作用素環への群作用の分類について

泉　正己
izumi@math.kyoto-u.ac.jp

京都大学大学院理学研究科

2010 年 9 月 23 日　名古屋大学

作用素環

ヒルベルト空間 H 上の有界作用素全体 $B(H)$ の部分代数で, 共役演算とノルム位相について閉じたものを C^*-環 (C^*-algebra) と呼ぶ.

$B(H)$ の部分代数で共役演算と弱作用素位相について閉じたものを フォン・ノイマン環 (von Neumann algebra) と呼ぶ.

これらを 作用素環（operator algebras） と呼ぶ.

共役: $\langle x\xi, \eta\rangle = \langle \xi, x^*\eta\rangle$, $\xi, \eta \in H$, $x \in B(H)$.
ノルム: $\|x\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|x\xi\|$.
弱作用素位相: セミノルム $B(H) \ni x \mapsto |\langle x\xi, \eta\rangle| \in \mathbb{R}_+$ の族により与えられる局所凸位相.

例

$\{\lambda_g\}_{g\in G}$ を離散群 Γ の左正則表現とする.
$(\lambda_g\xi)(h)=\xi(g^{-1}h)$, $\xi\in\ell^2(\Gamma)$.

$C_r^*\Gamma := \overline{\mathrm{span}\{\lambda_g\}_{g\in\Gamma}}^{\|\cdot\|}$ を Γ の 被約群 C^*-環と呼ぶ.
Γ が可換であれば $C_r^*\Gamma\cong C(\hat{\Gamma})$.
$C_r^*\mathbb{Z}\cong C(\mathbb{T})$.

$L\Gamma := \overline{\mathrm{span}\{\lambda_g\}_{g\in\Gamma}}^{w}$ を Γ の群フォン・ノイマン環と呼ぶ.
Γ が可換であれば $L\Gamma\cong L^\infty(\hat{\Gamma})$.
$L\mathbb{Z}\cong L^\infty(\mathbb{T})$.

目標

目標: 従順群の従順作用素環への作用を分類する.

なぜ群作用が大事か？

場の量子論や量子統計力学の作用素環を使った定式化において, 物理系の対称性が作用素環の（反）自己同型により記述されるため.

作用素環の構造を理解するためには, 自己同型群の構造を知る必要がある.
例： Connes の単射的因子環の分類理論.

従順性＝良い近似性

離散群 Γ が従順（amenable）
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 左不変な線型汎関数 $\varphi \in \ell^\infty(\Gamma)^*$ で $\varphi(1) = \|\varphi\| = 1$ を満たすものが存在する.

可解群は従順.
自由群 F_2 は非従順.

C^*-環において
従順性=核型性（nuclearity）
=completely positive approximation property,
(Connes, Haagerup, Choi-Effros, Kirchberg).

フォン・ノイマン環において
従順性=単射性（injectivity）=approximate finite dimensionality.

作用の同値関係

位相群 G から作用素環 A の自己同型群 $\mathrm{Aut}(A)$ への連続準同型 $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$ を G の A への作用と呼ぶ.

G-作用 α, β が 共役 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists \gamma \in \mathrm{Aut}(A)$ s.t. $\gamma \circ \alpha_g \circ \gamma^{-1} = \beta_g$.
G-作用 α, β が コサイクル共役 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ α のある摂動が β と共役.

連続写像 $u : G \to U(A) = \{u \in A \mid u^* = u^{-1}\}$ が α-コサイクル $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $u_{gh} = u_g \alpha_g(u_h)$.
$\alpha^u_g = \mathrm{Ad}\, u_g \circ \alpha_g$ は G-作用となり, α の u による摂動と呼ばれる.
ここで, $\mathrm{Ad}\, u(x) = uxu^*$ は $u \in U(A)$ が誘導する内部自己同型.

α と β がコサイクル共役であれば, それらによる接合積は同型 $A \rtimes_\alpha G \cong A \rtimes_\beta G$.

フォン・ノイマン環の基礎

中心が自明なフォン・ノイマン環を因子環（factor）と呼ぶ.
因子環は I 型, II_1 型, II_∞ 型, III 型に分類される.

