

日本数学会年会 2010 総合講演

# パンルヴェ方程式の代数解析と力学系

岩崎 克則〔九大・数理〕

概要

パンルヴェ方程式の代  
数幾何・モデュライ理論

+

代数曲面上の双有理写  
像のエルゴード理論

リーマン・ヒルベルト対応

↓

パンルヴェ第 VI 方程式の力学系

## パンルヴェ第 VI 方程式 $P_{VI}(\kappa)$

非自励ハミルトン系: 
$$\frac{dq}{dz} = \frac{\partial H(\kappa)}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H(\kappa)}{\partial q}$$

時間:  $z \in Z := \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ , 位置・運動量:  $q = q(z)$ ,  $p = p(z)$ .

ハミルトニアン  $H(\kappa) = H(q, p, z; \kappa)$ : 記号  $q_\nu := q - \nu$  for  $\nu \in \{0, z, 1\}$

$$z(z-1) \cdot H(\kappa) = (q_0 q_z q_1) p^2 - \{\kappa_1 q_z q_1 + (\kappa_2 - 1) q_0 q_1 + \kappa_3 q_0 q_z\} p + \kappa_0 (\kappa_0 + \kappa_4) q_z.$$

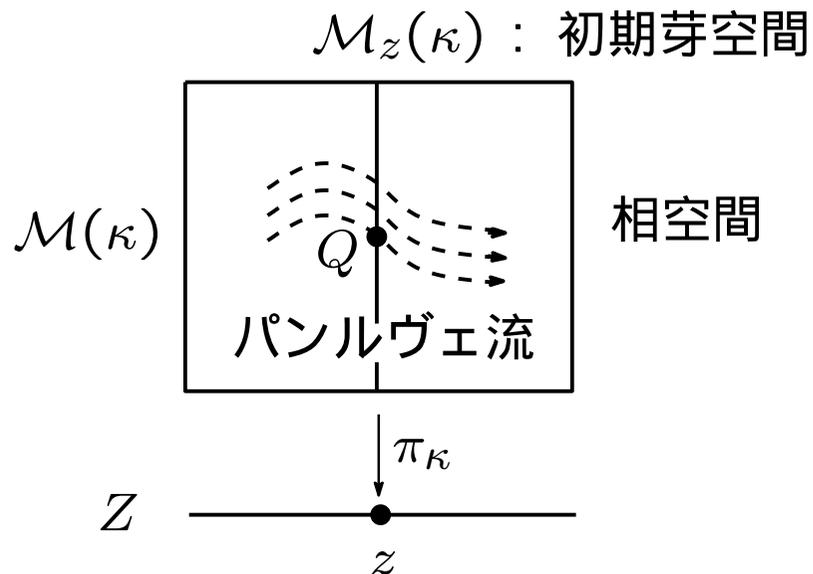
パラメータ空間は 4 次元アフィン空間.      フックス関係式  $\searrow$

$$\mathcal{K} := \{\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \in \mathbb{C}^5 : 2\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = 1\}$$

## パンルヴェ方程式の代数幾何

パンルヴェ流: ある準射影的有理曲面のファイブレーション上の一様な正則葉層構造として定式化される.

$$\pi_\kappa : \mathcal{M}(\kappa) \rightarrow Z := \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$$



- $\mathcal{M}_z(\kappa) := \{P_{\text{VI}}(\kappa) \text{ の有理型解芽 at } z \text{ 全体}\}$   
 ... 安定放物接続のモデュライ空間として実現
- コンパクト化  $\mathcal{M}_z(\kappa) \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_z(\kappa)$ : 安定放物  $\phi$  接続のモデュライ空間

## 安定放物接続と安定放物 $\phi$ 接続 [very sketchy]

- 安定放物接続: [階数 2] ベクトル束 + フックス接続 + 放物構造 ← 幾何学的不変式論 [GIT] における安定性をみたすもの

- 安定放物  $\phi$  接続: 安定放物接続の亜種で “行列値プランク定数”  $\phi$ -場をもつもの ← 退化を許す [半古典] s.t. 一般化されたライプニッツ則

$$\nabla(fs) = \phi(s) \otimes df + f\nabla(s)$$

Naively, it looks like  $\nabla = “\phi \otimes d + A”$

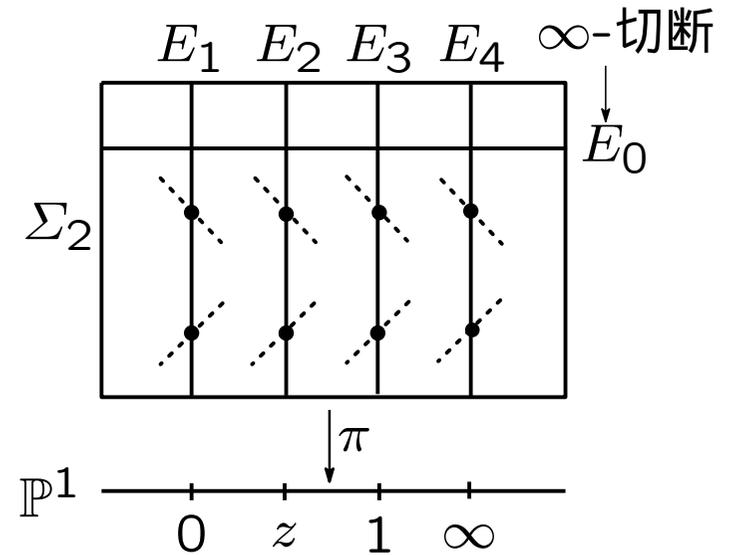
- コンパクト化のアイデア: 半古典的対象物 i.e. 退化した  $\phi$ -場をもつ安定放物  $\phi$  接続を付け加えてモデュライ空間をコンパクト化する.

