# 保存則系におけるエントロピーと消散構造 *

川島 秀一

九州大学大学院数理学研究院

## 1　序

気体・流体の運動を記述する方程式とその近似について，力学的な視点から歴史を振り返ってみよう．気体・流体の基礎方程式として有名なのは，**Euler 方程式**と **Navier-Stokes 方程式**である．これらはともに，質量 $\rho$，運動量 $m = \rho u$，エネルギー $E = \rho(e + u^2/2)$ の保存則からなる連立系で，後者は粘性等の散逸効果を考慮したものである．ただし，$u$ は速度，$e$ は内部エネルギーを表す．かの有名な L. Euler (1707-1783) が Euler 方程式を定式化したのが 1775 年，一方，G.G. Stokes (1819-1903) が H. Navier (1785-1836) の仕事を一般化して Navier-Stokes 方程式を導いたのが 1845 年のことである．ともに歴史ある方程式である．これらの方程式は，気体・流体を連続体と見なして定式化されたものであった．

ところが，気体を粒子の運動論的に捉えて記述する方程式として，1872 年に L.E. Boltzmann (1844-1906) により **Boltzmann 方程式**が導入された．$f = f(x, v, t)$ を粒子の質量を表す分布関数とするとき，その方程式は

$$f_t + v \cdot \nabla_x f = Q(f)$$

で与えられる．$Q(f)$ は粒子間の 2 体衝突の効果を取り入れた衝突項である．この Boltzmann 方程式を基礎に気体・流体の運動を研究するのが気体分子運動論である．質量 $\rho$，運動量 $m$，エネルギー $E$ を $f$ の**モーメント**として

$$\rho = \int f\,dv, \quad m = \int vf\,dv, \quad E = \int \frac{1}{2}|v|^2 f\,dv$$

で定めれば，$Q(f) = 0$ を満たす局所平衡状態で Euler 方程式が導かれることは，それほど難しいことではない．ところが，Navier-Stokes 方程式を導くための粘性等の輸送現象の解明は，かの D. Hilbert (1862-1943) (Hilbert 展開) をもってしてもかなわず，Boltzmann 方程式の提出から 40 年余り未解決であった．この難問を，具体的な手続きをもって解決したのは若き D. Enskog (1884-1947) で，1917 年のことである．その方法は，S. Chapman (1888-1970) の貢献も尊重した形で，今日では **Chapman-Enskog 展開**と呼ばれている．その詳細は [3] を参照のこと．

ところで，L.E. Boltzmann が Boltzmann 方程式を導いたのは，統計力学の**エントロピー**が不可逆過程では常に増大するという熱力学の第二法則を，分子運動論的に証明するためであった．彼は $H$ **関数**

$$H = \int f \log f\,dv$$

*企画特別講演，日本数学会春の年会，近畿大学理工学部，2008 年 3 月

が常に減少するという $H$ **定理**の形でこれを証明したが，その議論をめぐって大論争が巻き上がったことは有名な話である．統計力学のエントロピー $S$ は Boltzmann の $H$ 関数と $S=-k_BH$ で関係付けられる．$k_B$ は Boltzmann 定数である．

本講演では，**緩和的双曲型保存則系**と呼ばれる

$$w_t+\sum_{j=1}^{d} f^j(w)_{x_j}=g(w) \tag{1.1}$$

の形の方程式系について，気体分子運動論的な立場から考えてみたい．$g(w)$ は緩和効果を表す項で，これは Boltzmann 方程式では衝突項 $Q(f)$ に対応する．系 (1.1) に対して，まず数学的エントロピーの定義を与え，そのエントロピーに基づく系 (1.1) の対称化について述べる．このエントロピーは Boltzmann 方程式では $H$ 関数に相当し，従って力学的には負のエントロピーと呼ぶべきものである．次に，エントロピーの下で系 (1.1) に Chapman-Enskog 展開が適用可能で，対応する Euler 方程式，Navier-Stokes 方程式がそれぞれその第一次近似，第二次近似として得られることを示す．次いで，系 (1.1) の安定性条件を定式化し，その条件に基づく系 (1.1) の消散構造を明らかにする．最後に，エントロピーと安定性条件の下での系 (1.1) の数学解析の一端として，時間大域解の存在とそのエネルギー減衰に関する理論を紹介する．

系 (1.1) の数学解析の基礎であるエントロピーの概念と安定性条件が，Chapman-Enskog 展開を通して対応する Navier-Stokes 方程式に正確に遺伝するという事実は，ある意味で神秘的である．

## 2　簡単な例

偏微分方程式の力学的な近似法を簡単な例で説明してみよう．第一の例は

$$\begin{aligned}\rho_t+m_x&=0,\\ m_t+\rho_x&=-m,\end{aligned} \tag{2.1}$$

である．この系で $m$ を消去すれば，$\rho$ に関する**消散的波動方程式** $\rho_{tt}-\rho_{xx}+\rho_t=0$ が得られる．この系では緩和効果のため，$m$ が $\rho$ に比べて早く減衰すると考えられる．従って第一次近似は $m=0$ であり，近似方程式は自明な $\rho_t=0$ となる．次の近似は $m=-\rho_x$ であり，この第二次近似方程式は熱方程式 $\rho_t=\rho_{xx}$ となる．これらの近似の数学的な正当化も容易である．

次に，系 (2.1) をわずかに複雑にした例

$$\begin{aligned}\rho_t+m_x&=0,\\ m_t+\rho_x&=f(\rho)-m,\end{aligned} \tag{2.2}$$

