複素積分 vs トロピカル積分

岩尾慎介
日本学術振興会・特別研究員（ＰＤ）

東京大学大学院数理科学研究科

2010 年 9 月 22 日

本研究は科研費 (課題番号:21-7090) の助成を受けたものである。

はじめに

トロピカル幾何とは？

はじめに

トロピカル幾何とは？ → ‘$\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ **上の代数幾何．**’

トロピカル semifield とは

トロピカル semifield $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ の加法・乗法を，以下で定義する:

$$\text{加法} \cdots \min[X, Y], \qquad \text{乗法} \cdots X + Y.$$

（$\mathbb{T}$ の加法を $\oplus$，乗法を $\otimes$ と書くことにして，

$$X \oplus Y := \min[X, Y], \qquad X \otimes Y := X + Y,$$

等と記すことも多い.）

$\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, **加法…min，乗法…+.**

- **加法と乗法は可換である．**
- **加法の単位元は** $+\infty \in \mathbb{T}$ **である．**
  ($\min[X, +\infty] = \min[+\infty, X] = X$ for all $X \in \mathbb{T}$**)．**
- **乗法の単位元は** $0 \in \mathbb{T}$ **である．**
  ($X + 0 = 0 + X = 0$ for all $X \in \mathbb{T}$**)．**
- **分配法則が成立する．**
  ($X + \min[Y, Z] = \min[X + Y, X + Z]$**)．**

$\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, 加法…min，乗法…$+$.
加法の単位元…$+\infty$，乗法の単位元…0．

- $\mathbf{X} \in \mathbb{T} \setminus \{+\infty\}$ の，乗法に関する逆元は $-\mathbf{X} \in \mathbb{T}$ である．
  （$\mathbf{X} + (-\mathbf{X}) = (-\mathbf{X}) + \mathbf{X} = 0$）．
- 加法に関する逆元は，必ずしも存在しない！なぜか ??

$\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, 加法⋯min，乗法⋯+.
加法の単位元⋯$+\infty$，乗法の単位元⋯0.

$X \in \mathbb{T} \setminus \{+\infty\}$ なる X に対して，

$$\min[X, Y] = +\infty$$

を満たすような $Y \in \mathbb{T}$ は存在しないから.

トロピカル多項式（2 変数）

以下のような F(X, Y) を，文字 X, Y に関する，トロピカル多項式という:

$$F(X,Y) := \min_{w=(w_1,w_2)\in S} [A_w + w_1 X + w_2 Y], \qquad A_w \in \mathbb{Q}.$$

ここで，$S \subset \mathbb{Z}^2$ は，有限部分集合とする．

特に，$F(X,Y) = A + w_1 X + w_2 Y$，（$(w_1, w_2) \in \mathbb{Z}^2$）と書けるとき，F をトロピカル単項式という．

トロピカル曲線

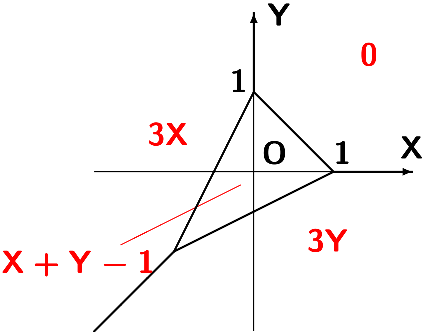
$F(X,Y) = \min_{w \in S} [A_w + w_1 X + w_2 Y]$ の定めるトロピカル曲線を，以下で定まる $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする：

$$\left\{ (X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2 \,;\; \begin{array}{l} \text{関数 } F(X,Y) \text{ は,} \\ \text{点 } (X,Y) = (X_0,Y_0) \text{ で微分できない} \end{array} \right\}.$$

例

$$\{(X_0, Y_0)\,;\, F(X,Y)\text{ は点 }(X,Y) = (X_0, Y_0)\text{ で微分できない}\}.$$

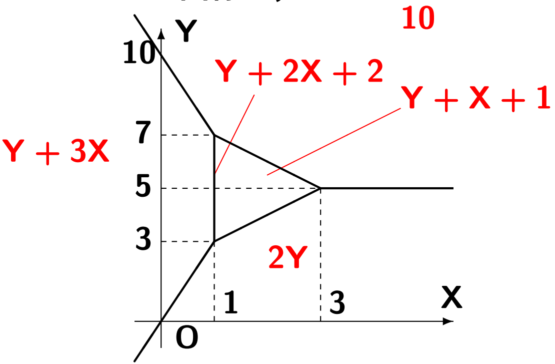
$F(X,Y) = \min[3X, 3Y, X+Y-1, 0]$ としよう．このとき，F から定まるトロピカル曲線は，下図で与えられる：