## 初期芽空間〔稲場・岩崎・齋藤〕

- $\overline{\mathcal{M}}_z(\kappa) \cong 2$  次 of ヒルツェブルフ曲面  $\Sigma_2$  の 8 点ブローアップ.

- $\overline{\mathcal{M}}_z(\kappa)$  は唯一の反標準正因子をもつ:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_z(\kappa) &= \{ \text{半古典的対象物} \} \\ &= 2E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \end{aligned}$$



- コンパクト化する前のモデュライ空間:  $\mathcal{M}_z(\kappa) = \overline{\mathcal{M}}_z(\kappa) - \mathcal{Y}_z(\kappa)$ .

- 面積要素:  $\omega_z(\kappa) \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_z(\kappa), \Omega^2(\mathcal{Y}_z(\kappa)))$ .

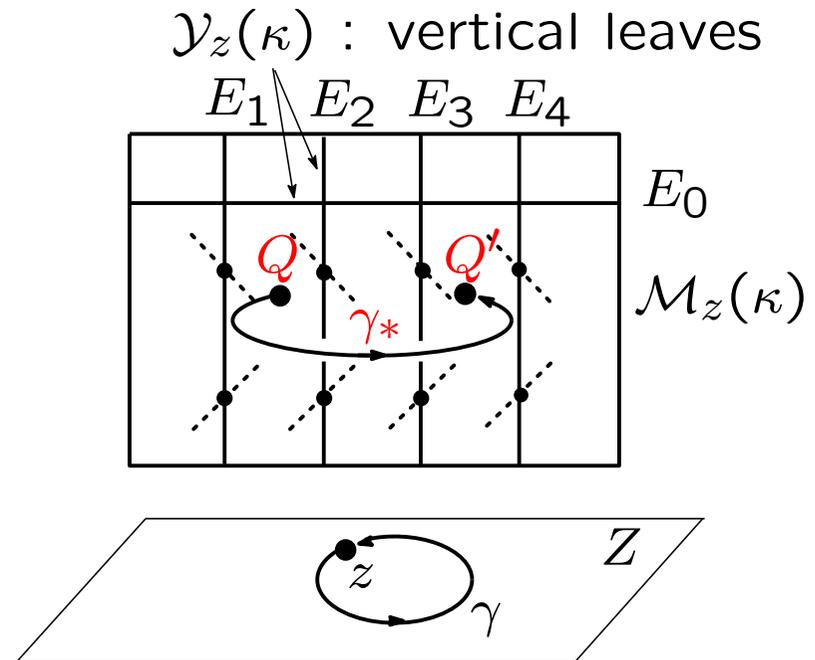
## 非線形モノドロミー

パンルヴェ性より:

各ループ  $\gamma \in \pi_1(Z, z)$  はパンルヴェ葉層構造に沿う大域的な水平持ち上げをもち、次の自己同型を誘導する:

$$\gamma_* : \mathcal{M}_z(\kappa) \rightarrow \mathcal{M}_z(\kappa), Q \mapsto Q'$$

$\gamma$  に沿う非線形モノドロミーという.



- 保存系:  $\gamma_*$  は面積要素  $\omega_z(\kappa)$  を保存する.

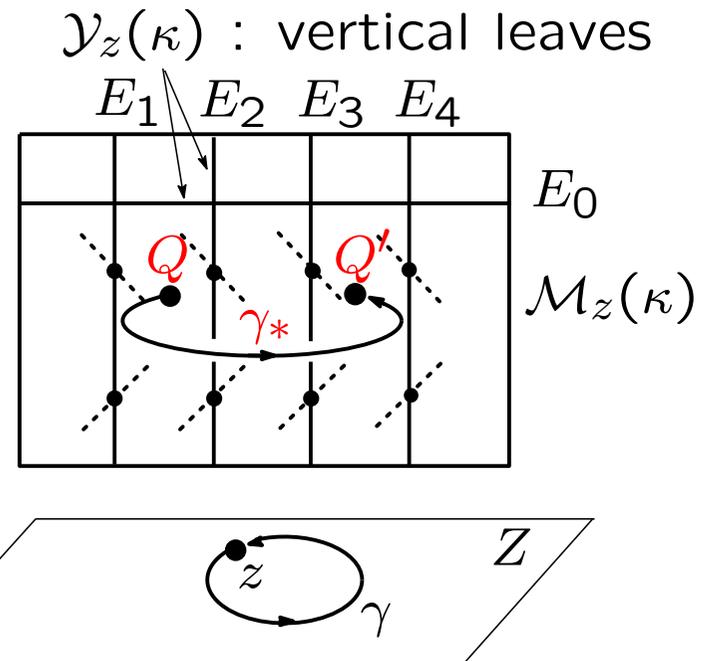
## 問題設定

ループ  $\gamma \in \pi_1(Z, z)$  に対して,

(1) モノドロミー写像  $\gamma_* : \mathcal{M}_z(\kappa) \circlearrowleft$   
の力学系的性質を調べよ.