- I 型: $B(H)$ と同型.
- II_1 型: 無限次元, トレース τ を持つ.
  τ は $\tau(xy) = \tau(yx)$, $\tau(1) = 1$ を満たす線型汎関数.
- II_∞ 型: $\mathrm{II}_1 \otimes B(\ell^2)$.
- type III: その他.
  冨田竹崎理論によりさらに III_λ 型 $(0 \leq \lambda \leq 1)$ に分類される.

II_1 型, II_∞ 型, III_λ 型 $(0 < \lambda \leq 1)$ の単射的因子環がそれぞれ唯一つ存在する (Connes, Haagerup).

例：$L\mathfrak{S}_\infty$ は単射的 II_1 型因子環.

単射的因子環への従順群作用

Theorem (Connes 75, Jones 80, Ocneanu 85)

任意の可算従順群は単射的 II_1 型因子環へ外部的に作用し, そのコサイクル共役類は一意的である.

他の単射的因子環への作用も完全に分類されている.
(竹崎正道, Sutherland, 河東泰之, 片山良一).

増田俊彦は最近, Evans と岸本晶孝が C^*-環への群作用の分類のために考案した intertwining argument を使うことにより, 型に依らない簡潔な証明を最近与えた.

コンパクト群の作用

α が G の M への作用のとき, α の不動点環を M^α と書く.
不動点環の相対可換子環 $M \cap M^{\alpha\prime} = \{x \in M \mid xy = yx, \forall y \in M^\alpha\}$ が自明なとき, α は極小的（minimal）であるという.

Theorem (Popa-Wassermann 92, 増田-戸松玲治 2007)

コンパクト群の単射的 II_1 型因子環と単射的 II_∞ 型因子環への極小的作用の共役類は一意的である.

増田 - 戸松は前定理を離散従順 Kac 環へ一般化し, 双対作用を考えることによりこの結果を得た.

Galois 対応

Theorem (泉-Longo-Popa 98)

α をコンパクト群 G の因子環 M への極小的作用とする.
このとき 閉部分群 $H \subset G$ 全体と, 中間因子環 $M^\alpha \subset P \subset M$ 全体の間に $H \mapsto M^{\alpha|_H} = P$ により与えられる一対一対応が存在する.

この結果は一般のコンパクト量子群に対して成り立つ.
（戸松 2009）.

量子群とポワッソン境界

コンパクト Lie 群 $G \subset U(N)$ の無限テンソル積作用

$$(M, \tau, \alpha) = \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} M_N(\mathbb{C}), \bigotimes_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N}\mathrm{Tr}, \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ad}\, g\right)$$ は典型的な極小作用.

無限テンソル積作用は一般のコンパクト量子群 $\mathbb{G}$ についても意味をなすが, それは極小的とは限らない.

$M \cap M^{\alpha\prime}$ は $\ell^\infty(\hat{\mathbb{G}})$ に作用するマルコフ作用素の非可換ポワッソン境界 と同一視される.
$\mathbb{G} = SU_q(2)$ の場合, $M \cap M^{\alpha\prime} \cong L^\infty(SU_q(2)/\mathbb{T})$ (泉 2002).

他の量子群については 泉-Neshveyev-Tuset 2006, 戸松 2007, Vaes-Vander Vennet 2008, 2010 を参照.

K-理論

Elliott プログラム
可分核型単純 C^*-環を K-理論的不変量により分類せよ.

KK-理論 $KK(\cdot, \cdot)$ は, C^*-環の圏から加群の圏への双関手.
$KK(\mathbb{C}, A) = K_*(A)$.

$\rho \in \mathrm{Hom}(A, B)$ は $KK(\rho) \in KK(A, B)$ を与える.
$\exists$ 積 $KK(A, B) \times KK(B, C) \ni (x, y) \mapsto x\#y \in KK(A, C)$.

C^*-環 A と B が KK-同値
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists x \in KK(A, B), \exists y \in KK(B, A)$ s.t. $x\#y = KK(\mathrm{id}_A)$, $y\#x = KK(\mathrm{id}_B)$.

UHF 環への $\mathbb{Z}$ 作用

C^*-環への群作用の分類についての本格的研究は, 1990 年代の岸本晶孝による Rohlin 性を持つ自己同型についての一連の研究により始まった.

