アクセサリー・パラメーターの問題
– 微分方程式の未開の領域を目指して –

原岡喜重（熊本大学・自然科学）

Fuchs 型方程式とは，有理関数を係数とする線形常微分方程式で，特異点がすべて確定特異点であるもののことである．その一般論はおよそ 150 年ほど前に，Fuchs, Frobenius といった人たちによって築かれた．内容としては確定特異点における局所理論と，特性指数の間に成り立つ大域的な関係式（Fuchs の関係式）からなり，今では学部（大学院？）の講義で習うはずの標準的なものである．一般論としてはその後現在まで，本質的な進展はないように思われる．モノドロミー・接続係数といった大域的な量を計算する一般的な方法を，我々は未だに持っていない．

一方いくつかの特定の Fuchs 型方程式は，非常に深く調べられている．Fuchs 型方程式は，超幾何微分方程式をはじめとして，解析学のみならず数論・代数幾何学・曲面論・表現論など多くの分野で重要な役割を果たし，それぞれの立場から解析がなされているからである．この広がりが Fuchs 型方程式の研究の楽しいところである．

Fuchs 型方程式の一般論を進展させるという研究はあまり展望がないように思われるが，重要なあるいはいろいろなことがよく分かる Fuchs 型方程式の良いクラスを見つけ，それらについて深く調べるのは良い方向と思う．本講演では，このようなテーマに至るまでのいろいろな研究の流れと，現在進められている研究について大まかにお話ししたい．

詳しく調べられている Fuchs 型方程式には個別のものが多いが，クラスとして調べられているのが rigid な方程式である．ここで rigid というのはモノドロミー表現が rigid 局所系となっているということで，rigid 局所系とは局所モノドロミーで（同型を除いて）一意的に決まるような局所系のことである．これは方程式がアクセサリー・パラメーターを持たないということと同値になる．このような方程式・モノドロミーの研究には大久保謙二郎氏が以前から取り組んでおられ，多くの基本的なアイデアを提示して研究を導いてきた ([16])．その延長上で横山利章氏は rigid な方程式をすべてつかまえ，それらの間の recursive な関係を明らかにするという一つのゴールに達した ([22])．ほぼ同じ時期に N.

M. Katz 氏も同様の結果を示し，それはより普遍的な形で定式化されたものとなっている ([13])．これら 2 つの理論の関係は，最近大島利雄氏によって明らかにされた ([18])．

rigid なクラスの方程式においては，解が積分表示を持ち，モノドロミーや接続係数など様々な大域的量も計算できる．そして重要なのは，与えられた方程式が rigid かどうかを判定することが可能な点である．たとえば rigid でなくても解の積分表示があれば大域的解析が可能となるが，与えられた方程式が解の積分表示を持つかどうかを判定する手段は今のところない．ただ rigid な方程式はかなり限られた例外的なものなので，より広い良いクラスを見つけ，解析可能な方程式を増やしていきたいと考える．そのような考察の素材として，深く調べられている個別の方程式のほか，微分方程式の変形理論，多変数 holonomic 系の理論，局所系係数の（コ）ホモロジー理論など，近年発展してきたいろいろな研究を取り入れていきたい．

以下この予稿では，講演においては詳しく説明できないかもしれない概念や結果などをまとめておくことにする．

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ を $\mathbb{C}$ の異なる点として固定する．$A_1, A_2, \ldots, A_p$ を $n \times n$ 定数行列として，次のようなシステムを考える．

$$\frac{dU}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x - a_j} \right) U. \tag{1}$$

ここで $U(x) = {}^t(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ が未知関数ベクトルである．$a_0 = \infty$ とおくと，(1) は $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上 $a_0, a_1, \ldots, a_p$ に確定特異点を持つ Fuchs 型方程式である．$A_0 = -\sum_{j=1}^{p} A_j$ とおくと，$j = 0, 1, \ldots, p$ について A_j の固有値が $x = a_j$ における特性指数となる．以下では

$(*)$ 各 j について，A_j の異なる固有値の間には整数差がない

という条件を仮定する．すると $x = a_j$ における局所モノドロミーは $e^{2\pi\sqrt{-1}A_j}$ で与えられる．(1) のモノドロミーは，$X = \mathbb{P}^1 \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_p\}$ の基本群の表現である．各 $x = a_j$ を一周する loop μ_j を適当にとると，基本群は次の表示を持つ．

$$\pi_1(X) = \langle \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \mid \mu_p \cdots \mu_1 \mu_0 = 1 \rangle. \tag{2}$$