(a) カオス的か?

(b) 不変集合を分類せよ.



(2) 孤立周期解の個数  $\#\text{Per}_N^i(\gamma; \kappa)$  を求めよ.

$$\text{Per}_N^i(\gamma; \kappa) := \{Q \in \mathcal{M}_z(\kappa) : \gamma_*^N Q = Q\}$$

周期  $N \rightarrow \infty$  のときの増大度を求めよ.

## 主結果〔粗く述べて〕

各 非初等的 ループに沿ってパンルヴェ VI のモノドロミーはカオス的

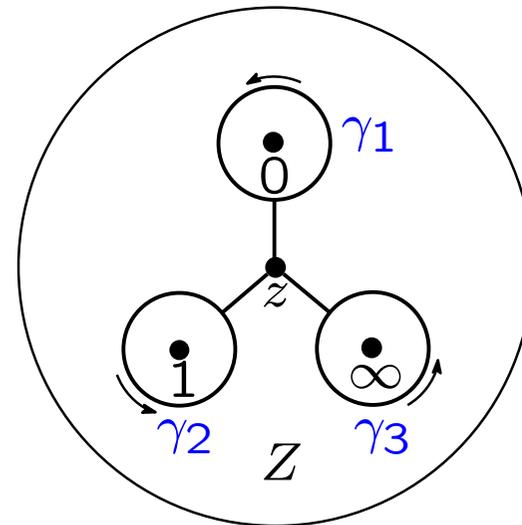
### 非初等的ループ

$$\pi_1(Z, z) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \mid \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = 1 \rangle$$

$\gamma \in \pi_1(Z, z)$  が初等的  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma \sim \gamma_i^m$  [共役]

for some  $i \in \{1, 2, 3\}$  and  $m \in \mathbb{Z}$ .

そうでないとき  $\gamma$  は非初等的という.



## カオスとは何か？

カオスとはエルゴード理論における ランダムネス の測度論的概念

三つの要請:

- (1) 予測不能性: 初期値への鋭敏な依存性 ... (C1)(C3).
- (2) 分離不能性: エルゴード性, または類似の性質 ... (C2).
- (3) 一種の正規性: 周期点の稠密性 ... (C4).

条件 (C1)–(C4) については次のスライド参照.

## 曲面力学系におけるカオス

曲面写像  $f : S \rightarrow S$  に対して [我々の場合  $S = \mathcal{M}_z(\kappa)$ ,  $f = \gamma_*$ ]

$f : S \circlearrowleft$  がカオス的  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists S$  上の  $f$ -不変ボレル確率測度  $\mu$  s.t.

(C1)  $\mu$  について正のエントロピー:  $h_\mu(f) > 0$ .

(C2)  $f$  は  $\mu$  について混合的, とくにエルゴード的.

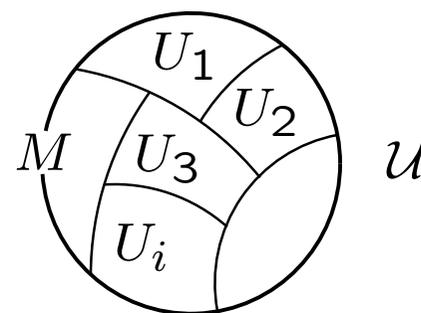
(C3)  $\mu$  は鞍型双曲的, i.e. エルゴード測度  $\mu$  に関する リャプノフ指数  $L_\pm(f)$  は次をみたす:  $L_-(f) < 0 < L_+(f)$ .

(C4)  $f$  の双曲的 周期点 は  $\text{supp } \mu$  で稠密.

## 測度論的エントロピー

$f : M \rightarrow M$  : 可測写像,  $\mu$  :  $f$ -不変ボレル確率測度

$$h_\mu(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathcal{U}} H_\mu(f, \mathcal{U})$$



$\sup$  は  $M$  のすべての有限ボレル分割  $\mathcal{U}$  上でとる.

$$H_\mu(f, \mathcal{U}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{U} \vee f^{-1}\mathcal{U} \vee \dots \vee f^{-(n-1)}\mathcal{U})$$

- $H_\mu(\mathcal{U}) := - \sum_{i=1}^m \mu(U_i) \log \mu(U_i)$  : 分割  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$  の情報量
- $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} := \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$  : 分割のジョイン

## リャプノフ指数 : Oseledec の定理 (曲面の場合)

$f : S \rightarrow S$  : 微分同相,  $\mu$  :  $f$ -不変 エルゴード 測度

$\implies$  二分律: (1) または (2) が起こる.

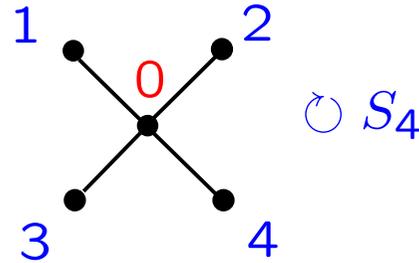
$$(1) \exists L(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(df^n)_x v\| \quad (\mu\text{-a.e. } x \in S, \forall v \in T_x S).$$

(2)  $\exists TS = E_+ \oplus E_-$  [可測な直和分解  $\mu$ -a.e.] s.t.

$$\exists L_{\pm}(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(df^n)_x v_{\pm}\|$$
$$(\mu\text{-a.e. } x \in S, \forall v_{\pm} \in (E_{\pm})_x).$$

$(f, \mu)$  : エルゴード的  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  任意の  $f$ -不変ボレル集合  $B \subset S$  に対して,  
 $\mu(B) = 1$  または  $\mu(B) = 0$ .

