

# 散逸系の数学的構造

## ～ その解明に向けて ～

八木厚志（大阪大学大学院情報科学研究科）

### 1 自己組織化

いくつかの種により構成されたシステムが、種間の相互作用により外部から直接的な力を受けることなしに何かの構造体を自律的に創り出すことを自己組織化と呼ぶ。このような現象は、自然科学は元より、生命科学や社会科学にも観られる普遍的なものと考えられる。このような現象を数学的に解析し何か一般的な特性を探ることは大変興味深いことと思われる。

Prigogine を中心とするブリュッセル学派は、生態学の自己組織化現象の典型例としてシロアリの塚構築に注目している ([1, 第18章] 参照)。シロアリ達は一定の割合で土を銜えて違う場所に運ぶ、このとき銜えられた土にはフェロモンが注入される。アリ達はまた一定の割合で運搬中の土を口から離して置く。このようにして置かれた土からは、フェロモンが放出されこのフェロモンはまた他のアリ達を誘引する。このようなシロアリと堆積土壌との間のポジティブ・フィードバック (Maruyama [2] 参照) が、僅かなゆらぎを拡散効果に打ち勝って大きく成長させ最終的には構造物 (アリ塚) を創発させる。多くのゆらぎは散逸性により消滅するが、ある種のゆらぎだけはシステム内に流れこむエネルギーを燃料としてポジティブ・フィードバックにより成長し一定の秩序構造を創り出す、このような描像をブリュッセル学派は描き出した。同学派の Deneubourg 等 [3, 4] はその過程を記述する発展方程式として、次のようなものを提案している。

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - \mu\nabla \cdot [u\nabla\rho] - cu + f, & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -dv + \nu \left(1 - \frac{v}{K}\right) u & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = b\Delta\rho - g\rho + \zeta v & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), \rho(x, 0) = \rho_0(x) & \Omega \end{cases}$$

ここで、 $\Omega$  は3次元有界領域、 $u$  は土を運ぶアリの密度分布、 $v$  は堆積土壌の

密度分布,  $\rho$  は土から放出されたフェロモンの濃度分布を表す。移流項  $\nabla \cdot [u \nabla \rho]$  はシロアリの走化性を表す。 $a, b$  は, 拡散係数を,  $c, d, f, g$  および  $\mu, \nu, \zeta$  は正の定数を,  $K$  は密度限界をそれぞれ表す。本講演では, この問題を中心に数学的構造を調べて行くことにする。

## 2 指数アトラクタ

自己組織化するシステムのダイナミックスは, 物理学に習って発展方程式から定まる一つの力学系として表現することにする。シロアリの塚構築の場合は, 状態空間は3つの分布関数の組み  $(u, v, \rho)$  であるから, 無限次元力学系を考える必要がある。無限次元力学系の理論は, 関数解析学 (Yosida [5] 参照) を舞台にして Babin-Vishik [6] や Temam [7] 等により築かれた。

複素 Banach 空間  $X$  を考える, そのノルムを  $\|\cdot\|$  と表す。 $\mathcal{X}$  を  $X$  の部分集合とする。 $\mathcal{X}$  はノルム  $\|\cdot\|$  から導入される距離により距離空間となる。 $0 \leq t < \infty$  を時間変数とする。各  $t$  について,  $\mathcal{X}$  を定義域かつ値域とする非線形作用素  $S(t)$  が定まっており以下の条件:

1.  $S(0) = 1$  ( $1$  は  $\mathcal{X}$  の恒等写像);
2.  $S(t)S(s) = S(t+s), 0 \leq s, t < \infty$  (半群性);
3.  $G(t, U) = S(t)U$  により定義される写像  $G: [0, \infty) \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  は連続

が満たされているものとする。このとき作用素族  $\{S(t)\}_{0 \leq t < \infty}$  を相空間  $\mathcal{X}$  上の連続半群と呼ぶ。連続関数  $S(\cdot)U: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{X}$  の軌跡を始点  $U \in \mathcal{X}$  から発する軌道という。相空間内のこのような軌道全体を  $(S(t), \mathcal{X}, X)$  と表記し力学系と呼ぶ。

