.

$$\{\text{はめ込み (immersion)}\} \subset \{\text{波面 (fronts)}\}$$

## 波面としての平行超曲面

$f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ ; はめ込み,  
 $\nu$ ; 単位法線ベクトル場,

$$f_t := f + t\nu \quad (t \in \mathbf{R})$$

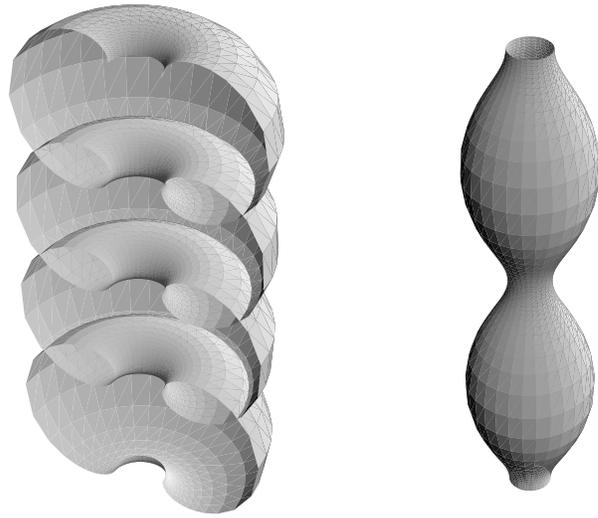
を**平行超曲面** (parallel hypersurface) という .

平行超曲面  $f_t := t$ -時間後の波面 (ホイヘンスの原理)

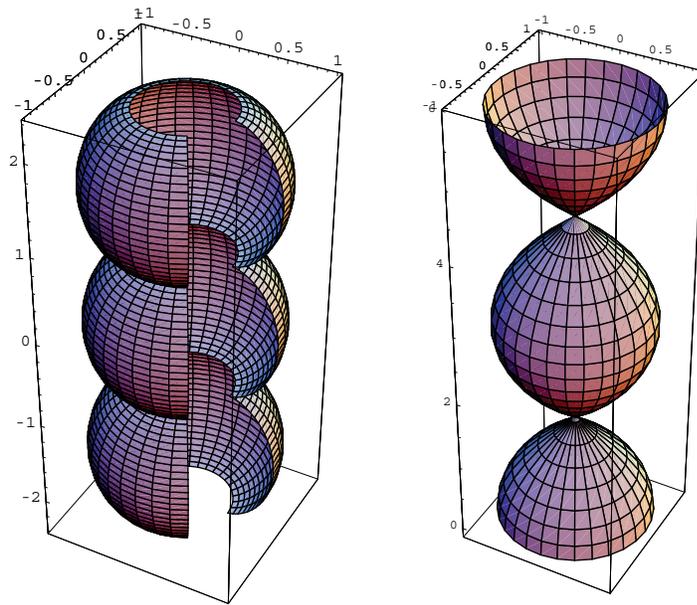
- $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ; 平均曲率一定 ( $H = 1/2$ ) ならば

$$f + \nu$$

はガウス曲率 1 となる .



Delauney 曲面 (nodoid と unduloid)



$K = 1$  の回転面

## (波面としての曲面に現れる特異点)

カスプ辺 (cuspidal edge) :  $f_C(u, v) = (u^2, u^3, v)$

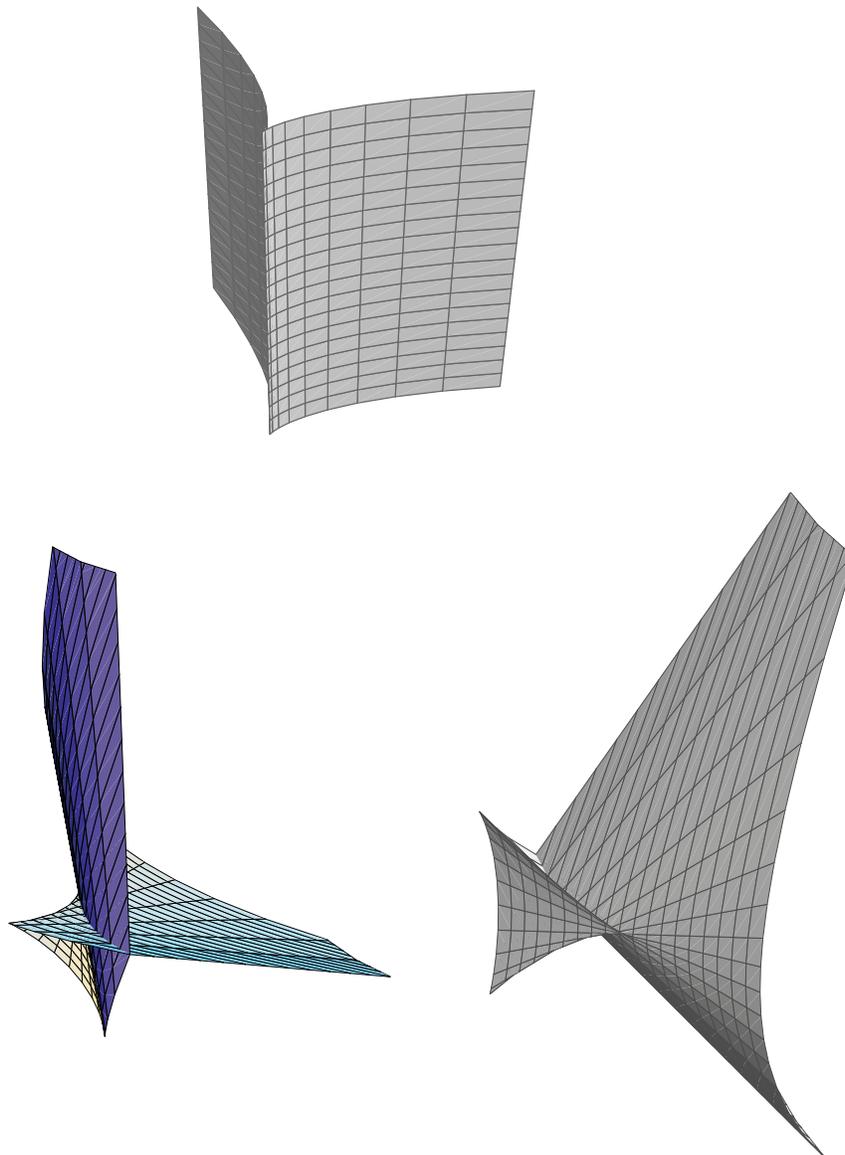
ツバメの尾 (swallowtail) :  $f_S(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$

