

連続関数空間上の共形不変な確率測度と Schramm-Loewner Evolution

香取眞理 中央大学理工学部

1 統計力学模型と連続関数空間上の測度

1.1 平面上の統計力学模型の連続極限

複素平面 \mathbb{C} 上に正方格子を置き ($S = \mathbb{Z} \times \sqrt{-1}\mathbb{Z}$), そこでの最近接ウォークが描く道を考える. 出発点が $z \in S$, 長さが n の道全体は $W_n^z = \{\omega = (\omega(0), \dots, \omega(n)) : \omega(0) = z, \omega(i) \in S, |\omega(i) - \omega(i-1)| = 1, 1 \leq i \leq n\}$ で与えられる. ランダムウォーク (RW) とは, この元の重みをすべて等しいとした一様分布の統計集団を言う. $|W_n^z| = 4^n$ なので, 各々の道 $\omega \in W_n^z$ の測度は 4^{-n} である. \mathbb{C} 上に正方形の開領域 $D_0 = \{x + \sqrt{-1}y : -1 < x < 1, 0 < y < 2\}$, をとり, その境界 ∂D_0 上に 2 点 $O = 0$ (原点), $P = 2\sqrt{-1}$ を指定する. $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$ を定め, これらを原点を中心に N 倍する. そして, $NO = 0$ から $NP = 2N\sqrt{-1}$ へ至る RW で, 領域 ND_0 に含まれるもの全体を $\Omega_N(D_0; O, P)$ と書くことにして, その測度の総和を考える (このような測度の総和を統計力学では分配関数と呼ぶ):

$$Z_N(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N(D_0; O, P)} 4^{-|\omega|}. \quad (1.1)$$

ただし, 道 ω の長さを $|\omega|$ と記した. この量は $N \rightarrow \infty$ で $Z_N(D_0; O, P) \sim C(D_0; O, P)N^{-2}$ と減衰する. ($f(N) \sim g(N), N \rightarrow \infty$ は $f(N)/g(N) \rightarrow 1, N \rightarrow \infty$ の意味.) 係数 $C(D_0; O, P)$ は領域 D_0 での Poisson 核 $H_{D_0}(\cdot, P)$ の原点 $O \in \partial D_0$ での法線微分で与えられる.

ループ除去ランダムウォーク (loop-erased RW: LERW)

$\Omega_N(D_0; O, P)$ の元 $\omega = (\omega(0), \omega(1), \dots)$ は一般には $\omega(i) = \omega(j), i < j$ となる点を含む. このとき, 道 ω は自己交差する, あるいはループを持つと言う. そのような場合, 次の操作によって ω の部分からなる道 $\hat{\omega} = (\hat{\omega}(0), \hat{\omega}(1), \dots)$ を取り出すことによって, ループを消去することにする: $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \hat{\omega}(t_0) = 0$ として, $m \geq 1$ に対して

$$t_m = \max \left\{ \ell > t_{m-1} : \hat{\omega}(\ell) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1) \right\}, \quad \hat{\omega}(m) = \hat{\omega}(t_m) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1)$$

とする. ND_0 内の $0 \rightarrow NP$ の自己交差のない道全体を $\Omega_N^0(D_0; O, P)$ と記すことにする. この集合の各元は, 一般にはループを持つ幾つかの相異なる RW から上の操作によって得られる. そこで

$\Omega_N^0(D_0; O, P)$ の各元に, その元を与えるループ除去前の RW の重みの和 $\sum_{\omega} 4^{-|\omega|}$ を測度として与えることにする. このように定義された道の統計集団をループ除去ランダムウォーク (LERW) と言う.

LERW の連続極限を次のように考える. LERW の道 $\omega = (\omega(0), \dots, \omega(|\omega|))$ に対して, ある指数 $\nu > 0$ を導入して

$$\omega^{1/N} \left(\frac{i}{N^{1/\nu}} \right) = \frac{1}{N} \omega(i), \quad 0 \leq i \leq |\omega| \quad (1.2)$$