を考えよう．これは **Jin-Xin モデル** ([11]) と呼ばれる系である．$f(\rho)$ は $|f'(\rho)|<1$ を満たす滑らかな関数である．この系の場合も $m$ を消去すれば，$\rho$ に関する方程式 $\rho_{tt}-\rho_{xx}+\rho_t+f(\rho)_x=0$ が得られる．これは非線形移流項付きの消散的波動方程式である．この系では $m=f(\rho)$ を第一次近似とするのが良さそうで，そのときの近似方程式は

$$\rho_t+f(\rho)_x=0 \tag{2.3}$$

となる．これは双曲型保存則と呼ばれる方程式である．それでは第二次近似は？　直感的には $m = f(\rho) - \rho_x$ であろう．このとき近似方程式は

$$\rho_t + f(\rho)_x = \rho_{xx} \tag{2.4}$$

の形のいわゆる粘性的保存則になるが，実はこの近似は数学的にも力学的にも正しくない．Chapman-Enkog 展開に基づく正しい第二次近似は，$\mu(\rho) = 1 - f'(\rho)^2$ とすれば $m = f(\rho) - \mu(\rho)\rho_x$ であり，対応する近似方程式は

$$\rho_t + f(\rho)_x = \{\mu(\rho)\rho_x\}_x \tag{2.5}$$

で与えられのである．$f'(\rho)$ に対する条件から $\mu(\rho) > 0$ であるので，近似方程式 (2.5) も粘性的保存則である．この第二次近似の数学的正当化については，[35] を参照のこと．

さて，この第二次近似を導くには次のように考えればよい．(2.2) の第二式で，$m_t$ を第一近似 $m = f(\rho)$ を用いて $f(\rho)_t = f'(\rho)\rho_t$ で置き換え，さらにこの $\rho_t$ を (2.2) の第一式と第一近似を用いて $-f(\rho)_x = -f'(\rho)\rho_x$ で置き換える．その結果，$m_t$ が $-f'(\rho)^2\rho_x$ で置き換えられ，求める近似式が得られるのである．Chapman-Enskog 展開とは，このような手続きをはるかに複雑な Boltzmann 方程式に対して体系的に与えたものなのである．

それでは**エントロピー**はどうであろうか？　系 (2.1) に対しては，$E = (\rho^2 + m^2)/2$ として $E_t + (\rho m)_x = -m^2$ の形のエネルギー等式が成り立つ．従ってこの $E$ が系 (2.1) の数学的エントロピーである．ところが系 (2.2) に対しては事はそう容易ではない．まず $w_1 = (\rho + m)/2$, $w_2 = (\rho - m)/2$ と置き，(2.2) を

$$\begin{aligned} w_{1,t} + w_{1,x} &= M_1(\rho) - w_1, \\ w_{2,t} + w_{2,x} &= M_2(\rho) - w_2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

の形に書き換える．ただし，$\rho = w_1 + w_2$ であり，$M_1(\rho) = (\rho + f(\rho))/2$，$M_2(\rho) = (\rho - f(\rho))/2$ と置いた．これは Boltzmann 方程式の **BGK モデル** ([1]) に対する離散速度モデルの一種である．各 $M_j(\rho)$ は単調増加であり，その逆関数を $M_j^{-1}$ として

$$H = H_1(w_1) + H_2(w_2), \qquad H_j(v) = \int_0^v M_j^{-1}(s)ds, \tag{2.7}$$

とおく．この $H$ が系 (2.6) の $H$ 関数であり，従って系 (2.2) の数学的エントロピーである．$H$ の満たす方程式は $H_t + J_x = R$ の形になる．ただし，$J = H_1(w_1) - H_2(w_1)$，$R = M_1^{-1}(w_1)(M_1(\rho) - w_1) + M_2^{-1}(w_2)(M_2(\rho) - w_2)$ である．このエントロピーは (2.2) を漫然と見ていても得られない．

# 3　エントロピーと系の対称化

**緩和的双曲型保存則系** (1.1) について考える．$w = w(x,t)$ は $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ と $t \geq 0$ の未知関数であり，$w$，$f^j(w)$ および $g(w)$ はいずれも $m$ 次元ベクトルである．系 (1.1) をより単純な**双曲型保存則系**

$$w_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(w)_{x_j} = 0 \tag{3.1}$$

や，**粘性的保存則系**

$$w_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(w)_{x_j} = \sum_{i,j=1}^{d} \{G^{ij}(w) w_{x_j}\}_{x_i} \tag{3.2}$$

と対比しつつ考察しよう．系 (3.1) および (3.2) はそれぞれ圧縮性の Euler 方程式と Navier-Stokes 方程式を一般化したものである．

まず，系 (1.1) の数学的**エントロピー**の定義を与えるため，次の二つの集合を導入しよう．

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{\psi \in \mathbb{R}^m;\ \langle \psi, g(w) \rangle = 0 \text{ for any } w\}, \\ \mathcal{E} &= \{w;\ g(w) = 0\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

記号 $\langle\, , \rangle$ は $\mathbb{R}^m$ の内積を表す．気体分子運動論の Boltzmann 方程式では $\mathcal{M}$ は衝突不変量の空間に相当し，平衡状態の集合 $\mathcal{E}$ は Maxwell 分布の集合を表す．

**定義 1** ([23])**.** 滑らかな関数 $\eta(w)$ は次の 4 条件を満たすとき，緩和的双曲型保存則系 (1.1) の**エントロピー**と呼ばれる．

*(1)* $\eta(w)$ は $w$ の狭義凸関数，即ち，$D_w^2\eta(w)$ は各 $w$ に対し正定値である．

*(2)* 各 $w$ と $j = 1, \cdots, d$ に対し，行列 $D_w f^j(w)(D_w^2\eta(w))^{-1}$ は実対称である．

*(3)* $w \in \mathcal{E}$ であることと $(D_w\eta(w))^T \in \mathcal{M}$ が成り立つことは同値である．

*(4)* 行列 $-D_w g(w)(D_w^2\eta(w))^{-1}$ は $w \in \mathcal{E}$ に制限すれば実対称半正定値で，その零化空間は $\mathcal{M}$ に一致する．