$C^\infty$ -写像  $f : M^2 \rightarrow N^3$  の特異点  $p \in M^2$  がカスプ辺 (resp. ツバメの尾) であるとは,

$\exists p \in M^2$  の局所座標近傍  $(U^2, \varphi)$ ,

$\exists f(p) \in N^3$  の局所座標近傍  $(V^3, \Phi)$ ,

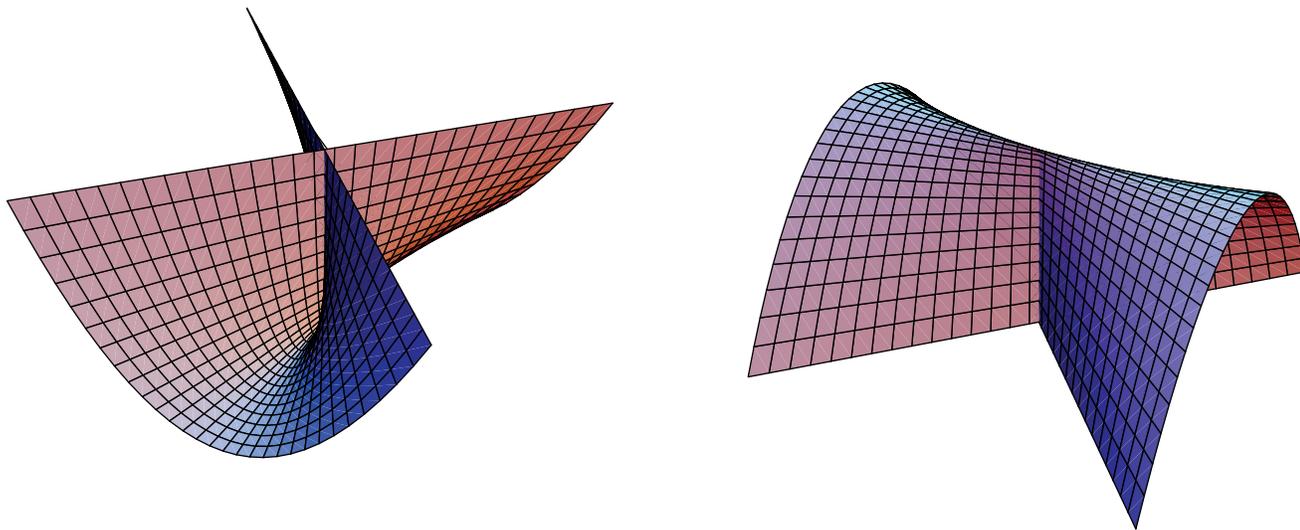
が存在し  $\Phi \circ f \circ \varphi = f_C$  (resp.  $\Phi \circ f \circ \varphi = f_S$ )



## $C^\infty$ -写像

$$f_0(u, v) := (u^2, u, uv)$$

は，原点に孤立特異点をもち，交叉帽子とよばれる．単位法線ベクトル場は，この点で連続に拡張できないので，波面にはならない．



交叉帽子 (cross cap)

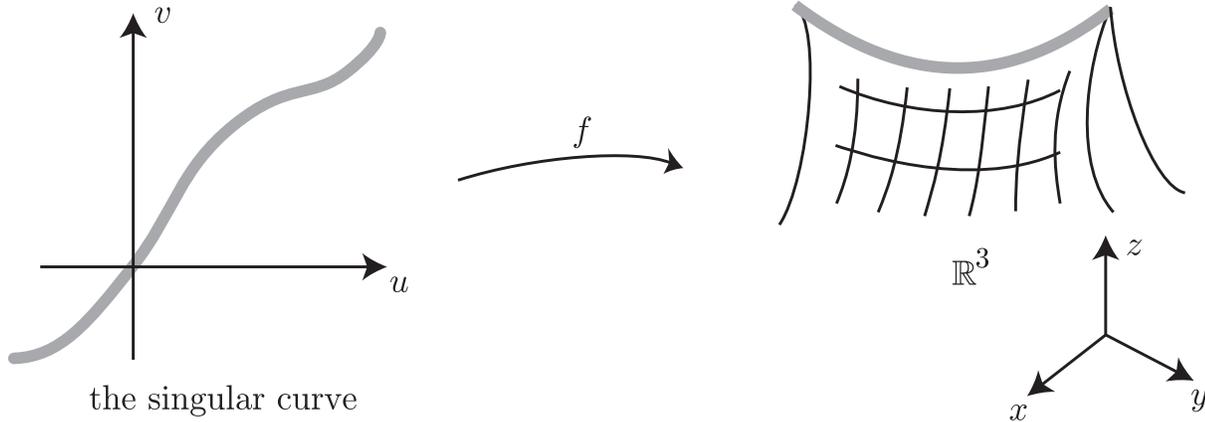
$f = f(u, v) : U^2(\subset \mathbf{R}^2) \rightarrow \mathbf{R}^3$ ; 波面 .