とする. $\omega^{1/N}$ は原点 O を出発して, $|\omega|/N^{1/\nu}$ ステップ後に $P = 2\sqrt{-1}$ に到達する D_0 内の (空間刻み $1/N$ の) 自己交差のない道である. 特定の ν の値に対しては, $N \rightarrow \infty$ の極限で, 原点から点 P に至る連続な曲線 γ の統計集団が得られることが期待される. (各曲線が点 P に到達する「時刻」 $t_\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} |\omega|/N^{1/\nu}$ も確率変数となる.):

$$\gamma : (0, t_\gamma) \rightarrow D_0 \quad \text{連続}, \quad \lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = O, \quad \lim_{t \uparrow t_\gamma} \gamma(t) = P, \quad t_\gamma \in (0, \infty). \quad (1.3)$$

この曲線 γ のフラクタル次元は $d_{\text{LERW}} = 1/\nu$ である. また γ は単純曲線, つまり $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_\gamma$ であろう. LERW の連続極限として得られる連続関数 (1.3) 全体を $\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P)$ と書くことにする. この関数空間に対する測度を $\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}$ とすると, その総和は $C(D_0; O, P)$ であり

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot) = C(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot) \quad (1.4)$$

よって, $\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P)$ に台を持つ確率測度 $\mu_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}$ が与えられる.

自己回避ウォーク (self-avoiding walk : SAW)

最近接ウォーク W_n^z の部分集合として, 自己交差しないウォーク全体の集合を考える.

$$W_{n,0}^z = \left\{ \omega \in W_n^z : \text{すべての } 0 \leq i < j \leq n \text{ に対して } \omega(i) \neq \omega(j) \right\}.$$

この定義より, $|W_{n,0}^z| < |W_n^z| = 4^n$ であることが分かるが, ある定数 $2 < e^\beta < 3$ があって,

$$|W_{n,0}^z| \simeq e^{\beta n}, \quad n \rightarrow \infty$$

であることが知られている. ($f(n) \simeq g(n), n \rightarrow \infty$ は $\log f(n) \sim \log g(n), n \rightarrow \infty$ の意味.) そこで, 自己交差しないウォーク ω に対してそれぞれ $e^{-\beta|\omega|}$ の測度を与えた統計集団を考えることにする. これを自己回避ウォーク (SAW) と言う. (1.1) 式に対応する SAW の分配関数は

$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N^0(D_0; O, P)} e^{-\beta|\omega|}$$

である．この分配関数に対して，ある指数 $b_{\text{SAW}} > 0$ があり，

$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \sim C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) N^{-2b_{\text{SAW}}}, \quad N \rightarrow \infty$$

と予想されている．(先の LERW の場合は $b_{\text{LERW}} = 1$ であったことになる．) SAW の道の連続極限 γ も単純曲線であるが，そのフラクタル次元 d_{SAW} は LERW の次元 d_{LERW} とは異なるであろう．(1.4) 式と同様に，SAW の連続極限に対する測度を

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot) = C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot)$$

と書くことにする．

臨界浸透模型 (critical percolation model)