上付き添え字 $^T$ は転置を表す．この定義の前半の 2 条件は，S.K. Godunov [9] および P.D. Lax [7] による双曲型保存則系 (3.1) のエントロピーの定義として定式化されたものである．エントロピーの概念は粘性的保存則系 (3.2) に対しても定式化されている ([21])．数学的に定義されたこのエントロピーは，力学的には負のエントロピーというべきものであり，Boltzmann 方程式やその離散速度モデルでは，Boltzmann の $H$ 関数に相当する．

さて，緩和的双曲型保存則系 (1.1) の**対称化**について述べよう．$w = w(u)$ を微分同相写像とする．系 (1.1) をこの微分同相写像で書き換えると，

$$A^0(u)u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(u)u_{x_j} = h(u) \tag{3.4}$$

となる．ここで，$A^0(u) = D_u w(u)$，$A^j(u) = (D_w f^j)(w(u))D_u w(u)$，$h(u) = g(w(u))$．

**定義 2** ([23])**.** 系 (3.4) が**対称消散的**であるとは次の 4 条件が成り立つことである．

*(1)* 行列 $A^0(u)$ は各 $u$ に対し実対称正定値である．

*(2)* 行列 $A^j(u)$ は各 $u$ と $j = 1, \cdots, d$ に対し実対称である．

*(3)* $h(u) = 0$ が成り立つことと $u \in \mathcal{M}$ であることは同値である．

*(4)* 行列 $L(u) = -D_u h(u)$ は $u \in \mathcal{M}$ に制限すれば実対称半正定値で，その零化空間 $\mathcal{N}(L(u))$ は $\mathcal{M}$ に一致する．

$u \in \mathcal{M}$ に制限したときの上の行列 $L(u) = -D_u h(u)$ は系の緩和効果を表すもので，Boltzmann 方程式における線形化衝突作用素に相当する．**緩和行列** $L(u)$ の性質は，系 (1.1) に対する Chapman-Enskog 展開のみならず (1.1) の数学解析においても極めて重要な役割を果たすことになる (次節以降を参照).

緩和的双曲型保存則系 (1.1) が対称消散系に変換されるか否かは，系 (1.1) がエントロピーを持つか否かで特徴付けられる．即ち，次の定理が成り立つ．

**定理 1** ([23])**.** 緩和的双曲型保存則系 (1.1) がある微分同相写像により (3.4) の形の対称消散系に変換されるための必要十分条件は，系 (1.1) がエントロピーを持つことである．

双曲型保存則系 (3.1) において，その対称化可能性が対応するエントロピーで特徴付けられることは [9], [7] で示されていたが，定理 1 はその結果の緩和的双曲型保存則系 (1.1) に対する一般化である．なお，粘性的保存則系 (3.2) に対する類似の結果は [21] で得られている．

系 (1.1) がエントロピー $\eta(w)$ を持つとき，$u(w) = (D_w \eta(w))^T$ と置くと，$u = u(w)$ は微分同相写像になる．その逆写像 $w = w(u)$ も微分同相写像であるが，この写像により系 (1.1) は (3.4) の形の対称消散系に変換される．逆に，系 (1.1) がある微分同相写像 $w = w(u)$ により (3.4) の形の対称消散系に変換されたとしよう．このとき，$(D_u \tilde{\eta}(u))^T = w(u)$ を満たす関数 $\tilde{\eta}(u)$ と $w = w(u)$ の逆写像 $u = u(w)$ を用いて $\eta(w) = \langle u(w), w \rangle - \tilde{\eta}(u(w))$ と置くと，これが系 (1.1) のエントロピーになる．なお，系 (1.1) のエントロピー $\eta(w)$ が満たす方程式は

$$\eta(w)_t + \sum_{j=1}^{d} q^j(w)_{x_j} = \langle u(w), g(w) \rangle \tag{3.5}$$

で与えられる．$q^j(w)$ はエントロピー束で，$(D_u \tilde{q}^j(u))^T = f^j(w(u))$ を満たす関数 $\tilde{q}^j(u)$ を用いて $q^j(w) = \langle u(w), f^j(w) \rangle - \tilde{q}^j(u(w))$ で与えられる．

# 4 Chapman-Enskog 展開

緩和的双曲型保存則系

$$W_t + \sum_{j=1}^{d} F^j(W)_{x_j} = \frac{1}{\epsilon} G(W) \tag{4.1}$$

に対し，伝統的な **Chapman-Enskog 展開** ([3]) を適用することで，対応する流体力学方程式を導出しよう．ここで，$\epsilon$ は Chapman-Enskog 展開を体系的に説明するために導入した微小助変数である．以下では，系 (4.1) はエントロピー $\eta(W)$ を持つと仮定し，従って対称消散系

$$A^0(U)U_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(U)U_{x_j} = \frac{1}{\epsilon} H(U) \tag{4.2}$$

に変換されるものとする．ここで，$U = (D_W \eta(W))^T$ であり，$A^0(U)$，$A^j(U)$，$H(U)$ は定義 2 の条件を満たしている．緩和的双曲型保存則系に対する Chapman-Enskog 理論に関しては [4] が先駆的な仕事であるが，以下ではエントロピーの定義 1 に基づく [23] の方法に従う．[23] は Boltzmann 方程式の離散速度モデルに対する Chapman-Enskog 理論 ([8], [22]) を一般化したものである．