$$\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$$

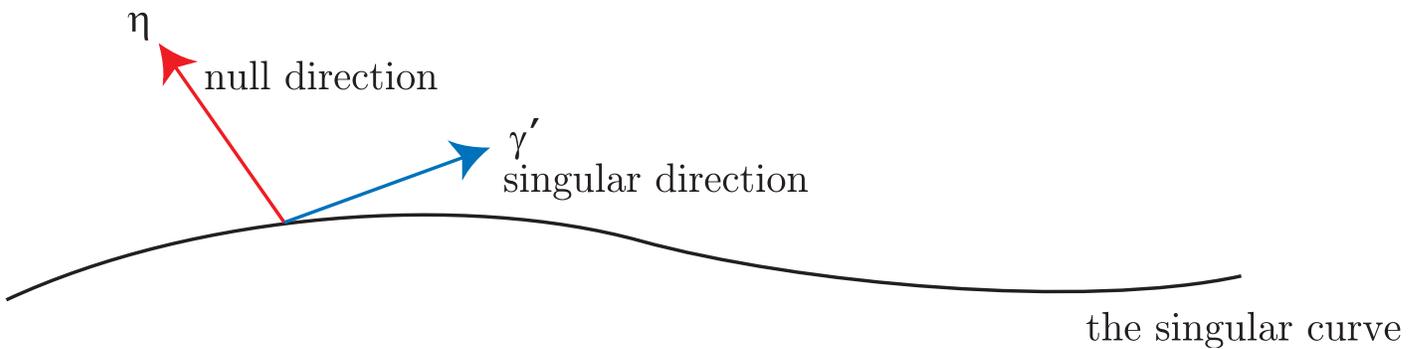
$p$  : 特異点  $\iff \lambda(p) = 0$

$p$  : 非退化  $\iff (d\lambda)_p \neq 0$

カस्प辺とツバメの尾は共に非退化な特異点 .



$\eta$ ; 退化方向  $\in \mathbf{Ker}(df) \subset T_{\gamma(t)}U^2$   
 $\gamma'(t)$ ; 特異方向  $\in TU^2$



定理. (國分-Rossman-佐治-山田-U.05)

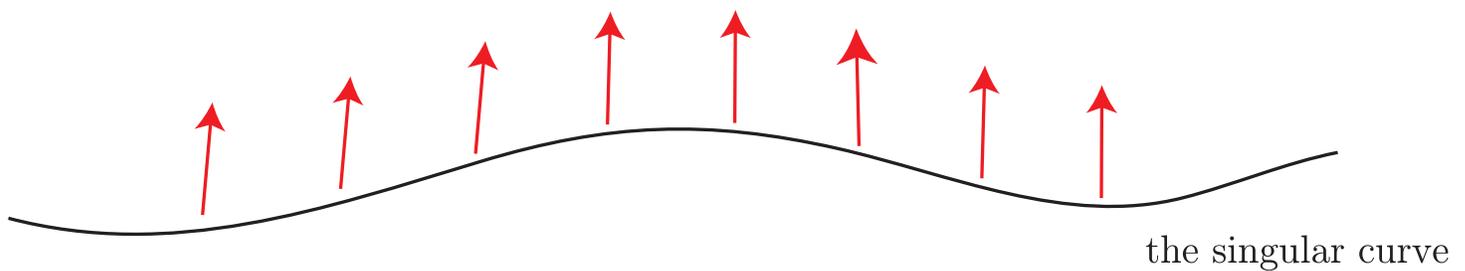
$f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; 波面,

$p$ ; 非退化な特異点,

$\gamma(t)$ ;  $p = \gamma(0)$  を通る特異曲線

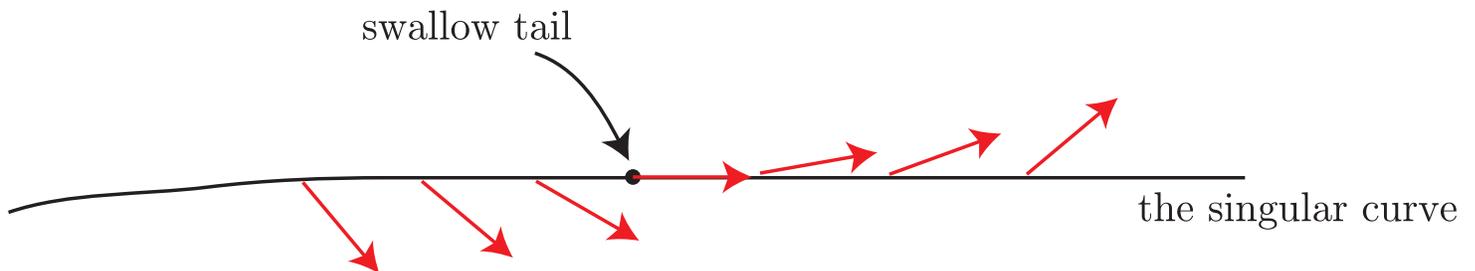
$p$  がカスプ辺

$\Leftrightarrow$  退化方向  $\eta_p$  が  $\gamma'(0)$  と横断的 .