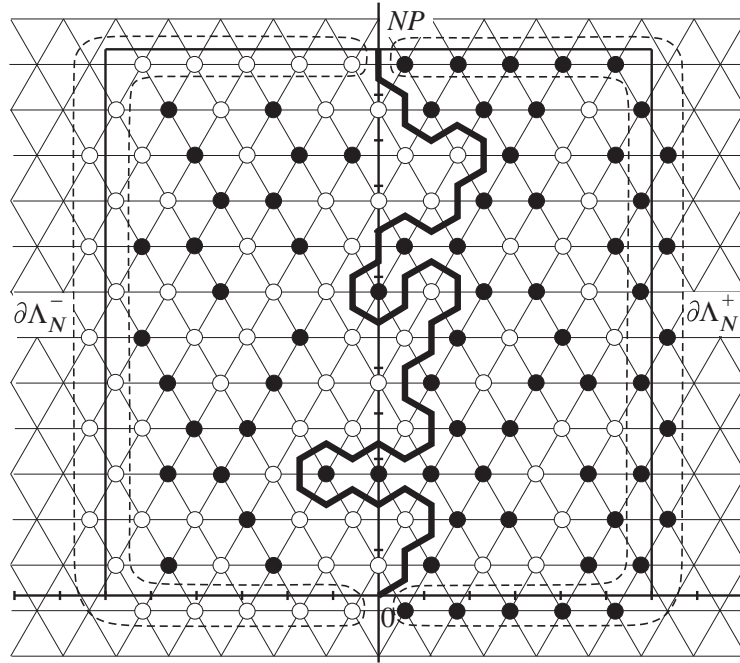


図 1: \mathbf{T} 上の浸透模型と \mathbf{H} 上の浸透探索過程．値 1 を黒丸，値 0 を白丸で表した．

ここでは \mathbb{C} 上に三角格子を置く： $\tau = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ として， $\mathbf{T} = \{z_0 + (i + j\tau)\sqrt{3}a : i, j \in \mathbb{Z}\}$ ．ただし， $a = 2/3$ として $z_0 = a\sqrt{-1}$ とする．こうすると \mathbf{T} の双対格子である格子間隔 a の蜂の巣格子 \mathbf{H} が，原点 O と点 $NP = 2N\sqrt{-1}$, $N \in \mathbb{N}$ を含むようになる．各点 $z \in \mathbf{T}$ 上に確率変数 $\eta(z) \in \{0, 1\}$ を Bernoulli 測度 ν_p , $0 \leq p \leq 1$ で分布させる： $\nu_p(\eta(z) = 1) = p$, $\nu_p(\eta(z) = 0) = 1 - p$ ．三角格子 \mathbf{T} は繊維表面を表し，その内で値 1 を持つ点は濡れた部位を，値 0 を持つ点は乾いた部位

をそれぞれ表すと思うと，これは浸透現象を表す模型と見なせる．原点を含む浸透領域は $p \leq 1/2$ のとき確率 1 で有界であるが， $p > 1/2$ では非有界となる確率が正となる．以下では，臨界値 $p_c = 1/2$ の場合を考える．(浸透模型の臨界値 p_c は格子に依存する． \mathbf{T} の場合は $p_c = 1/2$ である．) Bernoulli 測度なので，測度の総和は領域のサイズ N に依らず 1 である．このことは $b_{\text{per}} = 0$ を意味する．

$N \in \mathbb{N}$ を定め， $\mathbf{T} \cap ND_0 = \Lambda_N$ と書くことにする．図 1 に $N = 6$ の場合を示した．以下，この図を用いて説明する． Λ_N の境界近くの格子点 $z \in \mathbf{T}$ で，点 O と点 NP を結ぶ直線より右側のもの全体を $\partial\Lambda_N^+$ ，左側のもの全体を $\partial\Lambda_N^-$ とする．そして $\eta(z) = 1, \forall z \in \partial\Lambda_N^+$ ， $\eta(z) = 0, \forall z \in \partial\Lambda_N^-$ と固定する (Dobrushin 境界条件)．これ以外の領域 Λ_N 内部の配置は ν_p に従ってランダムに分布させる．このようにして与えられた任意の配置 $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbf{T} \cap ND_0}$ に対して， $\mathbf{H} \cap N\bar{D}_0$ 上の原点 O を出発点とする最近接ウォーク ω で，その道の進行方向すぐ左側の三角格子点の値はすべて 0 であり (図では白丸)，すぐ右側の三角格子点の値はすべて 1 である (黒丸) ものが，一意的に定まる．これを浸透探索過程と呼ぶ．再び，適当な指数 $\nu > 0$ をもって (1.2) とおいて連続極限 $N \rightarrow \infty$ をとると，フラクタル次元 $d_{\text{per}} = 1/\nu$ を持つ連続な曲線 (1.3) が得られる．この曲線 γ は単純曲線ではない．浸透探索過程の連続極限 γ に対する確率測度を $\mu_{(D_0; O, P)}^{\text{per}}(\cdot)$ と記すことにする．

臨界 Ising 模型 (critical Ising model)

$\bar{\Lambda}_N = \Lambda_N \cup \partial\Lambda_N^+ \cup \partial\Lambda_N^-$ とする．各点 $z \in \bar{\Lambda}_N$ に変数 $\sigma(z) \in \{-1, 1\}$ を与える (スピンと呼ぶ)． $z \in \partial\Lambda_N^\pm$ に対しては $\sigma(z) = \pm 1$ (複合同順) と固定し (Dobrushin 境界条件)，領域内部 $\Lambda_N \cap (\partial\Lambda_N^+)^c \cap (\partial\Lambda_N^-)^c$ のスピンはランダムに配置する．スピン配置 $\sigma \in \{-1, 1\}^{\bar{\Lambda}_N}$ に対して，

$$E(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{z, z' \in \bar{\Lambda}_N: |z-z'|=\sqrt{3}a} \sigma(z)\sigma(z')$$