**定義 2.1.** 力学系  $(S(t), \mathcal{X}, X)$  において集合  $A \subset \mathcal{X}$  が以下の条件:

1.  $A$  は  $X$  のコンパクト集合;
2. すべての  $0 \leq t < \infty$  について,  $S(t)A = A$  ( $A$  は狭義不変集合);
3.  $A$  は  $\mathcal{X}$  のすべての有界集合  $B$  を誘引する, 即ち  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(S(t)B, A) = 0$

を満たすとき,  $A$  はこの力学系のグローバル・アトラクタと呼ばれる。

ここで,  $h(\cdot, \cdot)$  は集合の Hausdorff 擬距離である。

グローバル・アトラクタは, 散逸力学系の極限集合である。しかし, もっと強い絞り込み特性とロバスト性をもった極限集合として, Eden-Foias-Nicolaenko-Temam [8] により導入された指数アトラクタの概念を用いる。

**定義 2.2.** 力学系  $(S(t), \mathcal{X}, X)$  はグローバル・アトラクタ  $A$  を有するとする。集合  $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$  が以下の条件:

1.  $\mathcal{M}$  は  $X$  のコンパクト集合で  $A \subset \mathcal{M} \subset X$ , 有限フラクタル次元をもつ;
2. すべての  $0 \leq t < \infty$  について,  $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$  ( $\mathcal{M}$  は不変集合);
3.  $\mathcal{M}$  は  $X$  のすべての有界集合  $B$  を指数的に誘引する, 即ち  $h(S(t)B, \mathcal{M}) \leq C_B e^{-kt}$ ,  $0 \leq t < \infty$  ここで  $k > 0$  は  $B$  に依存しない指数,  $C_B > 0$  は  $B$  に依存する定数

を満たすとき,  $\mathcal{M}$  はこの力学系の指数アトラクタと呼ばれる。

力学系に指数アトラクタが存在するための, 半群  $S(t)$  に関する十分条件として Efendiev-Miranville-Zelik [9] は次のような縮小作用素のコンパクト摂動条件を示した。適当な時刻  $t^* > 0$  において作用素は  $S(t^*) = S_0 + K$  と分解され

$$(2) \quad \|S_0 U - S_0 V\| \leq \delta \|U - V\|, \quad U, V \in X$$

ただし  $\delta$  は  $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$  であるような定数であり,  $K$  は  $X$  から,  $X$  にコンパクトに埋め込まれる第2の Banach 空間  $Z$  への写像であり, 適当な定数  $L > 0$  により Lipschitz 条件

$$(3) \quad \|KU - KV\|_Z \leq L \|U - V\|_X, \quad U, V \in X$$

を満たす。このような摂動条件 (2), (3) から指数アトラクタが構成された。

初期値問題 (1) については,  $\Omega$  を  $\mathbb{C}^3$  級3次元有界領域とし, 全体空間を

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ \rho \end{pmatrix}; u \in L_2(\Omega), v \in H^1(\Omega), \rho \in H^1(\Omega) \right\}$$

と定めることにより力学系を構成することができ, さらに半群についての摂動条件を示すことにより指数アトラクタを構成することができる。

### 3 不安定性

ある種のゆらぎが成長し秩序構造が創発することを, 空間一様な定常解が不安定化することに対応させて考えることにする。ポジティブ・フィードバックが散逸効果より弱い場合は空間一様構造は安定に存在する, しかしポジティブ・フィードバックの力が散逸効果を上回るようになると一様定常解は不安定となり, 一様定常解の周りに生じたゆらぎは成長して非一様な状態へと移って行く。今の問題 (1) では, 唯一つの一様定常解  $\bar{U} = (\frac{f}{c}, \frac{fKv}{cdK+fv}, \frac{fKv\zeta}{g(cdK+fv)})$  が存在する。

一般に、力学系  $(S(t), \mathcal{X}, X)$  において  $\bar{U} \in \mathcal{X}$  がすべての  $t$  について  $S(t)\bar{U} = \bar{U}$  を満たすとき平衡点と呼ばれる。平衡点について

$$\mathcal{M}_-(\bar{U}) = \{U_0 \in \mathcal{X}; \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)U_0 = \bar{U}\},$$

$$\mathcal{M}_+(\bar{U}) = \{U_0 \in \mathcal{X}; \exists U : (-\infty, 0] \rightarrow \mathcal{X},$$

$$S(t)U(-\tau) = U(t - \tau) \ (0 \leq t \leq \tau), U(0) = U_0, \lim_{t \rightarrow \infty} U(-t) = \bar{U}\}$$