Theorem (岸本 95)

UHF 環 $\bigotimes_{k=1}^{\infty} M_{n_k}(\mathbb{C})$ への *Rohlin* 性を持つ $\mathbb{Z}$-作用のコサイクル共役類は一意的である.

以後 Kirchberg 環の場合に限り最近の発展を解説する.

Kirchberg 環

単位元を持つ C^*-環 A が純無限（purely infinite）
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall a \in A_+ \setminus \{0\}$, $\exists x \in A$ s.t. $1 = x^* a x$.

$\mathbb{C}$ でない純無限可分核型単純 C^*-環を Kirchberg 環 と呼ぶ.

Example (Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$, $n = 2, 3, \cdots, \infty$)

生成元 $\{S_i\}_{i=1}^n$ と関係式 $S_i^* S_j = \delta_{ij} 1$, $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$ if $n < \infty$,
により定義される C^*-環 $\mathcal{O}_n$ は Kirchberg 環.

Theorem (Kirchberg, Phillips 2000)

Kirchberg 環は KK-理論により完全に分類される.

$\mathcal{O}_2$ と $\mathcal{O}_\infty$ の特殊性

Theorem (Kirchberg 94)

(1) 任意の単位元を持つ可分核型単純 C^*-環 A に対して
$A \otimes \mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_2$.
(2) 任意の *Kirchbeg* 環 A に対して $A \otimes \mathcal{O}_\infty \cong A$.

$\mathcal{O}_2 \overset{KK}{\sim} \{0\}$, $K_0(\mathcal{O}_2) = K_1(\mathcal{O}_2) = \{0\}$.
$\mathcal{O}_\infty \overset{KK}{\sim} \mathbb{C}$, $K_0(\mathcal{O}_\infty) = \mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_2) = \{0\}$.

$U(\ell^2)$ は $\mathcal{O}_\infty$ に外部的に作用するので, 任意の Kirchberg 環へも外部的に作用する.

良い群

$\mathbb{Z}$-作用は分類可能.

Theorem (中村英樹 1999)

Kirchberg 環 A への外部的 $\mathbb{Z}$-作用 α, β に対して次は同値：
(1) $KK(\alpha_1) = KK(\beta_1)$,
(2) α と β はコサイクル共役で, 共役写像 $\gamma \in \mathrm{Aut}(A)$ が $KK(\gamma) = KK(\mathrm{id}_A)$ を満たすように取れる.

一般に, $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(A)$ がホモトピックならば

$$K_*(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \cong K_*(A \rtimes_\beta \mathbb{Z}).$$

悪い群

有限群の作用の分類は困難である.
根拠：$\mathcal{O}_2 \overset{KK}{\sim} \{0\}$ にもかかわらず,

Theorem (泉 2004)

任意の *uniquely 2-divisible* 可算加群 G_0, G_1 に対して,
$\mathcal{O}_2$ 上の外部的 $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-作用 α が存在して

$$K_*(\mathcal{O}_2 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2) = G_*, \quad * = 0, 1.$$

さらに, 連続写像 $u : [0, \infty) \to U(\mathcal{O}_2)$ で次を満たすものが存在する：$u(t)^2 = 1$,

$$\alpha_1(x) = \lim_{t\to\infty} \operatorname{Ad} u(t)(x), \quad \forall x \in \mathcal{O}_2.$$

$K_*(\mathcal{O}_2 \rtimes_{\operatorname{Ad} u(t)} \mathbb{Z}_2) = \{0\}$ となることに注意.

位相幾何的構成

$B\Gamma$ を離散群 Γ の分類空間, $E\Gamma$ を $B\Gamma$ の普遍被覆空間とする.

例. $\Gamma = \mathbb{Z}^N$, $B\Gamma = \mathbb{T}^N$, $E\Gamma = \mathbb{R}^N$.

C^*-環 A への Γ-作用 α に対して, 主 $\mathrm{Aut}(A)$ 束 $\mathcal{P}_\alpha \to B\Gamma$ を $\mathcal{P}_\alpha = E\Gamma \times \mathrm{Aut}(A)/\sim$, $(x \cdot g, \sigma) \sim (x, \alpha_g \circ \sigma)$ により導入.