をエネルギーと呼ぶ．径数 $\beta > 0$ の Gibbs 測度

$$\pi_{N, \beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta E(\sigma)}}{Z_{N, \beta}}, \quad Z_{N, \beta} = \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^{\bar{\Lambda}_N}} e^{-\beta E(\sigma)}$$

の下でのスピン配置を逆温度 β での Ising 模型と言う．これは強磁性体の模型である．各スピン配置に対して，浸透模型の項で述べたのと同様の探索過程 ω (ただし今度は -1 のスピンと $+1$ のスピンの境界線として定義される) が $\mathbf{H} \cap N\bar{D}_0$ 上に得られる．特に β の値を \mathbf{T} 上の Ising 模型の臨界値 β_c に設定し，連続極限をとると，あるフラクタル次元 d_{Ising} を持つ連続曲線 (1.3) が得られる．これは単純曲線である．この γ の測度を $\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{Ising}}(\cdot)$ と記すことにする．

1.2 共形不変性と領域 Markov 性

f が $D_0 \subset \mathbb{C}$ 上で正則であり, 微分 $f'(z) \neq 0, \forall z \in D_0$ のとき

$$f : D_0 \rightarrow f(D_0) \quad (1.5)$$

を共形変換という. f により, 境界 ∂D_0 上の点 O, P はそれぞれ, $\partial f(D_0)$ 上の点 $f(O), f(P)$ に写されるとする. 1.1 節で述べた平面格子上の統計力学模型の連続極限に伴って得られる, 連続関数 γ に対する測度

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = C(D_0; O, P)\mu_{(D_0; O, P)}(\cdot) \quad (1.6)$$

は, 次の 2 つの性質を持つことが期待される.

共形共変性 (conformal covariance) と共形不変性 (conformal invariance)

任意の共形変換 (1.5) に対して,

$$f \circ \bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b \bar{\mu}_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot) \quad (1.7)$$

である. b は 1.1 節で述べたように, 格子上的模型の分配関数の領域サイズ $N \rightarrow \infty$ に伴う漸近挙動で決まる値である. (1.7) 式の形から, 境界スケーリング指数 (boundary scaling exponent) と呼ばれる. (1.7) 式は, 測度の総和の共形共変性と確率測度の共形不変性を意味する:

$$\begin{aligned} C(D_0; O, P) &= |f'(O)|^b |f'(P)|^b C(f(D_0); f(O), f(P)), \\ \mu_{(D_0; O, P)}(\cdot) &= \mu_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot). \end{aligned}$$

領域 Markov 性 (domain Markov property)

$\mu_{(D_0; O, P)}$ の下で, 曲線 γ の初期の一部分 $\gamma(0, t], t \in (0, t_\gamma)$ を観測したとする. この条件の下での曲線の残りの部分の分布は, D_0 から $\gamma(0, t]$ を除いた開領域で, $\gamma(t)$ を出発点として $\gamma(t_\gamma) = P$ を終点とする曲線の分布に等しい:

$$\mu_{(D_0; O, P)}\left(\cdot \mid \gamma(0, t]\right) = \mu_{(D_0 \setminus \gamma(0, t]; \gamma(t), P)}(\cdot).$$

この性質を領域 Markov 性と言う.

注 1. 曲線 γ は (1.3) 式に書いたように変数 (時間と見なす) $t \in [0, t_\gamma]$ の連続関数である. 共形変換 (1.5) によって, 時間はどのように変換されるべきか. 格子上的統計力学模型の連続極限をとる際に置いた (1.2) 式のスケーリング性に従うと, 像曲線 $f \circ \gamma$ 上の区間 $f(\gamma[t_1, t_2]), 0 < t_1 < t_2 < t_\gamma$, を移

動するのにかかる時間は $\int_{t_1}^{t_2} |f'(\gamma(s))|^d ds$ で与えられるべきであろう。ただし d は曲線 γ のフラクタル次元である。他方、任意の増加同相写像 $\theta: [0, t_\gamma] \rightarrow [0, t_\gamma]$ に対して $\gamma(t)$ と $\gamma(\theta(t))$ を同一視することにより、曲線の径数付けの違いを無視することも出来る。

1.3 制限性と局所性

測度 (1.6) は特別な場合、共形共変/不変性と領域 Markov 性に加えて、次のような特性を持つことが予想される。

制限性 (restriction property)