により、安定多様体、不安定多様体がそれぞれ定義される。もし  $\mathcal{M}_+(\bar{U}) \neq \{\bar{U}\}$  であれば  $\bar{U}$  は不安定であると言われる。

無限次元力学系においても、有限次元の場合と類似に次のような線形化安定・不安定性原理が成り立つ。簡単のため、相空間は全体空間とする、即ち  $\mathcal{X} = X$ 。さらに、適当な時刻  $t^* > 0$  について作用素  $S^* = S(t^*)$  は  $\bar{U}$  の近傍において  $\mathcal{C}^{1+\theta}$  ( $0 < \theta < 1$ ) 級であるとする。 $\bar{U}$  での Fréchet 微分を  $[S^*]'\bar{U}$  で表す。次の2条件：

1.  $[S^*]'\bar{U}$  のスペクトル集合は単位円により分離される、即ち  $\sigma([S^*]'\bar{U}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\} = \emptyset$ ;
2. スペクトル分離により誘導される空間分割を  $X = X_i + X_e$ 、作用素分割を  $[S^*]'\bar{U} = S_i + S_e$  とする (このとき  $\sigma(S_i) = \sigma([S^*]'\bar{U}) \cap \{\lambda; |\lambda| < 1\}$  かつ  $\sigma(S_e) = \sigma([S^*]'\bar{U}) \cap \{\lambda; |\lambda| > 1\}$  となる)。この分解において  $X_e$  は有限次元空間となる

を仮定する。このとき不安定多様体  $\mathcal{M}_+(\bar{U})$  は  $\bar{U}$  の近傍において  $\mathcal{C}^{1+\theta}$  級の多様体として表現できる。この近傍において  $\dim \mathcal{M}_+(\bar{U}) = \dim X_e$  となる。したがって、 $\sigma([S^*]'\bar{U}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}$  ならば  $\bar{U}$  は安定、 $\sigma([S^*]'\bar{U}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| > 1\} \neq \emptyset$  ならば  $\bar{U}$  は不安定ということになり、この場合不安定性次元は  $\dim X_e$  で与えられることになる。

問題 (1) について、空間一様定常解  $\bar{U}$  に本原理を適用することができる。その結果

$$\sqrt{\mu\nu\zeta f} < \sqrt{cd} \left(1 + \frac{f\nu}{cdK}\right) (\sqrt{ag} + \sqrt{bc})$$

ならば  $\bar{U}$  は安定であるが、本評価式が成立しないように  $\mu\nu\zeta$  が大きくなると不安定化することが示される。

## 4 数値計算

前節までの考察により、ポジティブ・フィードバックの強度が大きくなると空間一様定常解は不安定化することが分かった。それでは、その場合、一様定常解の周りに生じたゆらぎはどのような形状に成長するのだろうか。それを観察するための方法の一つは数値計算である。問題 (1) に関する数値計算結果はまだ得ら

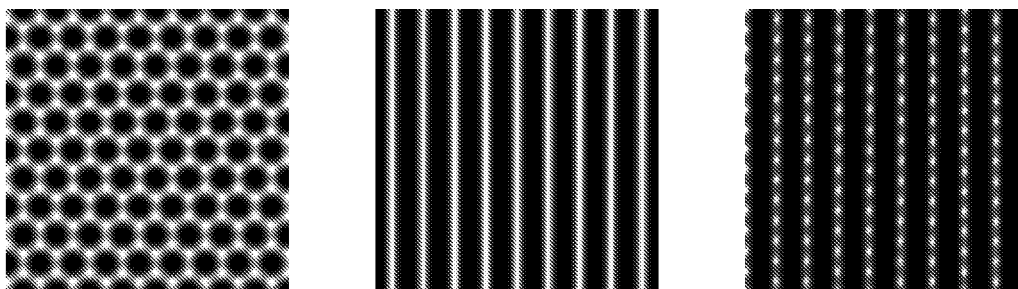
れていない。そこで、本節では走化性生物の集合体形成モデル（次節 5.5 項参照）に関する数値計算結果を取り上げる。