系 (4.1) の $W$ は $m$ 次元ベクトルであるとする．(3.3) で定義された部分空間 $\mathcal{M}$ の次元を $n = \dim \mathcal{M}$ とし，その基底を $\{\psi^{(1)}, \cdots, \psi^{(n)}\}$ とする．$m \times n$ 行列 $\Psi$ を $\Psi = (\psi^{(1)}, \cdots, \psi^{(n)})$ で定め, $W$ に対応する**モーメント** $w$ を $w = \Psi^T W$ で定義する．即ち, $w$ の第 $k$ 成分を $w_k = \langle \psi^{(k)}, W \rangle$ とする．このとき，系 (4.1) の左から $\Psi^T$ を乗じれば，$n$ 個の保存則方程式

$$w_t + \sum_{j=1}^{d} \Psi^T F^j(W)_{x_j} = 0 \tag{4.3}$$

が得られる．Chapman-Enskog 展開とは，$W$ を モーメント $w$ とその空間変数に関する導関数で表現することで，**保存則系** (4.3) を $w$ の閉じた系に帰着させる理論である．$W$ のその表現式を求めるため，$W$ が

$$W = \sum_{l=0}^{\infty} \epsilon^l W^{(l)} \tag{4.4}$$

の形の展開を持つとしよう．各 $W^{(l)}$ はモーメント $w$ の空間微分 $\partial_x^\alpha w$ ($\alpha \geq 0$ は多重指数) にのみ依存するものとし，さらに，$l = 1, 2, \cdots$ のとき $W^{(l)}$ は $\mathcal{M}$ に直交するものとする．即ち，

$$\Psi^T W^{(0)} = w, \qquad \Psi^T W^{(l)} = 0, \quad l = 1, 2, \cdots, \tag{4.5}$$

とする．保存則系 (4.3) に展開式 (4.4) を代入すれば,

$$w_t + \sum_{j=1}^{d} \Psi^T \big\{ F^j(W^{(0)}) + \epsilon D_W F^j(W^{(0)}) W^{(1)} + \cdots \big\}_{x_j} = 0 \tag{4.6}$$

を得る．次に，系 (4.1) に (4.4) を代入し，時間変数に関する導関数を (4.6) を利用して変形する．その結果を助変数 $\epsilon$ の冪で整理すると，$\epsilon^{-1}$ の係数から $G(W^{(0)}) = 0$ が得られ，また，$\epsilon^0$ の係数から $W^{(1)}$ に関する次の方程式が得られる．

$$D_W G(W^{(0)}) W^{(1)} = \sum_{j=1}^{d} F^j(W^{(0)})_{x_j} - \sum_{\alpha \geq 0} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial(\partial_x^\alpha w)} \sum_{j=1}^{d} \Psi^T \partial_x^\alpha F^j(W^{(0)})_{x_j}. \tag{4.7}$$

まず，$W^{(0)}$ を決定しよう．定義 1 の第 3 条件より，$G(W^{(0)}) = 0$ から $(D_W \eta(W^{(0)}))^T \in \mathcal{M}$ が従う．このとき，$(D_W \eta(W^{(0)}))^T$ は基底 $\{\psi^{(1)}, \cdots, \psi^{(n)}\}$ の線形結合である．即ち，適当な $u \in \mathbb{R}^n$ を用いて，$(D_W \eta(W^{(0)}))^T = \Psi u$ と表される．従って，$U = (D_W \eta(W))^T$ の逆写像 $W = W(U)$ を用いれば，$W^{(0)}$ は

$$W^{(0)} = W(\Psi u) =: M(u) \tag{4.8}$$

の形に表現される．このとき (4.5) の第 1 関係式は $w = \Psi^T M(u) = \Psi^T W(\Psi u)$ となるが，これを $w = w(u)$ で表す．この写像の微分は (4.2) の係数行列 $A^0(U)$ を用いて，$D_u w(u) = \Psi^T A^0(\Psi u) \Psi$ の形で与えられる．その結果として，$w = w(u)$ が微分同相写像であることが云える．その逆写像 $u = u(w)$ を (4.8) に代入すれば，$W^{(0)}$ の $w$ による表現式 $W^{(0)} = M(u(w))$ が得られる．これは Boltzmann 方程式では局所 Mawell 分布の表示式に相当する．この表現式を保存則系 (4.6) に代入し $O(\epsilon)$ の項を無視すれば，緩和的双曲型保存則系に対応する **Euler 方程式**が

$$w_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(w)_{x_j} = 0 \tag{4.9}$$

の形で得られる．ただし，$f^j(w)=\Psi^T F^j(M(u(w)))$ と置いた．この Euler 方程式は変数 $u$ を用いれば，$\tilde{A}^0(u)u_t+\sum_{j=1}^d \tilde{A}^j(u)u_{x_j}=0$ と変換される．これは対称双曲系であり，その係数行列は (4.2) の係数行列を用いて，$\tilde{A}^0(u)=\Psi^T A^0(\Psi u)\Psi$，$\tilde{A}^j(u)=\Psi^T A^j(\Psi u)\Psi$ の形で与えられる．

次に，$W^{(1)}$ を決定しよう．$W^{(0)}=M(u(w))$ であるから，方程式 (4.7) は $D_W G(M(u))W^{(1)}=Y$ となる．ただし，

$$Y=\sum_{j=1}^d F^j(M(u))_{x_j}-Y_1, \quad Y_1=D_u M(u) D_w u(w)\sum_{j=1}^d \Psi^T F^j(M(u))_{x_j}.$$