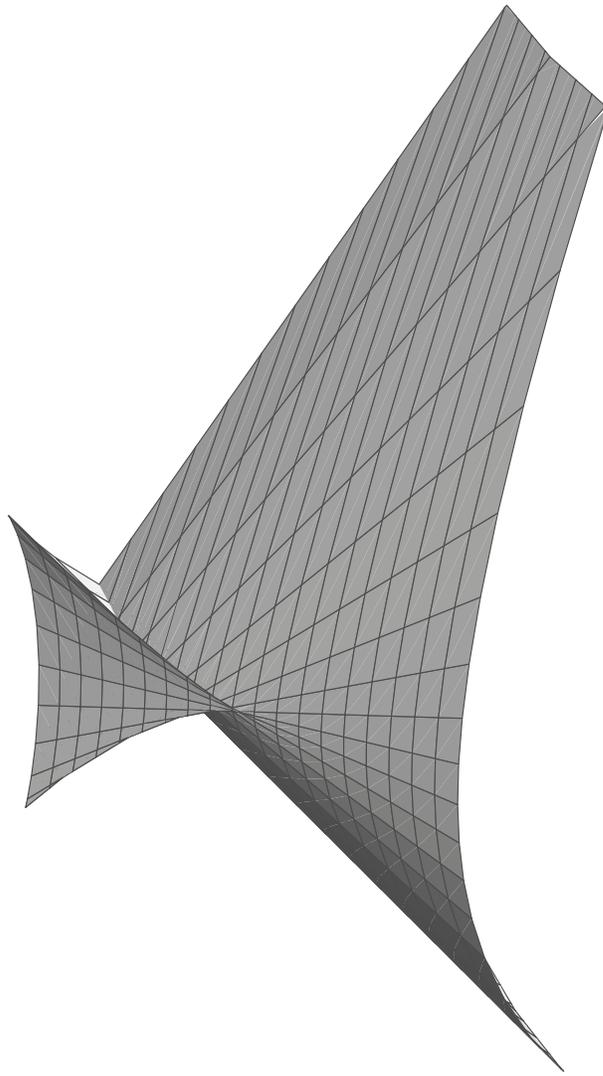


$p$  がツバメの尾

$\Leftrightarrow \det(\gamma'(0), \eta(0)) = 0$  かつ  $\det(\gamma'(t), \eta(t))'|_{t=0} \neq 0$  .

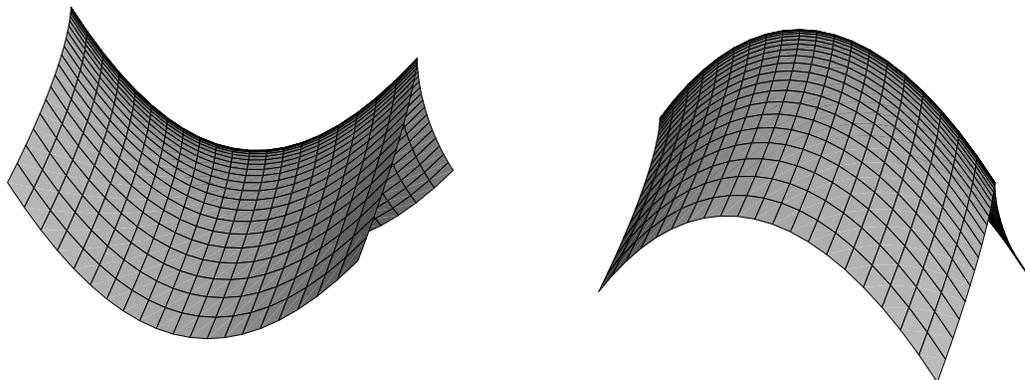


後で, この判定条件を, 内的なカスプ辺と内的なツバメの尾の定義として採用する.



ツバメの尾の拡大図

## カスプ边上の特異曲率



負（左）と正（右）のカスプ辺

$f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ; 波面 (但し  $M^2$  は向きづけられているとせよ.)

$\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$  とおく, 但し  $(u, v)$  は向きに同調した局所座標,

$\hat{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \subset f(M^2)$ ; カスプ辺からなる特異曲線,

$\eta(t)$ ;  $\gamma$  に沿う退化ベクトル場で  $(\gamma'(t), \eta)$  が  $M^2$  の向きに同調するもの.

### 特異曲率の定義

$$\kappa_s := \operatorname{sgn}(d\lambda(\eta)) \frac{\det(\hat{\gamma}'', \hat{\gamma}', \nu)}{|\hat{\gamma}'|^3} (= \pm k_g)$$

曲線の左手が  $M^+$  ならば  $\operatorname{sgn}(d\lambda(\eta)) > 0$  である.

この定義は, 曲面の向き, 単位法線の向き, 特異曲線の向きに依らない.

## 波面に関する2つのガウス・ボンネ型の定理

$M^2$ ; コンパクト向き付け可能な2次元多様体

$f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ; カスプ辺とツバメの尾のみを許容する波面.

$\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$  (( $u, v$ ): 正の局所座標系)

$d\hat{A} := \lambda du \wedge dv$  (符号付き面積要素),

$dA := |\lambda| du \wedge dv$  (面積要素).