次の問題を考える。

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.0625\Delta u - \nu \nabla \cdot [u \nabla \rho] + u^2(1-u), & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta \rho - 32\rho + u, & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), & \Omega \end{cases}$$

ここでは、 $\Omega = [0, 16] \times [0, 16]$  とし  $\nu$  は数値計算パラメータとして変化させる。問題 (4) は、 $\nu$  に関係なく定数定常解  $(1, \frac{1}{32})$  をもつ。 $\nu$  が小さいときは本定常解は安定であるが、大きくなると不安定となる。そこで初期関数を  $u_0(x) = 1 + \varepsilon(x)$ ,  $\rho_0(x) = \frac{1}{32}$  とする、ただし  $\varepsilon(x)$  は適当な摂動関数である。

$\nu = 6.2, 7.2, 8.5$  のとき解は、図1のように定常解に収束するのが見られた。さらに、 $\nu$  が 9.0, 11.0 と大きくなると、図2-3のように解は定常解には収束せず動的なパターンへと近づくのが見出された。さらにもっと大きくなると、図4のように再び定常解に収束するのが見られた。しかし、これらの定常解は図1で得られたものとは大きく違っている。



(a)  $\nu = 6.2$  (蜂の巣)

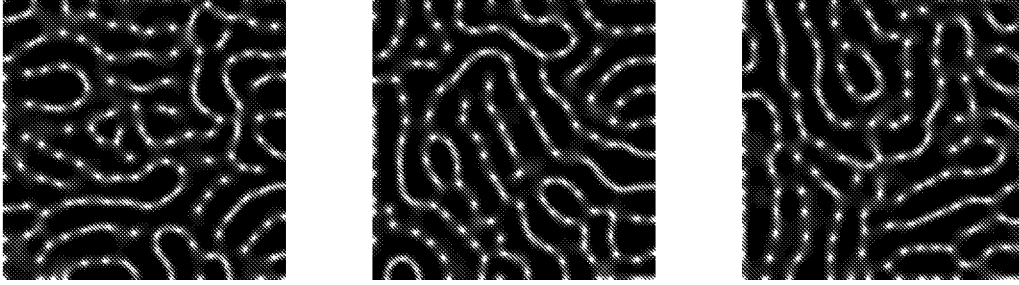
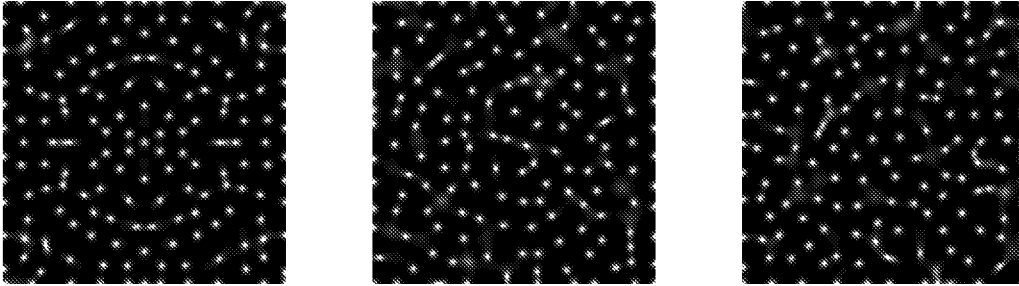
(b)  $\nu = 7.2$  (帯状)

(c)  $\nu = 8.5$  (ミシン目)

図 1:  $\nu = 6.2, \nu = 7.2, \nu = 8.5$  のときの定常解

## 5 拡散方程式モデル

自己組織化現象をモデル化した様々な拡散方程式系に対して、同様に指数アトラクタの存在や空間一様定常解の不安定化を示すことができる。本節ではそのいくつかを紹介する。

(a)  $t = 1024$ (b)  $t = 2048$ (c)  $t = 4096$ 図 2:  $\nu = 9.0$  のときの動的パターン(a)  $t = 64$ (b)  $t = 128$ (c)  $t = 256$ 図 3:  $\nu = 11.0$  のときの動的パターン

## 5.1 半導体モデル

Shockley [10] は、半導体内の自由電子と正孔の流れをドリフト流を用いて記述する発展方程式を導入した。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - \mu\nabla \cdot [u\nabla\chi] + f(1 - uv) + g(x), & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = b\Delta v + \nu\nabla \cdot [v\nabla\chi] + f(1 - uv) + g(x), & \Omega \times (0, \infty), \\ 0 = c\Delta\chi - u + v + h(x), & \Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