正方形領域 D_0 の部分で単連結な領域 $D_1 \subset D_0$ を考える。ただし、 $O, P \in \partial D_1$ とする。1.1 節と同様にして、この部分領域で LERW を考え、その連続極限の測度 $\bar{\mu}_{(D_1; O, P)}^{\text{LERW}}$ を定義する。領域を小さくすれば、その内部での $O \rightarrow P$ なる RW も減る。したがって、RW に対してループ除去して LERW を得る際に、LERW の道に対して付加される重みも減少する。よって一般に Radon-Nikodym 微分に対して

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1; O, P)}^{\text{LERW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}} < 1, \quad D_1 \subset D_0, \quad D_1 \neq D_0$$

であるはずである。しかし、SAW の連続極限の測度においては

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1; O, P)}^{\text{SAW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}} = \mathbf{1}\{\gamma(0, t_\gamma) \subset D_1\}, \quad D_1 \subset D_0 \quad (1.8)$$

が成立する。ただし、 $\mathbf{1}\{\omega\}$ は事象 ω の指示関数である。(1.8) を制限性という。

浸透模型の確率変数 η は Bernoulli 分布に従っているので、浸透探索過程の振る舞いは、その道の左右の最近接三角格子点上の η -配置のみで決まる。このため、連続極限で得られる連続関数の測度 μ^{per} には、局所性と呼ばれる次の特性があるはずである。(他方、 $\bar{\mu}^{\text{Ising}}$ には局所性は期待できない。)

局所性 (locality property)

単連結な部分領域 $D_1 \subset D_0$ で $O, P \in \partial D_1$ であるものを考える。このとき、

$$\mu_{(D_1; O, P)}^{\text{per}}(\gamma(0, t]) = \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{per}}(\gamma(0, t]) \mathbf{1}\{\gamma(0, t) \subset D_1\}, \quad \forall t \in (0, t_\gamma). \quad (1.9)$$

制限性 (1.8) は曲線全体 $\gamma(0, t_\gamma)$ の性質であるが、局所性 (1.9) は任意の初期部分 $\gamma(0, t], t \in (0, t_\gamma)$ に対して成り立つべき性質であり、より強い独立性である。

2 Schramm-Loewner Evolution (SLE)

2.1 Riemann の写像定理

D, D' がともに \mathbb{C} 上の単連結領域であり (ただし $D, D' \neq \mathbb{C}$), $z, w \in \partial D, z', w' \in \partial D'$ とする . Riemann の写像定理より ,

$$\text{共形変換 } f : D \rightarrow D', \quad f(z) = z', \quad f(w) = w'$$

となる 1 径数族が存在することが結論される . さらに $|f'(w)| = 1$ という条件を課すと , 共形変換は一意的に定まる .

上半平面を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ と記す . 以上より , 共形不変な確率測度 $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}$ が与えられれば , 任意の単連結領域 $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}, z, w \in \partial D$ に対する確率測度 $\mu_{(D; z, w)}$ が得られることになる . また , $\mathbb{H} \setminus D$ が有界である単連結領域 $D \subset \mathbb{H}$ に対して $w = f(w) = \infty$ とすると , 条件 $|f'(w)| = 1$ より $w' \rightarrow \infty$ で $f(w') \sim w'$ となる . このような状況では , 共形共変性は次式で表される : $f \circ \bar{\mu}_{(D; z, \infty)}(\cdot) = |f'(z)|^b \bar{\mu}_{(f(D); f(z), \infty)}(\cdot), z \in \partial D$.

2.2 Loewner 方程式

$\gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$ を $\lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = U_0 \in \mathbb{R}$ から $\lim_{t \uparrow \infty} \gamma(t) = \infty$ に至るある一つの単純曲線とする . 各 $t \in (0, \infty)$ に対して $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$ なる共形変換 f で $\lim_{z \rightarrow \infty} f'(z) = 1$ となるものは唯一定まる . これを g_t と書くことにする . これは $a(t) > 0$ として

$$g_t(z) = z + \frac{a(t)}{z} + \mathcal{O}(|z|^{-2}), \quad z \rightarrow \infty$$

と展開される . $a(t)$ は $\gamma(0, t]$ の上半平面容量 (half-plane capacity) である . $g_t(z)$ は (chordal) Loewner 方程式と呼ばれる次の微分方程式を満たす .