$\Lambda(u)=A^0(\Psi u)^{-1/2}$ とし，$V=\Lambda(u)W^{(1)}$ と置く．$\Lambda(u)$ は実対称正定値である．このとき，$W^{(1)}$ の方程式 $D_W G(M(u))W^{(1)}=Y$ は

$$S(u)V=-\Lambda(u)Y \tag{4.10}$$

と書き換えられる．ただし，$S(u)$ は定義 2 の緩和行列 $L(U)$ を用いて $S(u)=\Lambda(u)L(\Psi u)\Lambda(u)$ で与えられる．$U=\Psi u\in\mathcal{M}$ に制限したときの緩和行列の性質より，$S(u)$ は実対称半正定値で，その零化空間は $\mathcal{N}(S(u))=\Lambda(u)^{-1}\mathcal{M}=:\mathcal{M}(u)$ で与えられる．方程式 (4.10) の右辺において，$\Lambda(u)Y_1\in\mathcal{M}(u)$ および $\Lambda(u)Y\in\mathcal{M}(u)^\perp$ であることが分かる．ただし，$\mathcal{M}(u)^\perp$ は $\mathcal{M}(u)$ の直交補空間を表す．従って，$\mathcal{M}(u)$ への正射影を $\Pi(u)$ で表せば，(4.10) の右辺は

$$\Lambda(u)Y=(I-\Pi(u))\Lambda(u)\sum_{j=1}^d F^j(M(u))_{x_j}$$

と表される．一方，(4.5) の $W^{(1)}$ に対する条件は $V\in\mathcal{M}(u)^\perp$ を意味する．従って，非同次線形方程式 (4.10) は一意的に $V=-S(u)^{-1}\Lambda(u)Y$ と解ける．$S(u)^{-1}$ は実対称半正定値で，その零化空間は $\mathcal{N}(S(u)^{-1})=\mathcal{M}(u)$ を満たす．以上により $W^{(1)}$ は

$$W^{(1)}=\Lambda(u)^{-1}V=-\Lambda(u)^{-1}S(u)^{-1}\Lambda(u)\sum_{j=1}^d A^j(\Psi u)\Psi u_{x_j} \tag{4.11}$$

の形に表される．ただし，$A^j(U)$ は (4.2) の係数行列である．表現式 (4.8) と (4.11) で $u=u(w)$ と置き，これらを保存則系 (4.6) に代入し $O(\epsilon^2)$ の項を無視すれば，緩和的双曲型保存則系に対応する **Navier-Stokes 方程式**が

$$w_t+\sum_{j=1}^d f^j(w)_{x_j}=\epsilon\sum_{i,j=1}^d\{G^{ij}(w)w_{x_j}\}_{x_i} \tag{4.12}$$

の形で得られる．ここで，$f^j(w)=\Psi^T F^j(M(u(w)))$，$G^{ij}(w)=\tilde{B}^{ij}(u(w))D_w u(w)$ と置いた．ただし，$\tilde{B}^{ij}(u)=\Psi^T A^i(\Psi u)\Lambda(u)S(u)^{-1}\Lambda(u)A^j(\Psi u)\Psi$．この Navier-Stokes 方程式は，変数 $u$ を用いれば対称系

$$\tilde{A}^0(u)u_t+\sum_{j=1}^d \tilde{A}^j(u)u_{x_j}=\epsilon\sum_{i,j=1}^d\{\tilde{B}^{ij}(u)u_{x_j}\}_{x_i} \tag{4.13}$$

に変換される．ただし，$\tilde{A}^0(u)=\Psi^T A^0(\Psi u)\Psi$，$\tilde{A}^j(u)=\Psi^T A^j(\Psi u)\Psi$．

**定理 2** ([23], [4]). 緩和的双曲型保存則系 (4.1) はエントロピー $\eta(W)$ を持つとする．このとき，系 (4.1) に Chapman-Enskog 展開が適用でき，対応する Navier-Stokes 方程式が (4.12) の形の粘性的保存則系として求まる．この Navier-Stokes 方程式は，微分同相写像 $w = w(u)$ により (4.13) の形の対称系に変換される．また，Navier-Stokes 方程式 (4.12) のエントロピー $\tilde{\eta}(w)$ は系 (4.1) のエントロピー $\eta(W)$ と $\tilde{\eta}(w(u)) = \eta(M(u))$ の形で関係付けられる．

Navier-Stokes 方程式 (4.12) の**粘性行列** $G^{ij}(w)$ の決定は，気体分子運動論の輸送現象の解明に相当するもので，そこでは $\mathcal{M}$ 上に制限したときの**緩和行列** $L(U)$ が本質的な役割を果たしている．またこの定理は，微視的状態を記述する系 (4.1) のエントロピーと巨視的状態を記述する系 (4.12) のエントロピーの間に，Chapman-Enskog 展開を通じて対応関係が成り立つことを主張している．このエントロピーの対応に関する結果は，[4] で得られた類似の結果の改良版である．Boltzmann 方程式の離散速度モデルに対しては，同じ形の対応が以前から知られていた ([22], [8])．

## 5 安定性条件と消散構造

エントロピーを持つ緩和的双曲型保存則系 (1.1) の数学解析のための準備として，対応する対称消散系 (3.4) の**消散構造**を調べよう．今，定数状態 $\bar{u} \in \mathcal{M}$ を任意に固定し，系 (3.4) の $u = \bar{u}$ における線形化

$$A^0 u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j u_{x_j} + Lu = 0 \tag{5.1}$$

を考えよう．ここで，$A^0 = A^0(\bar{u})$，$A^j = A^j(\bar{u})$，$L = L(\bar{u})$ と略記した．$A^0$ は実対称正定値，$A^j$ は実対称，$L$ は実対称半正定値で，その零化空間は $\mathcal{N}(L) = \mathcal{M}$ で与えられる．系 (5.1) を $x \in \mathbb{R}^d$ に関して Fourier 変換すれば，

$$A^0 \hat{u}_t + i|\xi| A(\omega)\hat{u} + L\hat{u} = 0 \tag{5.2}$$

を得る．ただし，$A(\omega) = \sum_{j=1}^{d} A^j \omega_j$，$\omega = \xi/|\xi| \in S^{d-1}$ と置いた．対称消散系 (5.1) のエネルギー減衰を保障する条件として，まず次の条件を定式化しよう．

**定義 3** ([38], [34]). 対称消散系 (5.1) が**条件 (K)** を満たすとは，次の 3 条件を満たす $m \times m$ 実行列 $K(\omega)$ が存在することである．

*(1)* $K(\omega)$ は $\omega \in S^{d-1}$ について滑らかで，各 $\omega \in S^{d-1}$ に対し $K(-\omega) = -K(\omega)$ を満たす．