ここで、 $u$  は半導体  $\Omega$  内の電子密度分布を、 $v$  は半導体内の正孔の密度分布を、 $\chi$  は電子と正孔から作られる静電場ポテンシャルを表す。2つの移流項  $\nabla \cdot [u\nabla\chi]$  と  $\nabla \cdot [v\nabla\chi]$  はそれぞれ電子と正孔のドリフト流を表している。このようなモデルから力学系を定めることができ、指数アトラクタを構成することができる、[11] を参照。

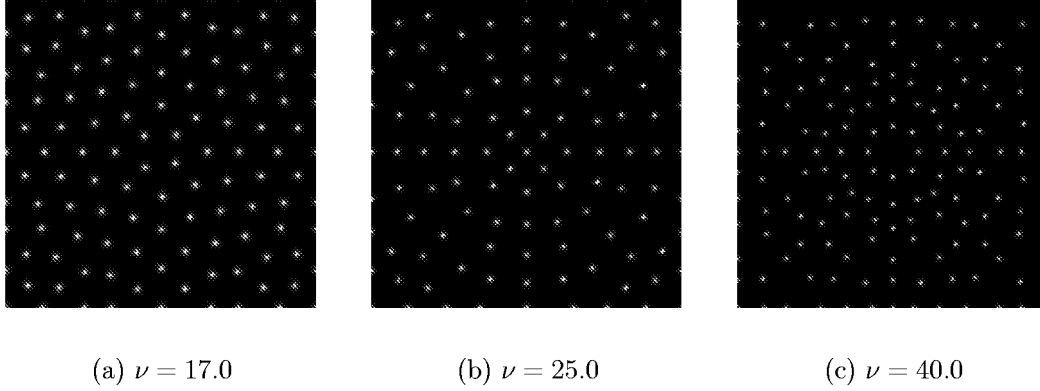


図 4:  $\nu = 17.0, \nu = 25.0, \nu = 40.0$  のときの定常解

## 5.2 活性因子・抑制因子モデル

活性因子・抑制因子モデルは細胞機能の分化過程の説明に使われる。以下のモデルは、Gierer-Meinhardt [12] により導入されたものである。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + \gamma \left( d - cu + \frac{u^2}{v} \right), & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = b\Delta v + \gamma(u^2 - v), & \Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

ここで、 $u$  は器官  $\Omega$  内の活性因子の濃度分布を、 $v$  は抑制因子の濃度分布を表す。活性因子は自己触媒的に増加するとともに抑制因子を産出する。抑制因子は活性因子の増加を抑える。この系にも、力学系を構成することができ指数アトラクタの存在が示される。この系には一様定常解  $\bar{U} = \left( \frac{d+1}{c}, \left( \frac{d+1}{c} \right)^2 \right)$  がある。この定常解は、 $a \simeq b$  のときは安定であるが  $a \ll b$  となると不安定化する。即ち、Turing の拡散誘導不安定化 [13] が理論的に検証される。

## 5.3 B-Z 反応モデル

Belousov-Zhabotinskiï 反応は、化学反応における自己組織化として良く知られている。実際は十数本の化学反応式で記述されるが Field-Noyers [14, 15] は 3 本の拡散方程式による単純化されたモデル方程式を提案した。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + \varepsilon^{-1}(qw - uw + u - u^2), & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = b\Delta v + u - v, & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = d\Delta w + \delta^{-1}(-qw - uw + cv), & \Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

ここで,  $u$  は容器  $\Omega$  内の  $\text{HBrO}_2$  分子の濃度分布,  $v$  は  $\text{Ce}^{4+}$  イオンの濃度分布,  $w$  は  $\text{Br}^-$  イオンの濃度分布を表す。本モデル方程式に対しても力学系を構成すると共に指数アトラクタの存在が示される。また, 適当な条件の下に空間一様定常解の不安定性を示すことができる。

## 5.4 森林動態モデル

Kuznetsov-Antonovskiy-Biktashev-Aponina [16] は, 森林生態を単純化し次のような動態モデルを導入した。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \delta w - \gamma(v)u - fu, & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = fu - hv, & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = d\Delta w - \beta w + \alpha v, & \Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