$$M_+ := \{\lambda > 0\}, \quad M_- := \{\lambda < 0\}$$

- (Langevin-Levitt-Rosenberg 1995, Kossowski 2002)

$$(2 \deg(\nu) =) \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K d\hat{A} = \chi(M_+) - \chi(M_-) + S_+ - S_-,$$

where

$$S_+ := \{\text{正のツバメの尾の数}\},$$

$$S_- := \{\text{負のツバメの尾の数}\}$$

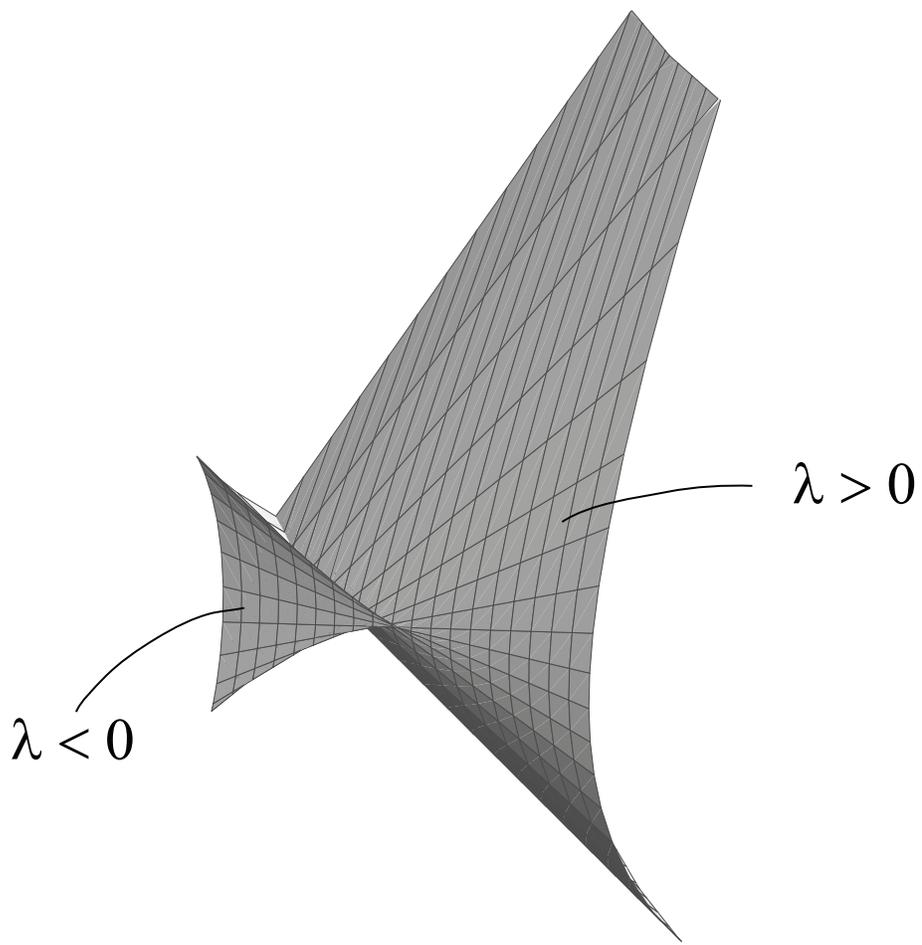
- (Kossowski 2002)

$$\int_{M^2} K dA + 2 \int_{\Sigma_f} \kappa_s d\tau = 2\pi\chi(M^2)$$

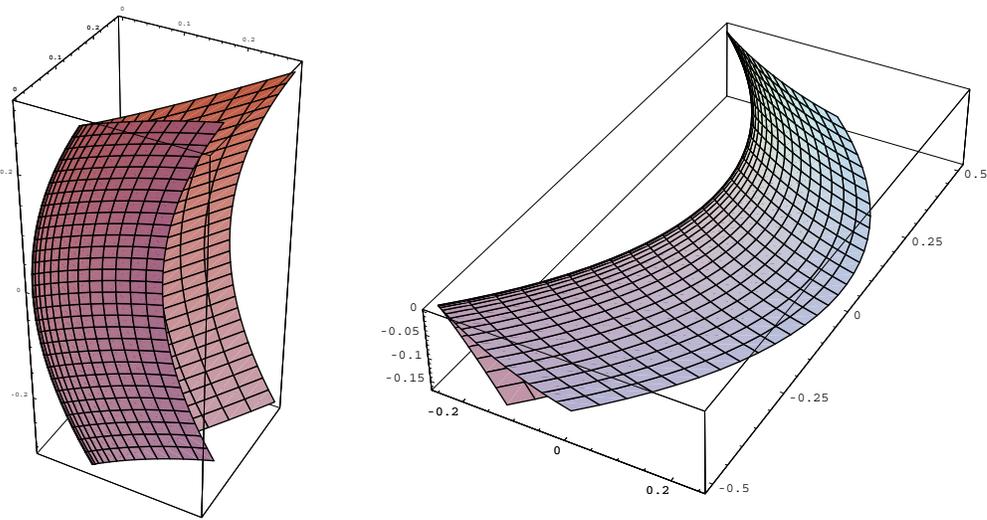
但し Kossowski 氏は  $\kappa_s d\tau$  を1次微分形式として扱っている.

Fact. [佐治-山田-U]

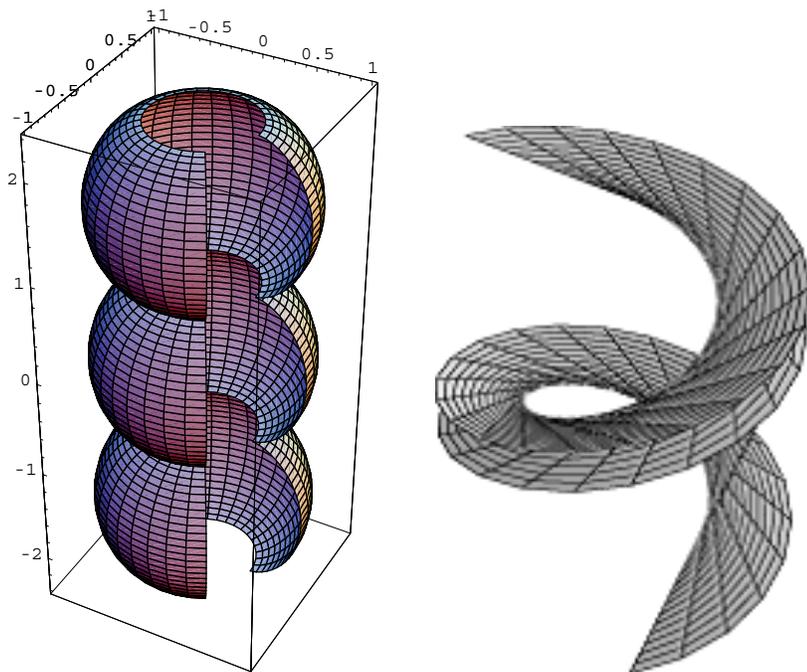
- ツバメの尾では特異曲率は  $-\infty$  に発散する.
- カスプ辺付近では, 特別な場合を除きガウス曲率は両端で異符号に発散する.
- 周囲のガウス曲率が非負なら, 特異曲率は非正.