したがって μ_j に対応するモノドロミー行列（回路行列）を M_j とおくと，

$$M_j \sim e^{2\pi\sqrt{-1}A_j} \quad (0 \le j \le p), \quad M_p \cdots M_1 M_0 = I \tag{3}$$

が成り立つ．これらの条件は，方程式 (1) を「外から見て」書ける条件であることに注意する．つまり解のことを何も知らずに手に入れられる条件である．

定義 $(M_0, M_1, \ldots, M_p) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})^{p+1}$ が，(3) の条件により一斉相似変換を除いて一意的に定まるとき，このモノドロミー表現（およびそれの定める X 上の局所系）を **rigid** という．

モノドロミー表現が rigid であるかどうかは，次の量を計算することで判定できる．

$$\iota = (1-p)n^2 + \sum_{j=0}^{p} \dim Z(M_j)$$

ここで $Z(M)$ は M と可換な正則行列の全体のなす群（M の中心化群）を表す．この量を **rigidity 指数**とよぶ．(∗) を仮定していると

$$\dim Z(M_j) = \dim Z(e^{2\pi\sqrt{-1}A_j}) = \dim Z(A_j)$$

が成り立つので，ι は方程式 (1) から直ちに計算できる．

定理 1 (Katz [13]) (1) のモノドロミー表現が既約なら（すなわちすべての M_j に共通の不変部分空間が自明なものしかなければ），$\iota \leq 2$ が成り立つ．さらにこのとき，$\iota = 2$ が rigid であるための必要十分条件となる．

方程式の係数についても，同様のことが成り立つ．

定理 2 (Katz [13], Dettweiler-Reiter [3]) $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ が $\sum_{j=0}^{p} A_j = O$ をみたし既約とする．このとき各 A_j の Jordan 標準形を指定することで $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ が一斉相似変換を除いて一意的に定まるための必要十分条件は，$\iota = 2$ である．

この定理は，各特異点における局所挙動によって方程式が決定されるための条件を与えている．各特異点における局所挙動によって決まらない方程式のパラメーターのことを**アクセサリー・パラメーター**という．したがってアクセサリー・パラメーターを持たない微分方程式は，$\iota = 2$ で特徴づけられる．そのような方程式を，モノドロミーのことばを流用して rigid と呼ぶことにする．

rigid な方程式については，そのモノドロミー表現や方程式の係数が，局所挙動によって一意的に決まるが，決まるというだけでなく実際に求めることもできる．大まかに言うと，モノドロミーあるいは方程式の係数を未知数として，局所挙動をそれらに対する条件式と思うと，

$$2 - \iota = (\text{未知数の個数}) - (\text{条件式の個数}) = (\text{アクセサリー・パラメーターの個数})$$

ということになっている．したがって $\iota = 2$ というのは未知数と条件式の個数が等しく，解けるということになるのである．

すべての A_j が対角化可能とすると，$\dim Z(A_j)$ は A_j の固有値の重複度によって決まるので，rigid な方程式を求めるということは，重複度を表す n の分割の $(p+1)$ 個の組で $\iota = 2$ となるものを求めるという問題になる．ただしそのような分割の組をすべてリストアップするということはできていない．しかし rigid な方程式をすべてつかまえるという問題は，そのようなリストを作るよりもより生産的な形で解決された．それは横山および Katz の理論のことであるが，ここでは Katz の理論について説明しよう．(横山の理論については [7] を参照されたい．)

Katz [13] は Fuchs 型方程式（実際はそのモノドロミー）に対して 2 種類の操作を定義した．特異点の位置 $a_0, a_1, \ldots, a_p$ は固定されているとしていたので，方程式 (1) は行列の組 $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ と同一視できる．Dettweiler-Reiter [3] は Katz の定義をこの行列の組に対する操作に翻訳したので，そちらの方を紹介しよう．2 つの操作とは，addition と middle convolution である．

定義 (addition) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$ に対し，

$$(A_1, A_2, \ldots, A_p) \mapsto (A_1 + \alpha_1, A_2 + \alpha_2, \ldots, A_p + \alpha_p)$$

という操作を α による **addition** といい，ad_α で表す．

定義 (middle convolution) $n \times n$ 行列の組 $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$pn \times pn$ 行列 G_j を次で定める．

$$G_j = \begin{pmatrix} O & O & \cdots & O & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & O & \cdots & O \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_j + \lambda & \cdots & A_p \\ O & O & \cdots & O & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & O & \cdots & O \end{pmatrix} \quad (j$$