例

$$\{(X_0, Y_0)\,;\ F(X, Y) \text{ は点 } (X, Y) = (X_0, Y_0) \text{ で微分できない}\}.$$

$G = \min\,[2Y, Y + 3X, Y + 2X + 1, Y + X + 1, Y + 5, 10]$ とする．対応するトロピカル曲線は，



$\widetilde{K} := \bigcup_{d\geq 0} \mathbb{C}((t^{1/d}))$: 文字 t に関する $\mathbb{C}$ 上ピュイズー級数体.
$K \subset \widetilde{K}$: 収束ピュイズー級数体.

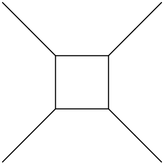
$$K \ni c_n t^{n/d} + c_{n+1} t^{(n+1)/d} + c_{n+2} t^{(n+2)/d} + \cdots, \quad c_j \in \mathbb{C}, c_n \neq 0.$$

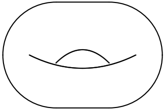
ここで，付値関数 $\mathrm{val} : K \to \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ を以下で定める.

$$\mathrm{val}\,(c_n t^{n/d} + c_{n+1} t^{(n+1)/d} + \cdots) = \frac{n}{d},\ \mathrm{val}\,(0) = +\infty.$$

Viro のパッチワーキング

トロピカル曲線 —— K 上の代数曲線 —— 複素曲線（Riemann **面**）





K 上の平面曲線→トロピカル平面曲線

x, y, x^{-1}, y^{-1} に関する K 上多項式 $f(x, y) \in K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ をとる：

$$f(x, y) = \sum_{w=(w_1,w_2)\in S} a_w \cdot x^{w_1} y^{w_2}, \quad (a_w \in K \setminus \{0\}).$$

この f に対し，以下の３つのものを定義する：

- 代数曲線 $V(f) := \{(x, y) \in (K \setminus \{0\})^2 \mid f(x, y) = 0\}$.
- トロピカル多項式

$$\mathrm{Trop}_f(X, Y) := \min_{w\in S} [\mathrm{val}\,(a_w) + w_1 X + w_2 Y].$$

- $TV(f) := (\mathrm{Trop}_f(X, Y)$ の定めるトロピカル曲線$)$.

例

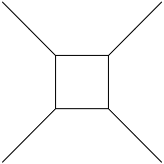
$f(x,y) = x^3 + y^3 + t^{-1}xy + 1$ に対し,

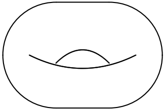
$\mathrm{Trop}_f(X,Y) = \min[3X, 3Y, X+Y-1, 0]$.

$g = y^2 + y(x^3 + tx^2 + t^2x + t^5) + t^{10}$ に対し,

$\mathrm{Trop}_g(X,Y) =$
$\min[2Y, Y+3X, Y+2X+1, Y+X+1, Y+5, 10]$.

トロピカル曲線 —— K 上の代数曲線 —— 複素曲線（Riemann 面）





TV(f) —— V(f)

K 上の平面曲線→複素曲線

文字 t に，小さい数 $\underline{t} > 0$ を代入すれば良い．

$f(x, y) = x^3 + y^3 + t^{-1}xy + 1$ ： K 上多項式．

$f(x, y) = x^3 + y^3 + \underline{t}^{-1}xy + 1$ ： $\mathbb{C}$ 上多項式

（厳密には各 $t^{1/d} \mapsto \underline{t}^{1/d}$ の分岐を一つ一つ定めなければならないが，常に $\underline{t}^{1/d} \in \mathbb{R}_{>0}$ としておく.）

以下では，代数曲線 C が K 上のものであることを強調したいときは

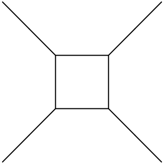
$$「C/K」$$

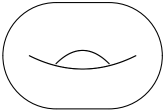
と書くことにし，代入 $t \mapsto \underline{t}$ によって得られる複素曲線を表したい時は

$$「C_{\underline{t}}/\mathbb{C}」$$

と書くことにする．

トロピカル曲線 —— K 上の代数曲線 —— 複素曲線（Riemann 面）





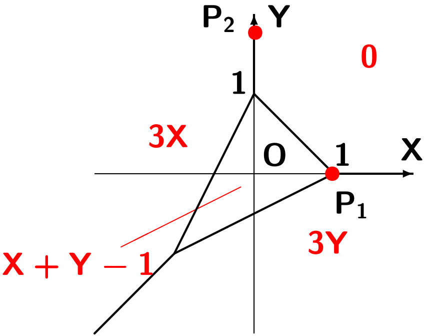
$$\mathbf{TV(f)} \quad \text{——} \quad \mathbf{V(f)/K} \quad \text{——} \quad \mathbf{V(f)}_{\underline{t}}/\mathbb{C}$$