正のツバメの尾



ガウス曲率が非有界なカスプ辺



$K = 1$  なる回転面とつるまき線の接線曲面

## 波面の内的定式化

多様体  $M^n$  上の接続接束  $(E, \langle, \rangle, D, \varphi)$  の定義;

- (1)  $E$  は  $M^n$  上の階数  $n$  のベクトル束,
- (2)  $E$  は計量  $\langle, \rangle$  を持ち  $D$  は計量に適合する接続,
- (3)  $\varphi: TM^n \rightarrow E$  は以下の条件を満たす束準同型

$$D_X \varphi(Y) - D_Y \varphi(X) = \varphi([X, Y])$$

但し  $X, Y$  は  $M^n$  上のベクトル場とする.

内積の接束への引き戻し

$$ds_\varphi^2 := \varphi^* \langle, \rangle$$

を第一基本形式とよぶ.

$p \in M^n$  が  $\varphi$ -特異点 であるとは,  $\varphi_p: T_p M^n \rightarrow E_p$  が単射でないとき, を云う.

**接続接束 = 一般化されたリーマン多様体**

実際  $(M^n, g)$  がリーマン多様体ならば

$$E = TM^n, \quad \langle, \rangle := g, \quad D = \nabla^g, \quad \varphi = \text{id}.$$

によって接続接束の構造が入る.

( 2次元の場合 ) :

$M^2$ ; コンパクト向き付けられた 2次元多様体,

$(E, \langle, \rangle, D, \varphi)$ ;  $M^2$  上の接続接束,

( $\nu$  の大域的存在に対応する条件)  $E$  は向き付け可能とする . すると至る所消えない  $\mu \in Sec(E^* \wedge E^*)$  が存在し , 向きに同調した正規直交基底の場合  $e_1, e_2$  に対して  $\mu(e_1, e_2) = 1$  となる .

## 内的な特異曲率の定義

$$\kappa_s := \text{sgn}(d\lambda(\eta(t))) \frac{\mu(D_{\gamma'} n(t), \varphi(\gamma'))}{|\varphi(\gamma')|^3},$$

但し  $n(t) \in E_{\gamma(t)}$  は  $E$  において  $\varphi(\gamma')$  に直交する単位ベクトル.

$(u, v)$ ;  $M^2$  上の向きに同調した局所座標

$$d\hat{A} = \lambda du \wedge dv, \quad dA = |\lambda| du \wedge dv,$$

$$\lambda := \mu \left( \varphi \left( \frac{\partial}{\partial u} \right), \varphi \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) \right).$$

$$(\chi_E =) \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K d\hat{A} = \chi(M_+) - \chi(M_-) + S_+ - S_-,$$

$$\int_{M^2} K dA + 2 \int_{\Sigma_\varphi} \kappa_s d\tau = 2\pi \chi(M^2).$$

ここで

$\Sigma_\varphi$ ;  $\varphi$ -特異点集合,

$p \in \Sigma_\varphi$  が非退化  $\Leftrightarrow d\lambda(p) \neq 0$ ,

$p \in \Sigma_\varphi$  が  $A_2$ -pt (内的カスプ辺)  $\Leftrightarrow$  点  $p$  で  $\eta \pitchfork \gamma'(0)$ ,

$p \in \Sigma_\varphi$  が  $A_3$ -pt (内的ツバメの尾)  $\Leftrightarrow$  点  $p$  で  $\det(\eta, \gamma') = 0$  かつ  $\det(\eta, \gamma')' \neq 0$ .

# 連接接束の具体例

- (1) リーマン多様体の中の波面,
- (2) 同じ次元間の多様体の  $C^\infty$ -写像 .

$M^n$ ; 向き付け可能な多様体 ,  
 $(N^n, g)$ ; 向き付け可能なリーマン多様体 ,  
 $f : M^n \rightarrow (N^n, g)$ ;  $C^\infty$ -写像  
 $E_f := f^*TN^n$ ,  $\langle , \rangle := g|_{E_f}$ ,  $D$ ; 誘導接続.  
このときベクトル束の準同型写像

$$\varphi := df : TM^n \longrightarrow E_f := f^*TN^n,$$

は連接接束の構造を与える.