Γ が単連結可解 Lie 群 G の cocompact 格子のとき, $E\Gamma = G$ と取ることができ, $K_*(A \rtimes_\alpha \Gamma)$ は $\mathcal{P}_\alpha$ の同型類により決定されることがわかる.

予想

Conjecture

A を Kirchberg 環, Γ は $B\Gamma$ が 有限 CW 複体のホモトピー型を持つ離散従順群とする.
(1) A への外部的 Γ-作用 α, β がコサイクル共役である必要十分条件は, 主 $\mathrm{Aut}(A)_s$ 束 $\mathcal{P}^s_\alpha$ と $\mathcal{P}^s_\beta$ 同型であることである.
(2) A が強自己吸収的であり普遍係数定理を満たすとき（例えば $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_\infty$）, A への外部的 Γ-作用のコサイクル共役類は一意的.

- (1) の $\Rightarrow$ は常に正しい.
- 中村の定理から $\Gamma = \mathbb{Z}$ に対して予想は正しい.
- A が (2) の条件を満たすとき, Dadarlat 2007 により任意の n に対して $\pi_n(\mathrm{Aut}(A)) = \{0\}$ となり, $\mathcal{P}_\alpha$ は自明となる.

よって (1) から (2) が従う.

Poly-$\mathbb{Z}$ group actions

Theorem (泉-松井宏樹)

$\mathbb{Z}^2$ と $< a, b \mid aba^{-1}b = e >$ に対して予想 (1) は正しい.
任意の *poly-$\mathbb{Z}$* 群に対して予想 (2) は正しい.

離散群 Γ が poly-$\mathbb{Z}$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ Γ の正規列

$$\{e\} = \Gamma_0 \lhd \Gamma_1 \lhd \cdots \lhd \Gamma_m = \Gamma,$$

で $\Gamma_{i+1}/\Gamma_i \cong \mathbb{Z}^{n_i}$ となるものが存在する.

例: $\mathbb{Z}^n$, 離散ハイゼンベルグ群,
ねじれなしの有限生成冪零群,
単連結可解 Lie 群の cocompact 格子.

不変量による分類

Γ-作用 α, β が $KK(\alpha_g) = KK(\beta_g)$ を満たすとき, $\mathrm{Aut}(A \otimes \mathbb{K})$ の中のホモトピー $\{\sigma_g^{(t)}\}_{t\in[0,1]}$ で $\alpha_g \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ と $\beta_g \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ を結ぶものが存在.

$[0,1] \ni t \mapsto \sigma_g^{(t)} \circ \sigma_h^{(t)} \circ {\sigma_{gh}^{(t)}}^{-1} \in \mathrm{Aut}(A \otimes \mathbb{K})_0$ はコホモロジー類 $c(\alpha, \beta) \in H^2(\Gamma, \pi_1(\mathrm{Aut}(A \otimes \mathbb{K})_0)) \cong H^2(\Gamma, KK^1(A, A))$ を与える.

Theorem (泉-松井)

Γ を $\mathbb{Z}^2$ または $< a, b \,|\, aba^{-1}b = e >$ とする.
Kirchberg 環 A への外部的 Γ-作用 α, β に対して次は同値*:*
(1) α は β コサイクル共役で, 共役写像 $\gamma \in \mathrm{Aut}(A)$ が $KK(\gamma) = KK(\mathrm{id}_A)$ を満たすように取れる.
(2) $KK(\alpha_g) = KK(\beta_g)$ かつ $c(\alpha, \beta) = 0$.

核型安定有限 C^*-環への群作用の分類

岸本晶孝, J. Operator Theory **40** (1998), 277–294,
AT 環への $\mathbb{Z}$-作用.

勝良健史-松井宏樹, Adv. Math. **218** (2008), 940–968,
UHF 環への $\mathbb{Z}^2$-作用.

松井宏樹, Comm. Math. Phys. **297** (2010), 529–551,
AF 環への $\mathbb{Z}^2$-作用.
arXiv:1004.3103, to appear in J. Reine Angew. Math,
UHF 環への $\mathbb{Z}^N$-作用.

佐藤康彦, J. Funct. Anal. **259** (2010), 453–476,
Jiang-Su 環への $\mathbb{Z}$-作用.

松井宏樹-佐藤康彦, arXiv:0912.4804,
Jiang-Su 環への $\mathbb{Z}^2$-作用.