ここで,  $u$  は森林領域  $\Omega$  内の若年層樹木の密度分布,  $v$  は壮年層樹木の密度分布,  $w$  は空中の種子の密度分布を表す。 $\gamma(v)$  は若年層樹木の枯死率を表しており  $v$  の2次関数  $\gamma(v) = a(v-b)^2 + c$  で与えられるとする, 即ち若年層樹木の枯死率は壮年層樹木が一定の密度  $b$  のとき最小となるとする。この項のみが非線形項である。本モデルについても適当に全体空間を設定することにより力学系を定めることができ, 散逸評価から解の有界集合への漸近収束を示すことができる。しかし,  $u, v$  について解の正則化がないので指数アトラクタを構成することはできない。壮年層樹木の枯死率  $h$  が大きいと零解  $O = (0, 0, 0)$  は安定となる。一方,  $h$  が小さいと零解  $O$  は不安定となり自然な森林境界をもつ定常解  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  が現れる, ここで  $\bar{u}, \bar{v}$  は  $\Omega$  の不連続関数である, [17] 参照。

## 5.5 走化性モデル

Keller-Segel [18] は, 走化性生物の集合過程を記述するモデル方程式を導入した。それに, 成長関数を付加したモデル方程式は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - \mu \nabla \cdot [u \nabla \chi(\rho)] + cu - \gamma u^2, & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = b\Delta \rho - d\rho + \nu u, & \Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

のようになる ([19] 参照)。ここで,  $u$  は培養培地  $\Omega$  内の走化性生物の個体密度分布,  $\rho$  は誘因化学物質の濃度分布を表す。本モデルに対して力学系を構成することができるさらに指数アトラクタを構成することができる, [20] 参照。また, 一様定常解  $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (\frac{c}{\gamma}, \frac{c}{d\gamma})$  は,  $\sqrt{\mu\nu\bar{u}\chi'(\bar{\rho})} < \sqrt{ad} + \sqrt{bc}$  のとき安定であるが  $\mu\nu$  が大きくなると不安定化することが示される, [21] 参照。



## 5.6 金属表面吸着モデル

白金表面に吸着した CO 分子は、白金表面の形状と相互作用して特徴的な吸着パターンを発現する。この過程を Hildebrand-Kuperman-Wio-Mikhailov-Ertl [22] は、次のような方程式によりモデル化した。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - \mu\nabla \cdot [u(1-u)\nabla\chi(\rho)] \\ \quad - fe^{-\alpha\chi(\rho)}u - gu + h(1-u), & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = b\Delta\rho + d\rho(\rho+u-1)(1-\rho) - \nu\left(\rho - \frac{1}{2}\right), & \Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

ここで、 $0 \leq u \leq 1$  は白金表面  $\Omega$  の CO 分子による被服率、 $0 \leq \rho \leq 1$  は白金表面の形状を表現するオーダー・パラメータ、 $\chi(\rho) = \rho^2(3-2\rho)$  は表面の化学ポテンシャルを表し  $\rho$  の関数として与えられる。本モデルからも力学系が定まりさらに指数アトラクタの存在を示すことができる、[23] 参照。さらに  $\mu$  が十分大きいとき空間一様定常解の不安定化を示すことができる、[24] 参照。

## 5.7 競合種棲分けモデル

Shigesada-Kawasaki-Teramoto [25] は、競合する生物 2 種（例えば A 種と B 種）の棲分け現象を交差拡散を用いてモデル化した。その支配方程式は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(au + \alpha_{11}u^2 + \alpha_{12}uv) \\ \quad + cu - \gamma_{11}u^2 - \gamma_{12}uv, & \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta(bv + \alpha_{21}uv + \alpha_{22}v^2) \\ \quad + dv - \gamma_{21}uv - \gamma_{22}v^2, & \Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

で与えられる。ここで、 $u$  は競合 2 種の棲息領域  $\Omega$  における A 種の個体密度分布を、 $v$  は B 種の個体密度分布を表す。条件  $0 \leq \alpha_{12}\alpha_{21} \leq 64\alpha_{11}\alpha_{22}$  の下に力学系を構成することができ、さらに指数アトラクタの存在が示される、[26] 参照。

## 参考文献

- [1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Nonequilibrium System—From Dissipative Structure to Order through Fluctuations*, 1977, John Wiley & Sons, Chichester, New York. 邦訳, 小島陽之助・相沢洋二, 散逸構造—自己秩序形成の物理学的基礎—, 岩波書店, 1980.