*(2)* 各 $\omega \in S^{d-1}$ に対し，行列 $K(\omega)A^0$ は実反対称である．

*(3)* 各 $\omega \in S^{d-1}$ に対し，行列 $[K(\omega)A(\omega)]' + L$ は実対称正定値である．ただし，記号 $[X]'$ は実正方行列 $X$ の対称部分を表す．

この条件は初め [38] において，$K(\omega) = \sum_{j=1}^{d} K^j \omega_j$ の形の $K(\omega)$ として定式化された．上の定式化は静田・川島 [34] による．この条件は，圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する松村・西田 [29] のエネルギー法で用いられた**職人技**のからくりを数学的に表現したものである．

さて，行列 $K(\omega)$ は系 (5.1) または (5.2) に対するエネルギー法の鍵である．実際，系 (5.2) の **Lyapunov 関数** $E[\,\hat{u}\,]$ が $K(\omega)$ を用いて

$$E[\,\hat{u}\,] = (A^0\hat{u}, \hat{u}) - \frac{\alpha|\xi|}{1+|\xi|^2}(iK(\omega)A^0\hat{u}, \hat{u}) \tag{5.3}$$

の形で構成できる．ここで，$\alpha$ は十分小さな正定数であり，記号 $(\ ,\ )$ は $\mathbb{C}^m$ の内積を表す．明らかに $E[\,\hat{u}\,]$ は $|\hat{u}|^2$ に同値であり，行列 $K(\omega)$ は通常のエネルギー $(A^0\hat{u},\hat{u})$ を補正する役目を果たしている．この $E[\,\hat{u}\,]$ が系 (5.2) の Lyapunov 関数であることは，次の微分不等式が成り立つことから分かる．

$$\frac{\partial}{\partial t}E[\,\hat{u}\,]+c|(I-P)\hat{u}|^2+\frac{c|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\,|\hat{u}|^2\le 0. \tag{5.4}$$

ここで，$c$ は正定数であり，$P$ は行列 $L$ の零化空間 $\mathcal{N}(L)=\mathcal{M}$ への正射影である．Fourier 空間における微分不等式 (5.4) は系 (5.2) にエネルギー法を適用して導かれるが，その左辺第 3 項の正値性は条件 (K) の第 3 条件に現れる行列の正値性を反映している．

系 (5.1) に対する**エネルギー評価**は，Fourier 空間における微分不等式 (5.4) から直ちに従う．実際，(5.4) に $(1+|\xi|^2)^s$ を乗じ $\mathbb{R}^d_\xi\times[0,t]$ 上で積分すれば，Plancherel の定理により

$$\|u(t)\|^2_{H^s}+\int_0^t\|(I-P)u(\tau)\|^2_{H^s}+\|\partial_x u(\tau)\|^2_{H^{s-1}}\,d\tau\le C\|u_0\|^2_{H^s} \tag{5.5}$$

の形のエネルギー評価式が得られる．ここで，$s\ge 1$ は整数，$C$ は正定数であり，$u_0$ は $u$ に対する初期値を表す．また，$H^s$ は階数 $s$ の $L^2$ 型 Sobolev 空間を表す．このエネルギー評価は，非線形方程式 (1.1) を解析する際，その非線形摂動部分を評価するのに適した形である．

微分不等式 (5.4) を用いれば，系 (5.1) の解の**減衰評価**も導くことができる．実際，$\eta(\xi)=|\xi|^2/(1+|\xi|^2)$ と置き，(5.4) を $(\partial/\partial t)E[\,\hat{u}\,]+c\eta(\xi)E[\,\hat{u}\,]\le 0$ 形に書き換えて Gronwall の不等式を適用すれば，Fourier 空間における各点評価

$$|\hat{u}(\xi,t)|\le Ce^{-c\eta(\xi)t}|\hat{u}_0(\xi)| \tag{5.6}$$

が得られる．この評価式を 2 乗し，$|\xi|^{2k}$ を乗じ $\mathbb{R}^d_\xi$ 上で積分すると，系 (5.1) の解の減衰評価が次の形で得られる．

**定理 3** ([38])**.** $d\ge 1$ とする．条件 (K) の下，対称消散系 (5.1) の解は次の減衰評価を満たす．

$$\|\partial_x^k u(t)\|_{L^2}\le Ce^{-ct}\|\partial_x^k u_0\|_{L^2}+C(1+t)^{-d/4-k/2}\|u_0\|_{L^1}. \tag{5.7}$$

ただし，$k$ は非負整数で，$C$ と $c$ は正定数である．

減衰評価 (5.7) において，右辺第 1 項は高周波域 $|\xi|\ge 1$ に対応し，第 2 項は低周波域 $|\xi|\le 1$ に対応している．減衰指数 $t^{-d/4-k/2}$ は，線形熱方程式の解の $L^2-L^1$ 評価の減衰指数と同じであることに注意したい．この減衰評価は条件 (K) の下 [38] で初めて得られたが，それは Boltzmann 方程式に対する鵜飼 [37] の評価や，圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する松村・西田 [30] の評価と全く同じ型のものである．

ところで，エネルギー評価 (5.5) や減衰評価 (5.7) を導くには行列 $K(\omega)$ の構成が鍵であり，職人技が必要なことに変わりはない．条件 (K) を職人技不要の条件で置き換えることに成功したのが，静田・川島 [34] である．その条件は次のように定式化され，安定性条件と名付けられた．

**定義 4** ([34])**.** 対称消散系 (5.1) が**安定性条件**を満たすとは，次の命題が成り立つことである．$\phi\in\mathbb{R}^m$ がある $\mu\in\mathbb{R}$ と $\omega\in S^{d-1}$ に対し，$L\phi=0$ (即ち $\phi\in\mathcal{M}$) および $\mu A^0\phi+A(\omega)\phi=0$ を満たすとする．このとき，常に $\phi=0$ が従う．