## アフィン・ワイル群



$$\mathcal{K} = \{\kappa \in \mathbb{C}^5 : 2\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = 1\}$$

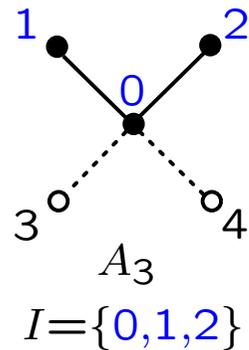
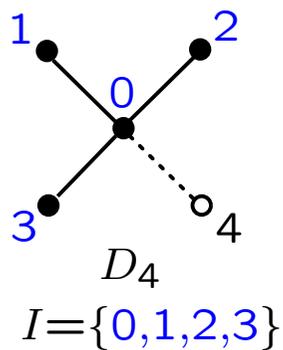
- $w_i : \mathcal{K} \circlearrowleft$  : 超平面  $H_i = \{\kappa \in \mathcal{K} : \kappa_i = 0\}$  に関する鏡映変換
- $W(D_4^{(1)}) := \langle w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$  は  $D_4^{(1)}$ -型アフィン・ワイル群
- $S_4 : D_4^{(1)}$  型ディンキン図形の自己同型群
- $W(F_4^{(1)}) := W(D_4^{(1)}) \rtimes S_4$  は  $F_4^{(1)}$ -型アフィン・ワイル群

## 部分図形による Stratification

真部分集合  $I, I' \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$  に対し  $I \sim I' \stackrel{\text{def}}{\iff} I \equiv I' \pmod{S_4}$ -作用 . 同値類を  $\star = [I]$  と表す.

$$\bar{\mathcal{K}}(\star) := F(D_4^{(1)})\text{-orbits of } H_I := \bigcap_{i \in I} H_i$$

$$\mathcal{K}(\star) := \bar{\mathcal{K}}(\star) \text{ に対応する相対開 stratum}$$



$$\begin{array}{ccccccc} \emptyset & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_1^{\oplus 2} & \longrightarrow & A_1^{\oplus 3} & \longrightarrow & A_1^{\oplus 4} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & D_4 & & \end{array}$$

strata の隣接関係  $\star \rightarrow \star \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{K}(\star) \subset \bar{\mathcal{K}}(\star)$ .

## 不変曲線と超幾何関数解

(−2)-曲線  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}^1$  と同型で自己交点数 −2 の曲線.

(1)  $\kappa \in \mathcal{K}(\ast)$  のとき  $\mathcal{M}_z(\kappa)$  内の (−2)-曲線全体の双対グラフは  
\* 型のディンキン図形になる.

(2) 各 (−2)-曲線上で  $P_{VI}(\kappa)$  はある超幾何方程式の射影化  
〔リッカチ方程式〕に退化する.

- $\mathcal{M}_z(\kappa)$  内の (−2)-曲線をリッカチ曲線ともいう.
- $\mathcal{E}_z(\kappa)$  : リッカチ集合

定理〔不変曲線・周期曲線〕非初等的ループ  $\gamma$  に沿うモノドロミー写像  
 $\gamma_* : \mathcal{M}_z(\kappa) \circlearrowleft$  のコンパクト不変曲線はリッカチ曲線に限る. また  
〔コンパクトとは限らない〕周期曲線もリッカチ曲線に限る.

## パンルヴェ方程式におけるカオス

$\forall \gamma \in \pi_1(Z, z)$  : 非初等的ループ,

$\exists \mu_\gamma$  :  $\gamma_*$ -不変確率測度,  $\exists \lambda(\gamma) > 1$  : 力学次数 と呼ばれる数 s.t.

(1) カオスの条件 (C1)–(C4) を満たす .

(2) 測度論的・位相的エントロピー:  $h_{\mu_\gamma}(\gamma_*) = h_{\text{top}}(\gamma_*) = \log \lambda(\gamma)$ .

(3) 孤立周期点の個数:  $\#\text{Per}_N^i(\gamma; \kappa) = \lambda(\gamma)^N + O(1)$  as  $N \rightarrow \infty$ .

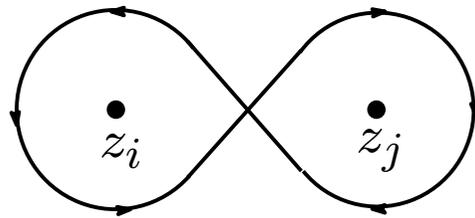
但し  $O(1)$  項は  $\kappa$  の値に依存する .

(4)  $\lambda(\gamma)$  の計算アルゴリズム:  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  に関する  $\gamma$  の被約表示を用いて.