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{da(t)/dt}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z. \quad (2.1)$$

ただしここで , $U_t = g_t(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$ であり , $t \rightarrow U_t$ は連続である .

逆に , 任意の連続関数 U_t と 1 回微分可能な関数 $a(t)$ に対して , Loewner 方程式 (2.1) の解として , 共形変換の時間発展 $g_t : H_t \rightarrow \mathbb{H}, t \in (0, \infty)$ が得られる . ただし , 定義域 $H_t \in \mathbb{H}$ は単調減少する . H_t の pioneer point を $H^{\text{pion}} = \bigcup_{0 \leq s < t} \partial H_s$ で定義する . このとき , $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ である曲線 $\gamma : (0, \infty) \rightarrow \bar{\mathbb{H}}$ で $H_t^{\text{pion}} = \mathbb{R} \cup \gamma(0, t]$ となるものがあるとき , g_t は曲線 γ で生成された」ということにする .

2.3 SLE $_{\kappa}$

注 1 で述べたように，曲線 γ の径数付けによる違いは無視して， $a(t) = at, a > 0$ とする． U_t を適当な確率過程として，Loewner 方程式 (2.1) の解 g_t を生成する曲線 γ の統計集団を考え，これの測度として $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}$ を構成したい．共形共変/共形不変性と局所 Markov 性の要請から， U_t は時間的に斉次な連続確率過程で，独立増分を持つものでなければならないことになる．曲線 γ の径数付けの任意性は， U_t の時間変更の任意性を意味する．そこで， U_t を 1 次元標準ブラウン運動 B_t としても一般性を失わない．こうして得られた，1 径数を持つ確率的な Loewner 方程式

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{a}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z, \quad \text{ただし } U_t = B_t \quad (2.2)$$

を，提案者 Schramm の名前を冠して Schramm-Loewner evolution と呼ぶ [4]．Schramm の記法に従い，径数を $\kappa \in (0, \infty)$ として $a = \frac{2}{\kappa}$ とおき，SLE $_{\kappa}$ と略記する．SLE $_{\kappa}$ の解 g_t を生成する曲線を SLE $_{\kappa}$ 曲線 γ と呼び，その測度を SLE $_{\kappa}$ 測度 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{\kappa}$ と記すことにする．

定理 2.1 (Lawler-Schramm-Werner [3]) 連続関数空間上の測度で共形共変性と領域 Markov 性を持つものはすべて，1 径数族である SLE $_{\kappa}$ 測度， $\kappa \in (0, \infty)$ で与えられる．

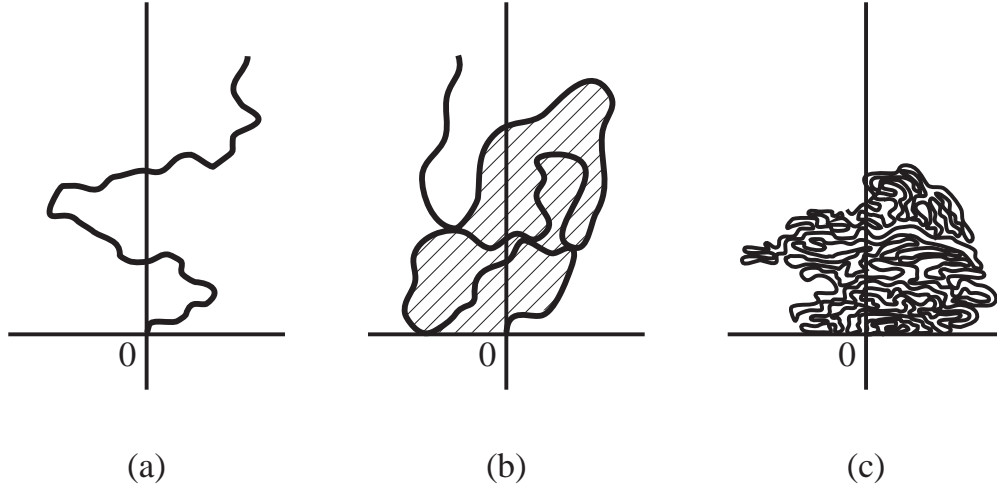


図 2: (a) 実軸に接することのない単純曲線． $0 < \kappa \leq 4$ のときの SLE 曲線の様子．(b) 自分自身や実軸に接するが十文字に交わることはない曲線．曲線が伸びていくと，曲線で囲まれた領域 (斜線部分) は上半平面 \mathbb{H} を覆いつくしていき，曲線自身で \mathbb{H} が埋めつくされることはない． $4 < \kappa < 8$ のときの SLE 曲線の様子．(c) 上半平面 \mathbb{H} を埋めつくしていく曲線． $\kappa \geq 8$ のときの SLE 曲線の様子．