- [2] M. Maruyama, *The second cybernetics: deviation-amplifying mutual causal processes*, *American Scientist* **51**(1963), 164–179.
- [3] J. L. Deneubourg, *Application de l'ordre par fluctuations a la description de certaines étapes de la construction du nid chez les termites*, *Insectes Sociaux* **24**(1977), 117–130.
- [4] S. Camazine, J. L. Deneubourg, N. R. Franks, J. Sneyd, G. Theraulaz and E. Bonabeau, *Self-Organization in Biological Systems*, Princeton Univ. Press, 2001.
- [5] K. Yosida, *Functional Analysis* (6th ed.), Springer, 1980.
- [6] A. V. Babin and M. I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [7] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd ed., Springer, New York, 1997.
- [8] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam, *Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations*, John Wiley & Sons, 1994.
- [9] M. Efendiev, A. Miranville and S. Zelik, *Exponential attractors for a non-linear reaction-diffusion system in  $R^3$* , *C. R. Acad. Sci. Paris* **330** (2000), 713–718.
- [10] W. Shockley, *Electrons and Holes in Semiconductors*, D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1950.
- [11] A. Favini, A. Lorenzi and A. Yagi, *Exponential attractors for semiconductor equations*, in "Differential equations, Inverse and Direct Problems" eds A. Favini and A. Lorenzi, Chapman & Hall/CRC, 2006, 111–130.
- [12] A. Gierer and H. Meinhardt, *A theory of biological pattern formation*, *Kybernetik* **12**(1972), 30–39.
- [13] A. M. Turing, *The chemical basis of morphogenesis*, *Phil. Trans. R. Soc. London B* **237** (1952), 37–72.
- [14] R. J. Field and R. M. Noyers, *Oscillations in chemical systems IV, Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction*, *J. Chem. Phys.* **60**(1974), 1877–1884.
- [15] R. J. Field and R. M. Noyers, *Oscillations in chemical systems V, Quantitative explanation of band migration in the Belousov-Zhabotinskii reaction*, *J. Am. Chem. Soc.* **96**(1974), 2001–2006.

- [16] Yu A. Kuznetsov, M. Ya. Antonovsky, V. N. Biktashev and A. Aponina, *A cross-diffusion model of forest boundary dynamics*, J. Math. Biol. **32** (1994), 219–232.
- [17] A. Yagi, *Free boundary problem in forest model*, "Nonlinear Phenomena with Energy Dissipation—Mathematical Analysis, Modeling and Simulation—", Gakkotosho, 2008, 425–440.
- [18] E. F. Keller and L. A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as instability*, J. Theor. Biol. **26**(1970), 399–415.
- [19] M. Mimura and T. Tsujikawa, *Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth*, Physica A **230** (1996), 499–543.
- [20] K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi and M. Mimura, *Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations*, Nonlinear Analysis **51**(2002) 119–144.
- [21] M. Aida, T. Tsujikawa, M. Efendiev, A. Yagi and M. Mimura, *Lower estimate of the attractor dimension for a chemotaxis growth system*, J. London Math. Soc. **74**(2006), 453–474.
- [22] M. Hildebrand, M. Kuperman, H. Wio, A. S. Mikhailov and G. Ertl, *Self-Organized Chemical Nanoscale Microreactors*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 1475–1478.
- [23] T. Tsujikawa and A. Yagi, *Exponential attractor for an adsorbate-induced phase transition model*, Kyushu J. Math. **56**(2002), 313–336.
- [24] Y. Takei, T. Tsujikawa and A. Yagi, *Numerical computation and pattern formation for adsorbate-induced phase transition model*, Sci. Math. Jpn **61**(2005), 525–534.
- [25] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, *Spatial segregation of interacting species*, J. Theor. Biol. **79**(1979), 83–99.
- [26] A. Yagi, *Exponential attractors for competing species model with cross-diffusions*, Discrete Contin. Dynam. Systems **22**(2008), 1091–1120.