静田・川島 [34] による系 (5.1) の**消散構造の特徴付け**を与えるため，系 (5.1) の特性方程式

$$\det(\lambda A^0 + A(i\xi) + L) = 0 \tag{5.8}$$

を考える．ただし，$A(i\xi) = \sum_{j=1}^{d} i\xi_j A^j = i|\xi|A(\omega)$，$\omega = \xi/|\xi|$ である．特性方程式 (5.8) の根を $\lambda = \lambda(i\xi)$ と表す．これが系 (5.1) の分散関係式である．このとき，静田・川島 [34] による消散構造の特徴付けは次のように述べられる．

**定理 4** ([34])**.** 対称消散系 (5.1) においおて，次の 4 条件は互いに同値である．

*(1)* 安定性条件が成り立つ．

*(2)* 条件 (K) が成り立つ．

*(3)* 任意の $\xi \neq 0$ に対し，$\mathrm{Re}\,\lambda(i\xi) < 0$ が成り立つ．

*(4)* 正定数 $c$ が存在し，任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\mathrm{Re}\,\lambda(i\xi) \leq -c\eta(\xi)$ が成り立つ．ただし，$\eta(\xi) = |\xi|^2/(1+|\xi|^2)$.

この定理により，職人技を必要とする条件 (K) は，エネルギー法の素人でも確かめることが容易な安定性条件で置き換えることができた．その結果，行列 $K(\omega)$ を具体的に構成することなく，エネルギー評価 (5.5) と減衰評価 (5.7) を得ることが可能になったわけである．

最後に，安定性条件が Chapman-Enskog 展開を通して，緩和的双曲型保存則系 (4.1) から対応する Navier-Stokes 方程式 (4.12) に遺伝するという事実を紹介しておこう．それは Boltzmann 方程式の離散速度モデルに対して知られていた結果 ([22]) を，緩和的双曲型保存則系の場合に拡張したものである．

**定理 5** ([23])**.** 緩和的双曲型保存則系 (4.1) に対応する対称消散系 (4.2) が $U = \Psi u \in \mathcal{M}$ において安定性条件 (定義 4) を満たすことと，(4.1) から Chapman-Enskog 展開で得られた Navier-Stokes 方程式 (4.12) に対応する対称系 (4.13) が $u \in \mathbb{R}^n$ において安定性条件 ([34] 参照) を満たすことは同値である．

## 6 時間大域解の存在とその減衰評価

緩和的双曲型保存則系 (1.1) に対しエントロピーの存在を仮定する．そのとき，系 (1.1) から得られる対称消散系 (3.4) の初期値問題を考察しよう．系 (3.4) は対称双曲系であり，従って対称双曲系の一般論 ([7], [12], [27], [33], [5]) により，Sobolev 空間 $H^s$ における時間局所解の存在が云えることに注意しよう．

エントロピーの存在に加えて，対称消散系 (3.4) が定数状態 $\bar{u} \in \mathcal{M}$ において安定性条件を満たすと仮定しよう．安定性条件は職人技の条件 (K) と同値であり，従って前節で述べたエネルギー法を用いることができる．もちろん，ここでは系 (3.4) は線形ではなく準線形であるため，前節のエネルギー法に適切な修正を加える必要がある．このエネルギー計算により，系 (3.4) の小さい解に対する時間一様なアプリオリ評価を示すことができる．局所解の存在定理とそのアプリオリ評価により，局所解を時間大域的に延長することが可能で，その結果として，小さい初期値に対する系 (3.4) の**時間大域解**の存在を示すことができる．実際，次の定理が成り立つ．

**定理 6** ([10], [39], [24])**.** 緩和的双曲型保存則系 (1.1) はエントロピーを持ち，対応する対称消散系 (3.4) は定数状態 $\bar{u} \in \mathcal{M}$ において安定性条件を満たすとする．$d \geq 1$，$s \geq [d/2]+2$ とし，初期値 $u_0$ は $u_0 - \bar{u} \in H^s$ を満たすとする．このとき，もし $\|u_0 - \bar{u}\|_{H^s}$ が小さいならば，系 (3.4) の初期値問題は $u - \bar{u} \in C([0,\infty); H^s)$ なる時間大域解 $u(x,t)$ を唯一つ持つ．さらに，この解は時間無限大において定数状態 $\bar{u} \in \mathcal{M}$ に一様に漸近収束する．即ち，時間 $t \to \infty$ のとき $\|\partial_x^l (u(t) - \bar{u})\|_{L^\infty} \to 0$ が成り立つ．ただし，$0 \leq l \leq s - s_0$，$s_0 = [d/2]+1$ である．

この定理で得られた時間大域解は，次の形の時間一様評価を満たす．

$$\|u(t) - \bar{u}\|_{H^s}^2 + \int_0^t \|(I-P)u(\tau)\|_{H^s}^2 + \|\partial_x u(\tau)\|_{H^{s-1}}^2 d\tau \leq C\|u_0 - \bar{u}\|_{H^s}^2. \tag{6.1}$$

ただし，$s \geq [d/2]+2$，$C$ は正定数，$P$ は $\mathcal{M}$ への正射影である．この評価式は，線形の場合のエネルギー評価式 (5.5) と本質的に同じものである．なお，ここで用いた**エネルギー法**では，エントロピーの凸性，系 (3.4) の対称消散性，条件 (K) の行列 $K(\omega)$ によるエネルギー補正が重要な役割を果たしている．

緩和的双曲型保存則系 (1.1) の安定性条件の下での時間大域解の存在定理は，初め [10]，[39] で得られた．定理 6 は [24] による改良版である．安定性条件の下での類似の時間大域解の存在定理は，他の方程式系に対しても知られている．粘性的保存則系 (3.2) については [16] を，Boltzmann 方程式の離散速度モデルについては [15] を参照のこと．Boltzmann 方程式の離散速度モデルは，緩和的双曲型保存則系 (1.1) の半線形版とみなされる．