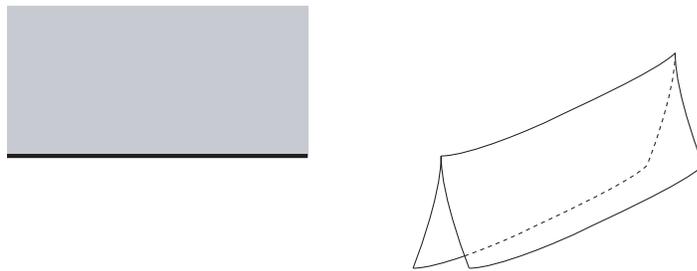


図 1. 折り目とカスプ片

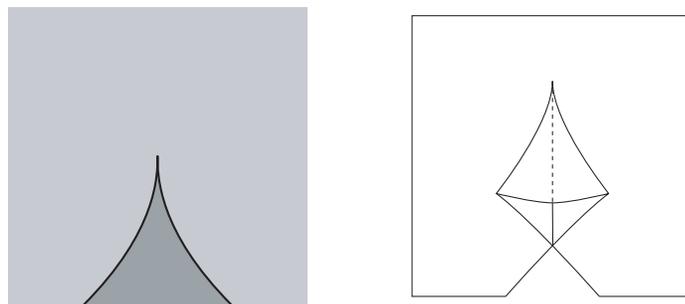


図 2. カスプとツバメの尾

ガウス・ボンネ型定理の2次元多様体間の写像への翻訳.

定理 [Quine 78]  $M^2, N^2$ ; コンパクト, 向きを指定,  
 $f : M^2 \rightarrow N^2$ ; 折り目とカスプのみをもつ  $C^\infty$ -写像

$$\deg(f)\chi(N^2) = \chi(M_f^+) - \chi(M_f^-) + S_f^+ - S_f^-,$$

$$M_f^+ := \{\det(J_f) > 0\}, \quad M_f^- := \{\det(J_f) < 0\},$$

$$S_f^+ := \text{正のカスプの数}, \quad S_f^- := \text{負のカスプの数}.$$

定理 [SUY09]

$M^2$  コンパクト,  $(N^2, g)$ ; 共に向きを指定,  
 $f : M^2 \rightarrow N^2$ ; 折り目とカスプのみをもつ  $C^\infty$ -写像

$$2\pi\chi(M^2) = \int_{M^2} (K_{N^2} \circ f) |f^* dA_g| + 2 \int_{\Sigma} \kappa_s d\tau.$$

但し  $K_{N^2}$  は  $(N^2, g)$  のガウス曲率とする.

系 [Levine66]  $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ;  $C^\infty$ -写像

$$\Sigma_f = C_1 \cup \cdots \cup C_r \quad (\text{波面としての単純閉曲線の和})$$

各  $C_j$  に  $f(M^2)$  を左手に見る向きをつけると

$$\frac{\chi(M^2)}{2} = I(C_1) + \cdots + I(C_r).$$

が成り立つ. 但し  $I(C_j)$  は, 曲線  $C_j$  の回転数.

## 波面から誘導される接続接束

$f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  ; 波面,  
 $\nu$  ; 単位法線ベクトル場,

$$E := \{v \in f^*T\mathbf{R}^{n+1} ; v \perp \nu\}.$$

に  $\mathbf{R}^{n+1}$  からの誘導計量  $\langle, \rangle$  を入れる.

$$D_X \xi := \left( \nabla_X^{\mathbf{R}^{n+1}} \xi \right)^T \quad (\xi \in \text{Sec}(E))$$

は,  $\langle, \rangle$  に適合した接続を与える.

$$\varphi := df : TM^n \ni v \mapsto df(v) \in E,$$

$$\psi := d\nu : TM^n \ni v \mapsto d\nu(v) \in E.$$

とおくと

- $(E, \langle, \rangle, D, \varphi)$  と  $(E, \langle, \rangle, D, \psi)$  は共に接続接束の構造をもつ. つまり以下の2式が成立する.

$$D_X \varphi(Y) - D_Y \varphi(X) = \varphi([X, Y]),$$

$$D_X \psi(Y) - D_Y \psi(X) = \psi([X, Y]).$$

$\varphi$  と  $\psi$  の同等性 (内的双対性)  $\Leftrightarrow f$  と  $\nu$  の双対性.

定曲率空間の波面について, 同様の双対性が成立する.

さらに  $\varphi$  と  $\psi$  は以下を満たす .

$$(0.1) \quad \langle \varphi(X), \psi(Y) \rangle = \langle \varphi(Y), \psi(X) \rangle ,$$

$$(0.2) \quad \text{Ker}(\varphi_p) \cap \text{Ker}(\psi_p) = \{0\} \quad (p \in M^n).$$

定理.[SUY09] ( 内的波面の実現定理 )

$M^n$ ; 単連結多様体,

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \varphi)$  と  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, \psi)$  が共に連接接束の構造をもち, 条件 (0.1), (0.2) を満たし, さらに

$$\langle R^D(v, w)\xi, \zeta \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle \psi(w), \xi \rangle & \langle \psi(w), \zeta \rangle \\ \langle \psi(v), \xi \rangle & \langle \psi(v), \zeta \rangle \end{pmatrix},$$

$$v, w \in T_p M, \quad \xi, \eta \in E_p, \quad p \in M^n$$

を満たすとせよ . すると

$$f: M^n \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}; \quad \text{波面,}$$

$$\nu: M^n \longrightarrow S^n; \quad \text{ガウス写像}$$

が存在し,  $df = \varphi$  かつ  $d\nu = \psi$  を満たす.

$f$  は  $\mathbf{R}^{n+1}$  の向きを保つ合同変換を除いて一意 .

2次元の場合: 内的双対性  $\Leftrightarrow f$  と  $\nu$  の双対性.