(2.2) 式で $h_t(z) = g_t(z) - U_t (= g_t(z) - B_t)$ と置き，さらに変数 $z \in \mathbb{H}$ を正の実数 x に置き直すと

$$dh_t(x) = \frac{a}{h_t(x)} dt + dB_t, \quad h_0(x) = x > 0$$

を得る．これは $x > 0$ を出発点とする $2a + 1 (= 4/\kappa + 1)$ 次元 Bessel 過程である．Bessel flow に対する知見より, SLE $_{\kappa}$ 曲線は κ の値によって, 3 つの相 (phase) を持つことを示すことができる (図 2 参照)．

定理 2.2 (Lawler-Schramm-Werner [3]) (a) $0 < \kappa \leq 4$ のとき SLE $_{\kappa}$ 曲線 γ は単純曲線である．また, 実軸に接することはない: $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$. (b) $\kappa > 4$ のときは γ は自己交差する．また, $\gamma(0, \infty) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ である．(c) $\kappa \geq 8$ のとき γ は \mathbb{H} を埋めつくす: $\gamma[0, \infty) = \overline{\mathbb{H}}$.

さらに次が証明されている．

定理 2.3 (Beffara[1]) $\kappa \leq 8$ のとき SLE $_{\kappa}$ 曲線 $\gamma(0, \infty)$ のフラクタル次元 (Hausdorff 次元) は次式で与えられる: $d(\kappa) = 1 + \frac{\kappa}{8}$.

2.4 局所性と制限性

\mathbb{H} 内の原点を含む非有界な単連結領域の集合 $\mathcal{D} = \left\{ D \subset \mathbb{H} : \text{単連結, } \mathbb{H} \setminus D \text{ 有界, } \text{dist}(0, \mathbb{H} \setminus D) > 0 \right\}$ を考える． $D \in \mathcal{D}$ に対して, $D \rightarrow \mathbb{H}$ の共形変換で次の条件を満たすものを Φ_D と書くことにする (一意的に定まる): $\Phi_D(z) = z + o(1), z \rightarrow \infty$. SLE $_{\kappa}$ 曲線 γ に対して

$$\tau_D = \inf \left\{ t : \text{dist}(\gamma(t), \mathbb{H} \setminus D) = 0 \right\}$$

とする． $t < \tau_D$ の間は, γ は部分領域 D 内に制限されていることになる．この間の SLE 曲線 $\gamma(0, \tau_D)$ の Φ_D による像 $\Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$ は $\overline{\mathbb{H}}$ 内の曲線となる． γ の確率測度の共形不変性より, 曲線 $\Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$ で生成される $g_t^*(z)$ も Loewner 方程式 (2.2) に従うはずである．しかし, 変換 Φ_D により曲線の径数付けに変更が生じる．伊藤の公式を用いて計算すると, $g_t^*(z)$ は, 次の確率微分方程式を満たす U_t の下での (2.2) 式の解であることが導かれる:

$$dU_t = b \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} dt + dB_t. \quad (2.3)$$

ただしここで,

$$b(\kappa) = \frac{3a - 1}{2} = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}. \quad (2.4)$$

$\kappa = 6$ のときに限り $b = 0$ となる．このときは, 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して $g_t(z)$ も $g_t^*(z)$ も $t < \tau_D$ ではともに, $U_t = B_t$ (1次元標準ブラウン運動) で駆動される SLE, (2.2) 式を満たす．つまり, 局所性が成り立つことになる．

定理 2.4 SLE $_{\kappa}$ 測度 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{\kappa}$ は $\kappa = 6$ のときに限り局所性を持つ .