対応

$$(A_1, A_2, \ldots, A_p) \mapsto (G_1, G_2, \ldots, G_p)$$

をパラメーター λ による **convolution** という．$\mathbb{C}^{pn}$ の部分空間 $\mathcal{K},\mathcal{L}$ をそれぞれ

$$\mathcal{K}=\begin{pmatrix}\mathrm{Ker}A_1\\ \mathrm{Ker}A_2\\ \vdots\\ \mathrm{Ker}A_p\end{pmatrix},\qquad \mathcal{L}=\mathrm{Ker}(G_1+G_2+\cdots+G_p)$$

で定めると，これらはすべての j について G_j 不変部分空間になっている．そこで G_j の商空間 $\mathbb{C}^{pn}/\mathcal{K}+\mathcal{L}$ への作用を $\bar{G}_j$ とするとき，対応

$$(A_1,A_2,\ldots,A_p)\mapsto(\bar{G}_1,\bar{G}_2,\ldots,\bar{G}_p)$$

をパラメーター λ による **middle covolution** といい，mc_λ で表す．

これら 2 つの操作は rigidity 指数 ι を保つ．また次の加法性がある．

$$\begin{aligned}&ad_0=id,\quad ad_\alpha\circ ad_\beta=ad_{\alpha+\beta},\\ &mc_0=id,\quad mc_\lambda\circ mc_\mu=mc_{\lambda+\mu}.\end{aligned}$$

これら 2 つの操作は方程式に対する操作であるが，いずれも解に対する解析的な操作として実現される．addition の方は簡単で，(1) の解 $U(x)$ に対して

$$\prod_{j=1}^{p}(x-a_j)^{\alpha_j}\cdot U(x)$$

を対応させる操作である．middle convolution は方程式の階数（行列のサイズ）を上下させるため，少し複雑であるが，本質的な部分は，やはり (1) の解 $U(x)$ に対して

$$\int_\Delta (x-s)^\lambda U(s)\,ds$$

という積分変換（Euler 変換，あるいは Riemann-Liouville 変換）を施すことに相当する．

さて Katz 理論の主結果は次の定理である．

定理 3 (Katz [13]) 既約で rigid な Fuchs 型システム (1) は，addition と middle convolution を有限回くり返すことで，階数 1 の方程式に帰着できる．

この定理によって既約で rigid な方程式はすべてつかまえられ，さらにそれらの間の recursive な関係燃えられたことになる．横山理論においてもやはり 2 種類の操作が定義され，上の定理と同様の主張が成り立つ．

このrecursiveな関係を利用すると，次のようなことも分かる．定理3にある階数1の方程式とは

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{b_p}{x-a_p}\right) u$$

というものなので，求積することで解 $u(x) = \prod_{j=1}^{p}(x-a_j)^{b_j}$ が得られる．これと2つの操作の解析的実現を組み合わせると，rigidな方程式には解の積分表示があることが分かる．すなわち次の定理が成り立つ．

定理 4 ([6]) rigidな方程式は，

$$U(x) = \prod_{j=1}^{p}(x-a_j)^{\alpha_j} \int_{\Delta} \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{p}(s_i - a_j)^{\beta_{ij}} \prod_{i=1}^{k-1}(s_{i+1}-s_i)^{\lambda_i} \cdot (x-s_k)^{\lambda_k}\, ds_1 \cdots ds_k$$

という形の解の積分表示を持つ．

次に微分方程式の変形理論について説明しよう．やはりFuchs型のシステム(1)を考える．(1)の基本解系で，その基本解系によるモノドロミー行列が特異点の位置 $a_1, a_2, \ldots, a_p$ の局所変動に依存しないようなものが存在するように，$A_1, A_2, \ldots, A_p$ の成分を $a_1, a_2, \ldots, a_p$ の関数として定めよ，というのが問題である．そのような基本解系をモノドロミー保存解と呼ぶことにする．無限遠点で正規化されたモノドロミー保存解があるための条件は，$A_1, A_2, \ldots, A_p$ に対する $a_1, a_2, \ldots . a_p$ を独立変数とする偏微分方程式系で与えられる．

定理 5 (Schlesinger [19]) (1)のモノドロミー保存解 $\mathcal{U}(x)$ で $x = \infty$ において正規化されたものが存在するための必要十分条件は，

$$\frac{\partial A_i}{\partial a_j} = \frac{[A_i, A_j]}{a_i - a_j} \quad (i \neq j), \quad \frac{\partial A_i}{\partial a_i} = -\sum_{j\neq i} \frac{[A_i, A_j]}{a_i - a_j} \tag{4}$$

で与えられる．

方程式系(4)をSchlesinger方程式系という．無限遠点における正規化という少し不自然な設定をはずすと，モノドロミー保存解の存在条件は次のように述べ直すことができる．