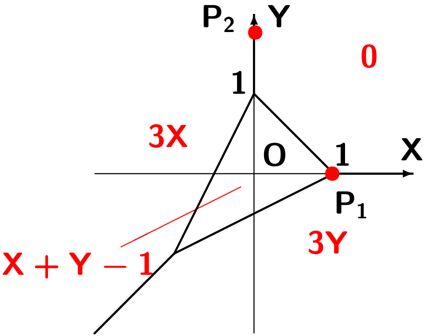
複素曲線 vs Tropical 曲線（パッチワーク）

$$f = x^3 + y^3 + t^{-1}xy + 1.$$
$$\mathrm{Trop}_f(X, Y) = \min[3X, 3Y, X + Y - 1, 0].$$

代数曲線 $C/K = V(f)/K$，トロピカル曲線 $\mathrm{Trop}\, C := TV(f)$.

Trop C 上に 2 点 $P_1 : (X, Y) = (1, 0)$，$P_2 : (X, Y) = (0, 2)$ をとる.





各 P_i に対して，パッチ多項式 f^{P_i} を以下で定める：

$$f^{P_1} = y^3 + t^{-1}xy + 1, \qquad f^{P_2} = x^3 + 1.$$

$$f = x^3 + y^3 + t^{-1}xy + 1.$$

各 f^{P_i} に対して，代数曲線 $V(f^{P_i})$ を C^{P_i} と書こう．この C^{P_i} を，点 $P_i \in \mathrm{Trop}\, C$ に対応するパッチという．

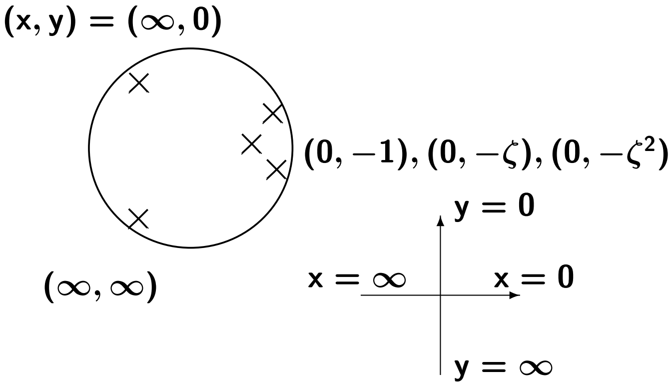
パッチも K 上の代数曲線であることを強調するときは「C^{P_i}/K」，小さい $\underline{t}$ を代入して得られる Riemann 面を表す時は「$C_{\underline{t}}^{P_i}/\mathbb{C}$」と記すことにする．

$$V(f^{P_1}) = V(y^3 + t^{-1}xy + 1),$$
$$V(f^{P_2}) = V(x^3 + 1) = V(x + 1) \sqcup V(x + \zeta) \sqcup V(x + \zeta^2).$$

(ζ は 1 の原始 3 乗根).

十分小さい $\underline{t} > 0$ に対して，Riemann 面 $C_{\underline{t}}^{P_i}/\mathbb{C}$ の絵を描く：