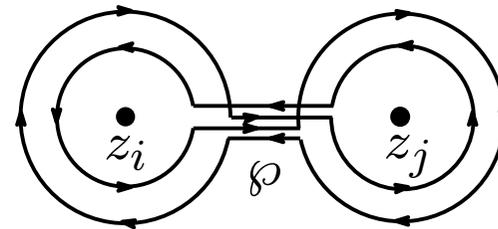
(a)  $\lambda(\gamma)$ : 2次の単数, (b)  $\lambda(\gamma) \geq 3 + 2\sqrt{2}$  [等号: 8の字ループ]

# 例

$\{z_1, z_2, z_3\} = \{0, 1, \infty\}$  とおく.



8 の字ループ



ポツホハマー・ループ

(1) 8 の字ループ:  $\gamma \sim \gamma_i \gamma_j^{-1}$  に対し  $\lambda(\gamma) = 3 + 2\sqrt{2}$ .

(2) ポツホハマー・ループ:  $\wp \sim [\gamma_i, \gamma_j^{-1}]$  に対し  $\lambda(\wp) = 9 + 4\sqrt{5}$ .

注. 8 の字ループは非初等的ループの中で最も“初等的な”ループである.

## 力学次数 $\lambda(\gamma)$ の計算アルゴリズム

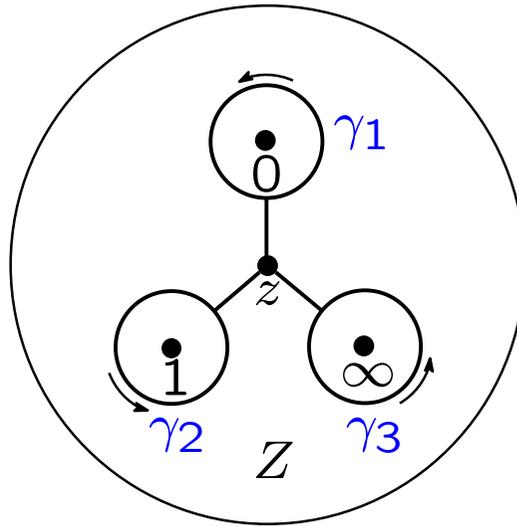
次の二つのことばを用いて与えられる:

- ループ  $\gamma \in \pi_1(Z, z)$  の共役類の 最短元 の 簡約表示,
- 階数 3 の 普遍コクセター群 とその幾何表現:

$$\pi_1(Z, z) \hookrightarrow \text{UCG}(3) \xrightarrow{\sim} \text{幾何表現} \curvearrowright V$$

アルゴリズムを与えるためにいくつかの記号と用語を導入する.

$Z := \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$  の基本群



$$\pi_1(Z, z) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \mid \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = 1 \rangle.$$

$\gamma_i$  :  $z_i$  を正の向きに一周,  $z_j, z_k$  を廻らないループ

$$(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty), \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

## ループの最短代表元

各ループ  $\gamma \in \pi_1(Z, z)$  は次の表示をもつ:

$$\gamma = \gamma_{j_1}^{\varepsilon_1} \gamma_{j_2}^{\varepsilon_2} \cdots \gamma_{j_m}^{\varepsilon_m} \quad (*).$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} m \in \mathbb{N} & \text{〔長さ〕} \\ (j_1, \dots, j_m) \in \{1, 2, 3\}^m & \text{〔添字〕} \\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \{\pm 1\}^m & \text{〔符号〕} \end{array} \right.$$

- 表示 (\*) が被約  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  長さ  $m$  が可能な全ての表示の中で最短.
- $\gamma$  の長さ:  $l_{\pi_1}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$  の被約表示の長さ  $m$ .

定義.  $\gamma$  が最短  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma$  が自身に 共役 な全てのループの中で最小の長さ.

## 階数 3 の普遍コクセター群

$$G = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2.$$

各元  $\sigma \in G$  は次の一意表示をもつ〔被約表示〕：

$$\sigma = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_n} \quad (**)$$

ただし  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2, 3\}^n$ ,  $i_\nu \neq i_{\nu+1}$ .

- $l_G(\sigma) := n$  :  $\sigma$  の長さ.
- $\sigma \in G$  : 偶  $\stackrel{\text{def}}{\iff} l_G(\sigma)$  が偶数.
- $G(2) := \{G \text{ の偶元全体}\}$ .

埋込み  $\pi_1(Z, z) \hookrightarrow G := \text{UCG}(3)$

アルファベットの変更:  $\{\gamma_1^{\pm 1}, \gamma_2^{\pm 1}, \gamma_3^{\pm 1}\} \rightarrow \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ .

翻訳規則:

$$\gamma_1^{\pm 1} \mapsto \begin{cases} \sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_2\sigma_1 \end{cases} \quad \gamma_2^{\pm 1} \mapsto \begin{cases} \sigma_2\sigma_3 \\ \sigma_3\sigma_2 \end{cases} \quad \gamma_3^{\pm 1} \mapsto \begin{cases} \sigma_3\sigma_1 \\ \sigma_1\sigma_3 \end{cases}$$

同型の誘導:  $\pi_1(Z, z) \xrightarrow{\sim} G(2) \subset G, \quad \gamma \mapsto \sigma$ .