$\kappa \neq 6$ のときは (2.3) にはドリフト項があるので , U_t はマルチンゲールではない . しかし Girsanov の定理を用いると , 次のようにして局所マルチンゲール M_t を得ることが出来る . 複素関数 f に対して , Schwarz 微分を $Sf(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3f''(z)^2}{2f'(z)^2}$ と書くことにする .

$$c = \frac{2b(3-4a)}{a} = \frac{(3\kappa-8)(6-\kappa)}{2\kappa} \quad (2.5)$$

として

$$M_t = \exp \left\{ -c \int_0^t \frac{a}{12} S\Phi_s(U_s) ds \right\} \Phi_t'(U_t)^b$$

とする . これは

$$dM_t = -b \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} M_t dB_t$$

を満たすので , 局所マルチンゲールである . 少し考察を加えることにより , このことから $\kappa = \frac{2}{a} \leq 4, D \in \mathcal{D}$ に対して

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D;0,\infty)}}{d\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}}(\gamma) = M_{\infty} = \mathbf{1}\{\gamma(0,\infty) \subset D\} \exp \left\{ -c \int_0^{\infty} \frac{a}{12} S\Phi_s(U_s) ds \right\} \quad (2.6)$$

という表式が得られる . (2.5) から分かるように , $\kappa \leq 4$ では $\kappa = 8/3$ のときに限り $c = 0$ となる . このとき (2.6) は $\mathbf{1}\{\gamma(0,\infty) \subset D\}$ となる . (1.8) 式と見比べよ .

定理 2.5 SLE $_{\kappa}$ 測度 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{\kappa}$ は $\kappa = \frac{8}{3}$ のときに限り制限性を持つ .

3 対応関係

$\mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}}$ の共形不変性と $\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}}$ の共形共変性が証明されれば , 前者は $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}^6$, 後者は $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{8/3}$ の共形変換 $\mathbb{H} \rightarrow D_0$ として決定される . 前者に対しては Smirnov の証明がある [5] . これとは別に , $\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{LERW}} = \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^2$ [4, 3] と $\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{Ising}} = \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^3$ [6] が証明されている . (ここで $=$ は共形変換によって変換できるという意味.) 定理 2.3 と (2.4) 式を用いると , 以下が得られる .

$$\begin{aligned} d_{\text{LERW}} &= d(2) = \frac{5}{4}, & d_{\text{SAW}} &= d(8/3) = \frac{4}{3}, & d_{\text{Ising}} &= d(3) = \frac{11}{8}, & d_{\text{per}} &= d(6) = \frac{7}{4}, \\ b_{\text{LERW}} &= b(2) = 1, & b_{\text{SAW}} &= b(8/3) = \frac{5}{8}, & b_{\text{Ising}} &= b(3) = \frac{1}{2}, & b_{\text{per}} &= b(6) = 0. \end{aligned}$$

注 2. (2.4) 式と (2.5) 式から , κ を消去して得られる関係式

$$c = \frac{2b(5-8b)}{1+2b} \quad (3.1)$$

には、次のような意味合いがある。Virasoro 代数

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + c \frac{n(n^2 - 1)}{12} \delta_{n+m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

に対して、 $L_n|b\rangle = 0, n \geq 1, L_0|b\rangle = b|b\rangle$ となる固有値と固有ベクトルの対 $(b, |b\rangle)$ を導入して、最高ウェイト表現 $\mathcal{H}_b = \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \dots]|b\rangle$ を考える。

$$\det \begin{pmatrix} \langle b|L_2L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_2L_{-1}L_{-1}|b\rangle \\ \langle b|L_1L_1L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_1L_1L_{-1}L_{-1}|b\rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4b + c/2 & 6b \\ 6b & 4b(1 + 2b) \end{pmatrix} = 0$$

となるとき、レベル 2 の退化表現が得られる (Kac 公式)。 $b \neq 0$ とすると、この条件式は (3.1) に等しい [2]。

謝辞: 本講演の機会を与えて下さいました杉田洋氏 (大阪大理) に感謝いたします。また、共同研究者の種村秀紀氏 (千葉大理) に感謝いたします。

参考文献

- [1] V. Beffara, The dimension of the SLE curves, *Ann. Probab.* **36** (2008) 1421-1452.
- [2] R. Friedrich and W. Werner, Conformal restriction, highest-weight representations and SLE, *Commun. Math. Phys.* **243** (2003) 105-122.
- [3] G. F. Lawler: *Conformally Invariant Processes in the Plane*, (American Mathematical Society, 2005).
- [4] O. Schramm: Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000) 221-228.
- [5] S. Smirnov, Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* **333** (2001) 239-244.
- [6] S. Smirnov, Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model, arXiv:0708.0039