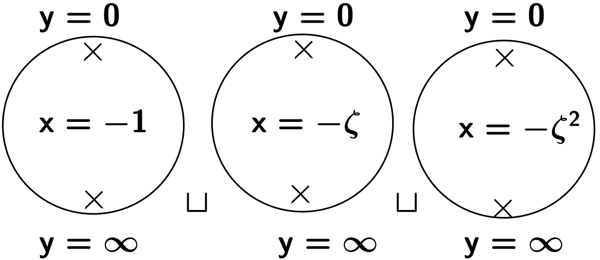
$V(f^{P_1}) =$



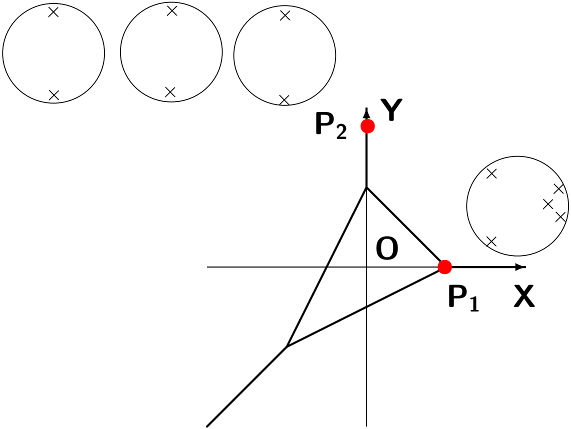
$$V(f^{P_1}) = V(y^3 + t^{-1}xy + 1).$$

十分小さい $\underline{t} > 0$ に対して，Riemann 面 $C_{\underline{t}}^{P_i}/\mathbb{C}$ の絵を描く：

$V(f^{P_2}) =$

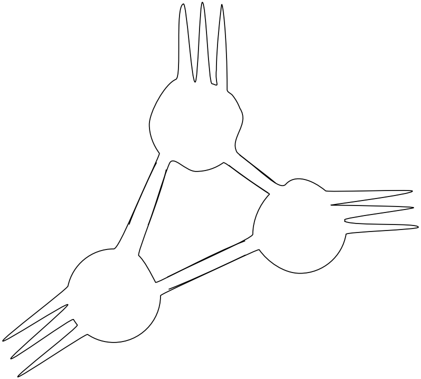


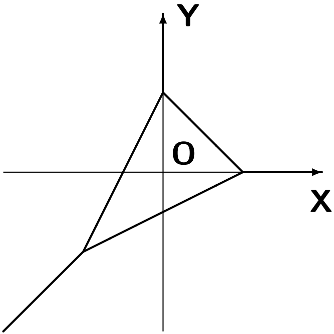
$$V(f^{P_2}) = V(x+1) \sqcup V_K(x+\zeta) \sqcup V_K(x+\zeta^2).$$



各 P $\in \mathrm{Trop}$ C に，パッチを当てはめていく．

以下の図が完成する．





Theorem

(i) C/K が既約かつ非特異，(ii) 全ての点 $P \in \mathrm{Trop}\, C$ に対して C^P/K が被約（可約でもよい）かつ非特異であるとき，ある $\delta > 0$ が存在して，

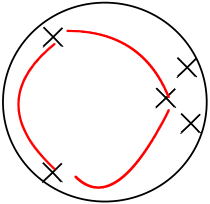
$0 < \underline{t} < \delta \quad \Rightarrow$
パッチワーキングで得られた図が，$C_{\underline{t}}/\mathbb{C}$ と同相.

Riemann 面の実部

各パッチに，直接実部 (x 座標・y 座標ともに実数の部分) を書き込んでみよう：

$$(x, y) = (\infty, 0)$$

$V(f^{P_1}) =$



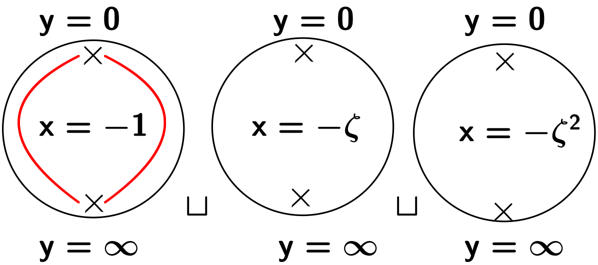
$(0, -1), (0, -\zeta), (0, -\zeta^2)$

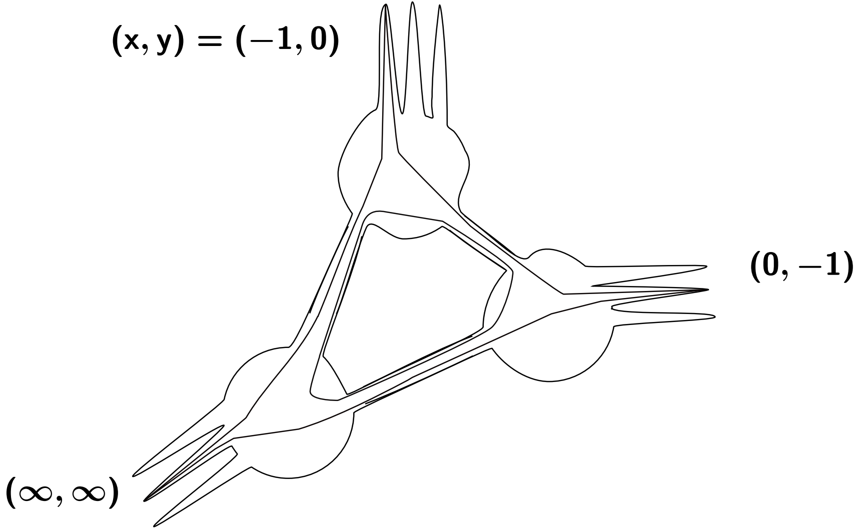
(∞, ∞)