- $\pi_1(Z, z)$  の被約語  $\mapsto G$  の被約語
- 各  $\gamma \in \pi_1(Z, z)$  の被約語は一意的
- $\ell_G(\sigma) = 2\ell_{\pi_1}(\gamma)$

## 幾何表現

$\forall$  コクセター群は 幾何表現 と呼ばれる忠実表現をもつ。我々の  $G$  の場合,

- $V = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$  + 非退化対称二次形式

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ -1 & (i \neq j) \end{cases}$$

- 各  $i \in \{1, 2, 3\}$  に対し, 鏡映変換  $r_i : V \rightarrow V$ ,

$$r_i(v) := v - 2B(e_i, v)e_i \quad (v \in V).$$

- $\exists$  忠実表現  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  s.t.  $\rho(\sigma_i) = r_i$  for  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
- $G$  は  $\rho$  を通じて次の鏡映群と同一視される:  $\langle r_1, r_2, r_3 \rangle \curvearrowright V$ .

## 基本的な線形変換

各  $i \in \{1, 2, 3\}$  に対して, 線形変換

$$s_i : V \rightarrow V$$

を恒等変換と基本鏡映  $r_i$  の平均として定義:

$$s_i(v) := \frac{v + r_i(v)}{2} = v - B(e_i, v)e_i \quad (v \in V)$$

線形変換  $s_1, s_2, s_3$  はアルゴリズムを記述するのに基本的な役割を果たす

→ [次のスライド参照]

## $\lambda(\gamma)$ の計算アルゴリズム

(1) 非初等的ループ  $\gamma \in \pi_1(Z, z)$  の共役類の最短元を改めて  $\gamma$  とおく

(2)  $\gamma$  の被約表示:  $\gamma = \gamma_{j_1}^{\varepsilon_1} \gamma_{j_2}^{\varepsilon_2} \cdots \gamma_{j_m}^{\varepsilon_m} \quad (*)$

(3) アルファベットの変更  $\{\gamma_1^{\pm 1}, \gamma_2^{\pm 1}, \gamma_3^{\pm 1}\} \rightarrow \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  により,  
表示  $(*)$  に対応する元  $\sigma \in G(2)$  及びその被約表示:

$$\sigma = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_n} \quad (**)$$

(4) 表示  $(**)$  に次の線形変換を対応:  $s_\gamma := s_{i_n} \cdots s_{i_2} s_{i_1} \in \text{End}(V)$ .

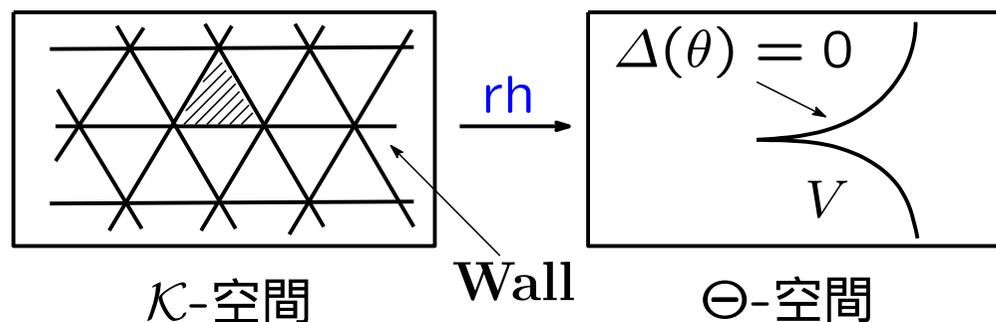
(5) トレース  $\alpha(\gamma) := \text{Tr}[s_\gamma : V \rightarrow V] \in \mathbb{Z}_{\geq 6}$ .

(6)  $\lambda(\gamma) :=$  次の二次方程式の大きな方の根.  $\lambda^2 - \alpha(\gamma)\lambda + 1 = 0$ .

## リーマン・ヒルベルト対応

$$\text{RH}_{z,\kappa} : \mathcal{M}_z(\kappa) \rightarrow \mathcal{S}(\theta) \quad \text{with} \quad \theta = \text{rh}(\kappa)$$

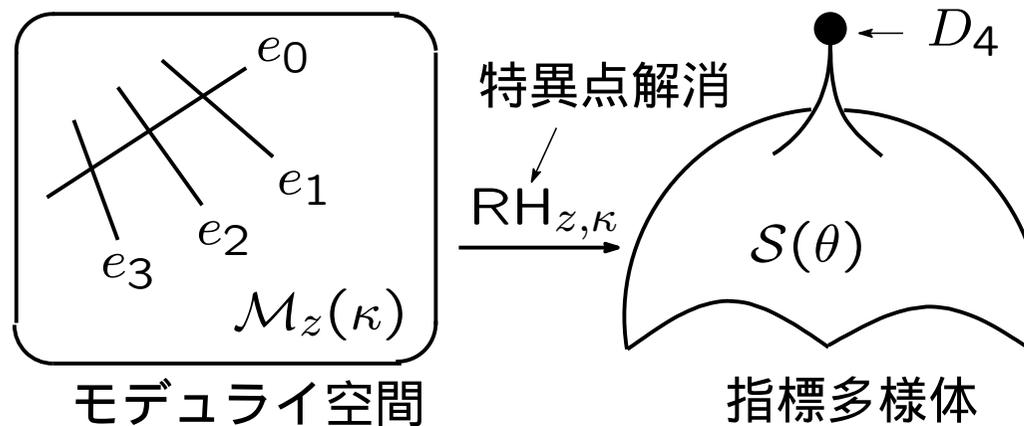
- $\mathcal{S}(\theta)$  : 指標多様体 [ $\theta \in \Theta \cong \mathbb{C}^4$ ] : アフィン三次曲面 により実現.
- $\exists$  パラメータの対応  $\text{rh} : \mathcal{K} \rightarrow \Theta$  s.t.
  - Wall に沿って分岐する  $W(D_4^{(1)})$ -分岐被覆
  - Wall を三次曲面の 判別式集合 の上に写す.
- $\mathcal{S}(\theta)$  の特異点構造は  $\mathcal{K}$  の stratification によって記述される.