(S) x に関しては定数であるようなある正則行列 P が存在して，$A'_j = PA_jP^{-1}$ とおくとき，A'_j が方程式系(4)をみたす

モノドロミー保存解が存在するときには，もちろん局所モノドロミーは a_j に依らないので，$A_0, A_1, \ldots, A_p$ のJordan標準形 C_j は固定されている．その条件を

(J) $$A \sim C_j \quad (0 \leq j \leq p)$$

としよう．Painlevé 方程式をはじめとする変形方程式というのは，(S) と (J) を合わせて考えたものであり，変形方程式に含まれるパラメーターは，条件 (J) の行列 C_j の固有値である．

条件 (J) によって決まり切らないパラメーターがアクセサリー・パラメーターなので，変形方程式のうちの Schlesinger 方程式 (S) は，アクセサリー・パラメーターについての微分方程式となる．ところで Katz の操作は Fuchs 型のシステム (1) に対する操作で，アクセサリー・パラメーターの個数を変えないものであった．つまり変形方程式の未知関数の個数を変えないということである．それでは変形方程式自体は Katz の操作でどうなるだろうか．実は次が成り立つ．

定理 6 ([8]) Schlesinger 方程式 (S) は，addition および middle convolution で不変である．

addition と middle convolution は (S) は不変にするが，一般に (J) の方は変える．したがってこれらの操作は，パラメーターの異なる同じ変形方程式の解の変換を与えることになる．これは Painlevé 方程式でいうと，Bäcklund 変換に相当する．このように Katz 理論（あるいは横山理論）は，rigid な方程式だけでなく non-rigid な方程式に対しても適用され，力を発揮することが分かる．

講演においては以上のようなことを大まかに説明し，それに基づいて,「良い」Fuchs 型方程式のクラスを見つけその解析方法を開発するというテーマについて，色々なアイデアを，関連する研究と合わせてお話ししていきたい．

参考文献

[1] Y. André: *G-functions and geometry*, Aspects of Mathematics, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

[2] F. Beukers: Consequences of Apéry's work on $\zeta(3)$, http://www.math.uu.nl/people/beukers/

[3] M. Dettweiler and S. Reiter: An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem, *J. Symbolic Comput.* 30 (2000) 761–798.

[4] M. Dettweiler and S. Reiter: Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, *J. Algebra* 318 (2007) 1–24.

[5] N. Elkies: Shimura curve computations, Lecture Notes in Comput. Sci. 1423, Springer, Berlin (1998) 1-47.

[6] S. Hamaguchi and Y. Haraoka: Topological theory for Selberg type integral associated with rigid Fuchsian systems, preprint.

[7] 原岡喜重: 超幾何関数, 数学の風景 7, 朝倉書店, 2002.

[8] Y. Haraoka and G. Filipuk: Middle convolution and deformation for Fuchsian systems, *J. London Math. Soc.* 76 (2007) 438-450.

[9] Y. Haraoka and M. Kato: Generating systems for finite irreducible complex reflection groups, preprint.

[10] Y. Haraoka and T. Yokoyama: Construction of rigid local systems and integral representation of their sections, *Math. Nachr.* 279 (2006) 255-271.

[11] Y. Haraoka and Y. Ueno: Rigidity for Appell's hypergeometric series F_4, *Funkcial. Ekvac.* 51 (2008) 149-164.

[12] H. Kawakami: Generalized Okubo systems and the middle convolution, preprint.

[13] N. M. Katz: *Rigid local systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996.

[14] M. Kohno: *Global analysis in linear differential equations*, Mathematics and its Applications, 471, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[15] V. P. Kostov: On the Deligne-Simpson problem, *Trudy Mat. Inst. Steklov.* 238 (2001), 158-195.

[16] K. Okubo: On the group of Fuchsian equations, 都立大学数学教室セミナー報告, 1987.

[17] T. Oshima: Classification of Fuchsian systems and their connection problem, preprint.

[18] T. Oshima: Katz's middle convolution and Yokoyama's extending operation, preprint.

[19] L. Schlesinger: Über eine Klasse von Differntialsystemen beliebliger Ordnung mit festen kritischen Punkten, *J. für Math.* 141 (1912) 96–145.

[20] 渋谷康隆: 複素領域における線型常微分方程式, 紀伊国屋数学叢書 8, 紀伊国屋書店, 1976.

[21] C. Simpson: Katz's middle convolution algorithm, arXiv:math/0610526v2 [mathAG] 25 Oct 2006.

[22] T. Yokoyama: Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy, *Math. Nachr.* 279 (2006) 327-348.

[23] T. Yokoyama: Recursive calcutation of connection formulas for systems of differential equations of Okubo normal form, preprint.

[24] M. Yoshida: *Fuchsian differential equations*, Aspects of Mathematics, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1987.