$$V(f^{P_1}) = V(y^3 + t^{-1}xy + 1).$$

$y^3 + t^{-1}xy + 1 = 0$ より $x = t(y^3 + 1)/y.$

$V(f^{P_2}) =$





$$f = x^3 + y^3 + t^{-1}xy + 1.$$

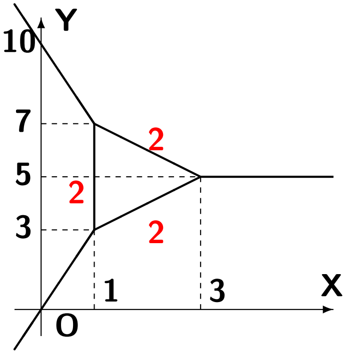
トロピカル曲線上の積分理論

以下，$\Gamma := \mathrm{TV}(f) \subset \mathbb{R}^2$ をトロピカル平面曲線とする．(Γ の各線分の傾きは必ず有理数となる．)

γ を，Γ 上のある線分とし，その方向ベクトルを (p,q) とする．p と q は互いに素の整数として良い．このとき，γ の「格子長」$||\gamma||$ を，

$$||\gamma|| := \frac{\{\gamma \text{ のユークリッド長}\}}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

と定義する．



Γ 上の向き付きの道全体の集合を $\mathrm{path}(\Gamma)$ **と書くことにしよう．また，**$\mathrm{path}(\Gamma)$ **の元の形式和** $\gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ **の全体の集合を** $\mathcal{P}(\Gamma)$ **と書く．**

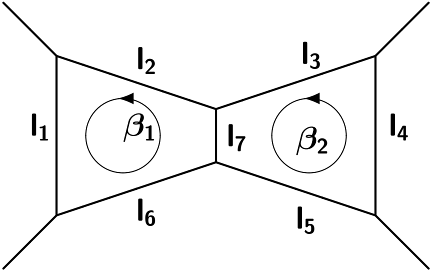
トロピカル双線形形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad : \quad \mathcal{P}(\Gamma) \times \mathcal{P}(\Gamma) \to \mathbb{R}$$

を，以下の手順で定義する:
(i) γ_1 と γ_2 がともに自己交差を持たず，さらに共通部分 $\gamma_1 \cap \gamma_2$ が線分であるとき，$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle := \mathrm{sgn}(\gamma_1, \gamma_2) \times ||\gamma_1 \cap \gamma_2||$ と定める．ただし，$\mathrm{sgn}(\gamma_1, \gamma_2)$ は，γ_1 と γ_2 の向きが $\gamma_1 \cap \gamma_2$ 上において同じ向きであるときは $+1$，そうでないときは -1 とする．
(ii) 一般の場合，γ_1 と γ_2 を細かく分解し，(i) に帰着させる:
$\gamma_1 = \sum_i \gamma_{1,i}$，$\gamma_2 = \sum_j \gamma_{2,j}$ と分解して，
$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle := \sum_{i,j} \langle \gamma_{1,i}, \gamma_{2,j} \rangle$ と定める.

例

$\langle \beta_1, \beta_1 \rangle = \mathsf{l}_1 + \mathsf{l}_2 + \mathsf{l}_6 + \mathsf{l}_7$, $\langle \beta_2, \beta_2 \rangle = \mathsf{l}_3 + \mathsf{l}_4 + \mathsf{l}_5 + \mathsf{l}_7$,
$\langle \beta_1, \beta_2 \rangle = \langle \beta_2, \beta_1 \rangle = -\mathsf{l}_7$ である．



$\mathsf{H}_1(\Gamma, \mathbb{Z})$：$\Gamma$ 上の閉路のみから生成される $\mathcal{P}(\Gamma)$ の部分群．
（$g := \dim_{\mathbb{Z}} \mathsf{H}_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ と書く．）

トロピカル双線形形式を $\mathsf{H}_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ に制限したものも，引き続き

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad : \quad \mathsf{H}_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \times \mathsf{H}_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$$