リーマン・ヒルベルト問題の解 [ $\kappa \in \mathcal{K}$  に対し  $\theta := \text{rh}(\kappa) \in \Theta$ ]

- (1)  $\kappa \in \mathcal{K}(\ast)$  ならば  $S(\theta)$  はディンキン型  $\ast$  のクライン特異点をもつ.
- (2) リーマン・ヒルベルト対応  $\text{RH}_{z,\kappa} : \mathcal{M}_z(\kappa) \rightarrow S(\theta)$  は固有全射で解析的な最小特異点解消を与える.

- 例 • [Big open]  $\kappa \in \mathcal{K}(\emptyset)$  ならば  $S(\theta)$  は滑らかで  $\text{RH}_{z,\kappa}$  は双正則.
- $\kappa = (0, 0, 0, 0, 1)$  の時  $S(\theta)$  は  $D_4$  型のクライン特異点を1個もつ.



## 厳密な共役

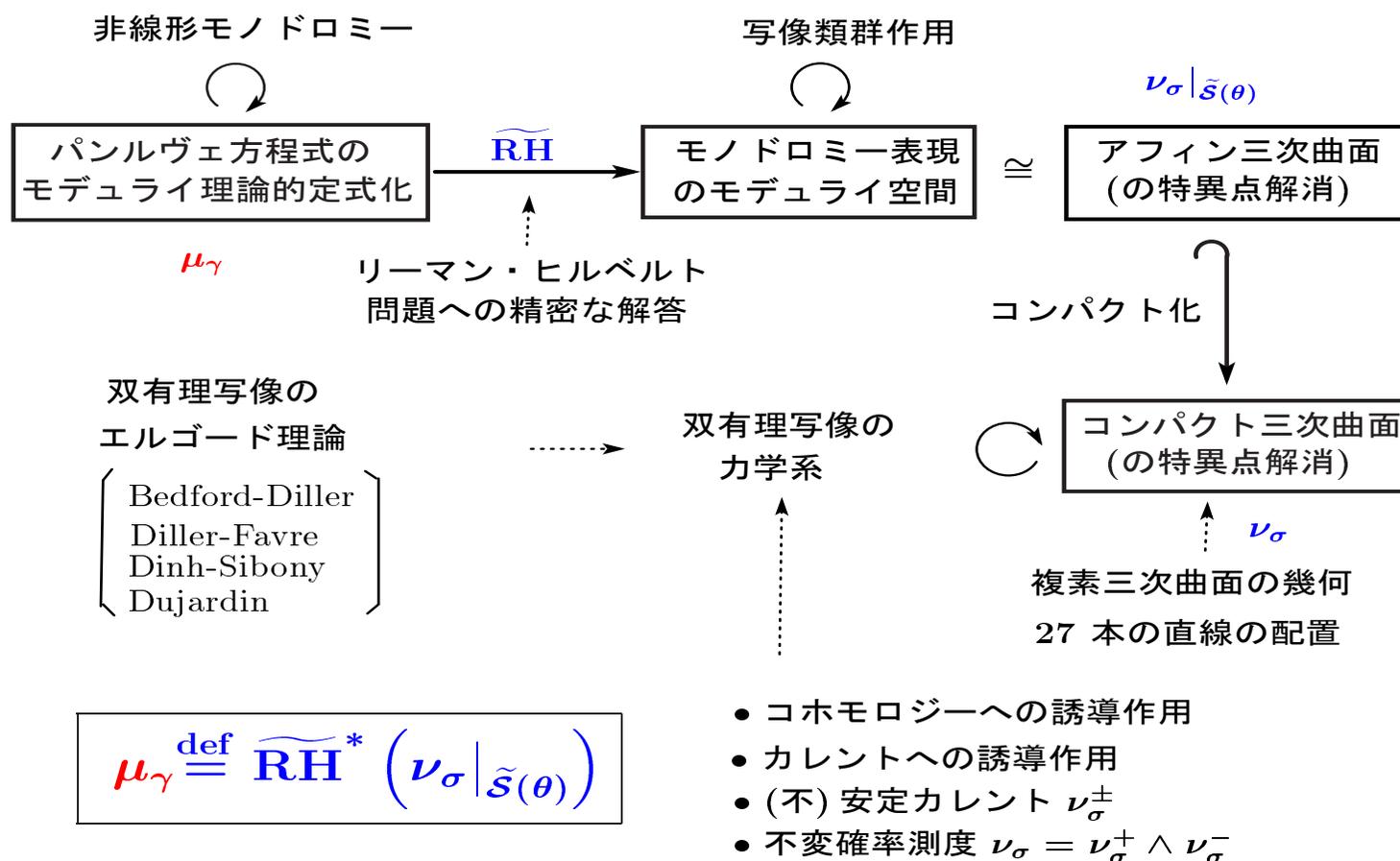
- 標準的な代数的最小特異点解消をとる:  $\phi : \tilde{\mathcal{S}}(\theta) \rightarrow \mathcal{S}(\theta)$ .
- 次の可換図式に持ち上がる:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_z(\kappa) & \xrightarrow{\widetilde{\text{RH}}_{z,\kappa}} & \tilde{\mathcal{S}}(\theta) \\ \parallel & & \downarrow \phi \\ \mathcal{M}_z(\kappa) & \xrightarrow{\text{RH}_{z,\kappa}} & \mathcal{S}(\theta) \end{array}$$