4つのガウス・ボンネ型の定理,

$$(\chi_E =) \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K_f d\hat{A}_f = \chi(M_+^f) - \chi(M_-^f) + S_+^f - S_-^f,$$

$$(\chi_E =) \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K_\nu d\hat{A}_\nu = \chi(M_+^\nu) - \chi(M_-^\nu) + S_+^\nu - S_-^\nu,$$

$$\int_{M^2} K_f dA_f + 2 \int_{\Sigma_f} \kappa_s^f d\tau = 2\pi\chi(M^2),$$

$$\int_{M^2} K_\nu dA_\nu + 2 \int_{\Sigma_\nu} \kappa_s^\nu d\tau = 2\pi\chi(M^2),$$

$$(1) K_f d\hat{A}_f = K_\nu d\hat{A}_\nu,$$

$$(2) K_\nu = 1,$$

$$(3) |K_f| dA_f = dA_\nu (= K_\nu dA_\nu).$$

例えば以下の情報が得られる

$$(1) \chi(\{p \in M^2; K_p < 0\}),$$

$$(2) \int_{M^2} K^- dA, \text{ 但し } K^- := \min(0, K).$$

**定理.**[Bleecker-Wilson の公式 78]

$M^2$ ; コンパクト, 向き付け可,

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  はめ込み,

$\nu: M^2 \rightarrow S^2$ ; ガウス写像.

$\nu$  が折り目とカスプのみを許容したとすると

$$2\chi(\{K_f < 0\}) = S_\nu^+ - S_\nu^-,$$

が成り立つ, 但し

$$S_\nu^+ := \{\nu \text{ の正のカスプの数}\},$$

$$S_\nu^- := \{\nu \text{ の負のカスプの数}\}.$$

## Bleecker-Wilson の公式の双対版:

定理. [SUY09]  $f : M^2(= S^2) \rightarrow \mathbf{R}^3$ ; 強い意味で凸  
(つまり  $\nu$  がはめ込み.)

$f_t; (t \in \mathbf{R})$  は  $f$  の平行曲面.

ある  $t$  において  $f_t$  はカスプ辺とツバメの尾のみを許容したとすると, その  $t$  について

$$2\chi(\{K_{f_t} < 0\}) = S_{f_t}^+ - S_{f_t}^-$$

が成り立つ, 但し

$S_{f_t}^+ := f_t$  上の正のツバメの尾の数,

$S_{f_t}^- := f_t$  上の負のツバメの尾の数.

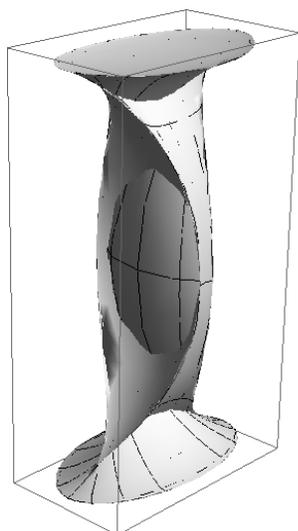
例.

$$\text{Im}(f) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1 \right\}.$$

平行曲面

$$f_c := f + c\nu, \quad c := \frac{11}{2}$$

は4つのツバメの尾をもち  $\chi(\{K_c < 0\}) = -2$ .



定理. [SUY09]  $M^2$ ; コンパクト, 向き付け可,  
 $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ; はめ込み,  
 $\nu : M^2 \rightarrow S^2$ ; ガウス写像,  
 $\nu$  が折り目とカスプのみを許容したとすると

$$\int_{\Sigma_\nu} \kappa_\nu d\tau = \int_{M^2} K^- dA (< 0),$$

が成り立つ, 但し  $K^- = \min(0, K)$  であり,  
 $\kappa_\nu$  は  $\nu$  の特異曲率とする.

定理.[SUY09]  $f : M^2(= S^2) \rightarrow \mathbf{R}^3$ ; 強い意味で凸,  
ある値  $t$  の平行曲面  $f_t$  の特異点集合  $\Sigma_{f_t}$  が,  
カスプ辺とツバメの尾のみを許容したとすると

$$\int_{\Sigma_{f_t}} \kappa_{f_t} d\tau = - \int_{M^2} K_{f_t}^- dA_{f_t}$$

が成り立つ. ここで  $\kappa_{f_t}$  は  $f_t$  の特異曲率とする.

共形的に平坦なリーマン多様体の双対性.

リーマン多様体  $(M^n, g)$  ( $n \geq 4$ ) が共形的に平坦  
とは, ワイルの曲率テンソル

$$W_{ijkl} := R_{ijkl} + (A_{ik}g_{jl} - A_{il}g_{jk} + A_{jl}g_{ik} - A_{jk}g_{il}) \\ + \frac{R}{n(n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

が消えるときを云う. 但し

$$A := \frac{1}{n-2} \sum_{i,j} \left( R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij} \right) dx^i \otimes dx^j$$

はSchoutenテンソルという.

$A$  はCodazziの方程式を満たす.

Fact.(Brinkmann 1923, Asperti-Dajczer 1989) 単連結  
共形的平坦リーマン多様体  $(M^n, g)$  ( $n \geq 4$ ) は光錐

$$Q_+^{n+1} := \{(t, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}_1^{n+2}; \sum_{j=1}^{n+1} (x_j)^2 = t^2\}$$

への等長はめ込みを(一意的に)許容する.

Fact.(Izumiya, Huili Liu, Espinar-Galpez-Mira)

$\exists_1$  共形的に平坦な多様体上の双対性  $f \leftrightarrow \nu$ .

$$df \cdot \nu = f \cdot d\nu = 0, \quad f \cdot f = \nu \cdot \nu = 0, \quad f \cdot \nu = 1$$

命題.(Liu-山田-U)

連接接束の言葉で双対性を内的に定式化できる.

$$\hat{g}_{ij} = \sum g^{ab} A_{ia} A_{jb} du^i \otimes dv^j$$

は双対共形平坦計量を与える. 但し  $(u^1, \dots, u^n)$  は  
局所座標系とする.