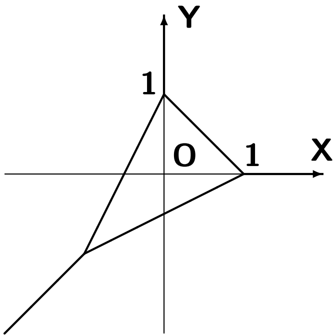
と書く．

$\beta_1, \ldots, \beta_g$: $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ の基底．
このとき，トロピカル曲線 Γ の周期行列 B_Γ を，

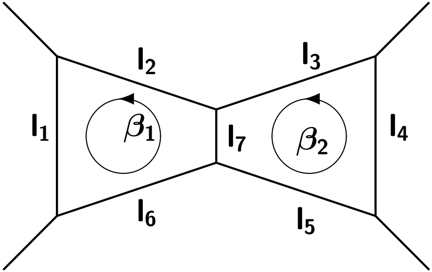
$$B_\Gamma := (\langle \beta_i, \beta_j \rangle)_{i,j=1}^{g}.$$

で定義する．

例



$$B = 5.$$



$$
\begin{aligned}
B_\Gamma &= \begin{pmatrix} \langle \beta_1, \beta_1 \rangle, \langle \beta_2, \beta_1 \rangle \\ \langle \beta_1, \beta_2 \rangle, \langle \beta_2, \beta_2 \rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} l_1 + l_2 + l_6 + l_7 \,, & -l_7 \\ -l_7 & , l_3 + l_4 + l_5 + l_7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Riemann 面上の積分理論

C を種数 g のコンパクト Riemann 面とする．

$\alpha_1, \ldots, \alpha_g; \beta_1, \ldots, \beta_g$：$H_1(C, \mathbb{Z})$ の標準基底（α_i と α_j，β_i と β_j の交差数は 0，α_i と β_j の交差数は $\delta_{i,j}$）．

$\omega_1, \ldots, \omega_g$：$C$ 上正則 1-形式で，$\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{i,j}$ を満たすもの．

C の周期行列とは，以下で定まる $g \times g$ 行列のことである:

$$B_C := \left(\int_{\beta_i} \omega_j \right)_{i,j=1}^{g}.$$

主定理

$f \in K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を多項式とし，$C = V_K(f)$, $\mathrm{Trop}\, C = TV(f)$ とする．C は，Theorem1 の条件を満たしていると仮定する．Theorem1 によって描かれる $C_{\underline{t}}/\mathbb{C}$ の概形をもとに，$H_1(C_{\underline{t}}/\mathbb{C}\,;\,\mathbb{Z})$ の元 $\beta_1, \ldots, \beta_g$ の位置と，$H_1(\mathrm{Trop}\, C\,;\,\mathbb{Z})$ の元 $\beta_1, \ldots, \beta_g$ の位置が一致するように H_1 たちの基底を定義しておく．このとき，

Theorem ([4])

$$B_{C_{\underline{t}}} \sim \frac{\log \underline{t}}{2\pi i} \cdot B_{\mathrm{Trop}\, C} \qquad (\underline{t} \to 0^+)$$

が成立する．

- M. Baker and S. Norine, "Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph", Advances in Mathematics, **205** (2007) 766–788
- L. Caporaso and F. Viviani, "Torelli theorem for graphs and tropical curves", Duke Math. J **153** (2010) 129–171
- A. Gathmann and M. Kerber, "A Riemann-Roch theorem in tropical geometry", Mathematische Zeitschrift, **259** (2007) 217–230
- S. Iwao, "Integration over Tropical Plane Curves and Ultradiscretization", International Mathematics Research Notices **2010** (2009) 112-148,
- G. Mikhalkin and I. Zharkov, "Tropical curves, their Jacobians and Theta-functions", arXiv/math-AG/0612267v2

- D. Mumford, C. Musili, M. Nori, E. Previato and M. Stillman, “Tata Lectures on Theta I,II (Progress in mathematics; v.28)”, ed. Bass H, Oesterlé J and Weinstein A (Berlin: Birkhäuser)
- O. Viro, “Gluing algebraic hypersurfaces and constructions of curves (Russian)”, Tezisy Leningradskoj Mezhdunarodnoj Topologicheskoj Konferencii 1982, Nauka (1983) 149-197.
- O. Viro, “Dequantization of Real Algebraic Geometry on Logarithmic Paper”, text for students on web (http://www.pdmi.ras.ru/ olegviro/dequant/index.html)