- 持ち上げられたリーマン・ヒルベルト対応:

$\widetilde{\text{RH}}_{z,\kappa} : \mathcal{M}_z(\kappa) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(\theta)$  は双正則となり厳密な共役を与える.

# パンルヴェ力学系の鳥瞰図



## 不変確率測度

- (不)安定カレントの外積 [  $\sigma$  : コンパクト曲面  $\bar{S}(\theta)$  上双有理 ]

$$\nu_\sigma = \nu_\sigma^+ \wedge \nu_\sigma^-$$

- グリーンカレントの外積 [  $\sigma$  : 非コンパクト曲面  $\tilde{S}(\theta)$  上双正則 ]

$$\nu_\sigma = dd^c G_\sigma^+ \wedge dd^c G_\sigma^-, \quad G_\sigma^\pm(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(\sigma)^n} \log^+ \|\sigma^{\pm n}(x)\|$$

- サドル周期点の一様分布:  $\nu_\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(\sigma)^n} \sum_{p \in \text{SPer}_n(\sigma)} \delta_p.$

- $\nu_\sigma$  : 混合的, 双曲的 maximum entropy 測度, 台はコンパクト in  $\tilde{S}(\theta)$ .

注. 古典的な複素エノン写像と似ている.

## 保存系の孤立周期点

$\#\text{Per}_N^i(\gamma; \kappa)$  の計算における問題:

リッカチ曲線が 保存系  $\gamma_* : \mathcal{M}_z(\kappa) \circlearrowright$  の 周期曲線 になり得る .

### 周期点の一般論の検討

- (1) アティヤ・ボットの公式  $\rightarrow$  保存系には使えない
- (2) シュブ・サリバンの定理 [ 固定点の局所指数の , 写像の反復合成に関する制御 ]  $\rightarrow$  孤立固定点でのみ有効

### 曲面上の面積保存双有理写像の周期点の一般論

エントロピーが正の写像に対して , 周期曲線が存在しても , それらを避けて , 孤立周期点の個数を勘定できる .

- (1) 斎藤秀司の不動点公式
- (2) 周期曲線の存在を許すシュブ・サリバン型の定理

## リッカチ曲線の近傍におけるカオス

- 可積分系業界：パウルヴェ型方程式の特殊解としてリッカチ解〔超幾何解〕を考えることは常套…  $\varepsilon$  近傍の解の性質にはあまり注目しない。
- ハミルトン系業界：特殊解の近傍での解析が，変分方程式〔解に沿う線形化〕を用いて行われる。

⋮

リッカチ解の周りでの非可積分性：線形微分方程式のガロア理論の応用として示される〔モラレス・ラミス〕

↓

力学系の立場から解の複雑性に関しより進んだ議論

一般的な  $\kappa \in \text{Wall}$  と任意の非初等的ループ  $\gamma$  に対して  $\gamma_* : \mathcal{M}_z(\kappa) \circlearrowright$  は，リッカチ曲線の任意の近傍にスメールの馬蹄をもつ。

## ランダム・モノドロミー

- 今迄：モノドロミー写像  $\gamma_* : \mathcal{M}_z(\kappa) \circlearrowleft$  を個々のループ  $\gamma$  に対して考察してきた。
- 今後：さまざまなループに沿うモノドロミー写像を一斉に扱い，それらの相互作用を研究すること。

〔問題〕 基本群  $\pi_1(Z, z)$  あるいは普遍コクセター群  $G = \text{UCG}(3)$  上のランダム・ウォークに関するモノドロミー写像の統計的性質を調べよ。

〔参考〕 一変数有理関数のランダム力学系〔角〕

非可換な有理関数たちの干渉により カオスが消える 現象が示されている。



パウルヴェ方程式のランダム・モノドロミーについてはどうであろうか？

## 結び

- 既約性：パウルヴェ方程式は，元々，古典的な関数を使って**求積できない**ような解をもつ微分方程式を見つけようという動機から発見された．
- 古典特殊解を除くすべての解は**実際に既約**であることが示された〔梅村・西岡など〕

⋮

**力学系の立場では**：主として初等的ループに沿うモノドロミーの性質を用いる比較的簡単な議論から従う〔カンタ・ロレイ〕

解の複雑さをより肯定的に記述する方向性の発展が望まれる …… 既に高度に発展した可積分系的な研究動向とは異なる方向性

⋮

今回のカオス力学系的視点は，その立場の始まりの一つにすぎない〔了〕

ご清聴ありがとうございました