定理 6 で得られた時間大域解の**減衰評価**を示そう．その減衰評価の導出で本質的な役割を果たすのは，線形系 (5.1) の減衰評価 (5.7) であることは云うまでもない．初期値が $H^s \cap L^1$ に属する場合，解は指数 $s$ の可微分性を持つが，そのとき期待される最良の減衰評価は，対称消散系 (3.5) の解については

$$\|\partial_x^k (u(t) - \bar{u})\|_{L^2} \leq C E_1 (1+t)^{-d/4-k/2} \tag{6.2}$$

となる．ただし，$k$ に対して $0 \leq k \leq s_1$ の形の制限が必要である．$s_1$ は $s_1 \leq s$ を満たす適当な非負整数，$C$ は正定数，$E_1 = \|v_0 - \bar{v}\|_{H^s} + \|v_0 - \bar{v}\|_{L^1}$ である．最良の減衰評価 (6.2) を $s$ に近い $s_1$ までの導関数に対して示すためには，**時間重み付きエネルギー法**を援用するのが効果的である．

時間重み付きエネルギー法の副産物として，空間次元 $d \geq 2$ のとき，初期値が $L^1$ に属することを仮定することなく解の減衰評価が得られる．

**定理 7** ([24])**.** 定理 6 と同じ仮定を置く．$d \geq 2$，$s \geq [d/2]+2$ とし，初期値 $\|u_0 - \bar{u}\|_{H^s}$ が小さければ，定理 6 で得られた時間大域解は次の減衰評価を満たす．

$$\begin{aligned} &\|\partial_x^k (u(t) - \bar{u})\|_{H^{s-k}} \leq C\|u_0 - \bar{u}\|_{H^s}(1+t)^{-k/2}, \qquad 0 \leq k \leq s, \\ &\|(I-P)\partial_x^k u(t)\|_{H^{s-k}} \leq C\|u_0 - \bar{u}\|_{H^s}(1+t)^{-1/2-k/2}, \qquad 0 \leq k \leq s-1. \end{aligned} \tag{6.3}$$

ただし，$C$ は正定数，$P$ は $\mathcal{M}$ への正射影である．

初期値が $H^s$ に属するという仮定のみでは，(6.3) が最良の減衰評価である．時間重み付きエネルギー法を初めて効果的に展開したのは松村 [28] であろう．[28] では空間 3 次元の圧縮性 Navier-Stokes 方程式を扱い，(6.3) の第一評価式と同様の減衰評価を示すことに成功している．

最後に，初期値が $H^s \cap L^1$ に属する場合の最良の減衰評価 (6.2) に関する結果を紹介しよう．

**定理 8** ([24], [2]). 定理 6 と同じ仮定を置く．$d \geq 1$，$s \geq [d/2]+2$ とする．ただし，$d=1$ のときは $s \geq 3$ とする．初期値に対して $u_0 - \bar{u} \in H^s \cap L^1$ を仮定し，$E_1 = \|u_0 - \bar{u}\|_{H^s} + \|u_0 - \bar{u}\|_{L^1}$ と置く．このとき，$E_1$ が小さいなら，定理 6 で得られた時間大域解は次の減衰評価を満たす．

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_x^k (u(t)-\bar{u})\|_{L^2} \leq CE_1(1+t)^{-d/4-k/2}, \qquad 0 \leq k \leq s-1, \\
&\|(I-P)\partial_x^k u(t)\|_{L^2} \leq CE_1(1+t)^{-d/4-1/2-k/2}, \qquad 0 \leq k \leq s-2.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

ただし，$C$ は正定数，$P$ は $\mathcal{M}$ への正射影である．

この形の減衰評価は，$\sigma := s-k$ が十分大きいという制限の下，[2] において初めて示された．可微分性に関する $s$ と $k$ に細心の注意を払った上の形の減衰評価は [24] による．

## 参考文献


[1] P.L. Bathnagar, E.P. Gross and M. Krook, A model for collision prosesses in gases, I, Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems, Phys. Rev., **94** (1954), 511-524.

[2] S. Bianchini, B. Hanouzet and R. Natalini, Asymptotic behavior of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy, Comm. Pure Appl. Math., **60** (2007), 1559-1622.

[3] S. Chapman and T. Cowling, The Mathematical Theory of Non-uniform Gases, 3rd ed., London, Cambridge Univ. Press, 1970.

[4] Q.C. Chen, C.D. Levermore and T.-P. Liu, Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy, Comm. Pure Appl. Math., **47** (1994), 787–830.

[5] C.M. Dafermos, Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics, 2nd ed., Springer, Berlin, 2005.

[6] K.O. Friedrichs, Symmetric hyperbolic linear partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **7** (1954), 345–392.

[7] K.O. Friedrichs and P.D. Lax, Systems of conservation equations with a convex extension, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **68** (1971), 1686–1688.

[8] R. Gatignol, Théorie Cinétique des Gaz à Répartition Discrète de Vitesse, Lecture Notes in Phys., **36**, Springer-Verlag, 1975.

[9] S. K. Godunov, An interesting class of quasilinear systems, Dokl. Acad. Nauk SSSR, **139** (1961), 521–523.

[10] B. Hanouzet and R. Natalini, Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy, Arch. Rational Mech. Anal., **169** (2003), 89–117.

[11] S. Jin and Z.-P. Xin, The relaxaing schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions, Comm. Pure Appl. Math., **48** (1995), 555–563.

[12] T. Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Arch. Rational Mech. Anal., **58** (1975), 181–205.

[13] T. Kato, Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential eqations, Spectral Theory and Differential Equations, ed. by W.N. Everitt, Lecture Notes in Math., **448** (1975), 24–70.

[14] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1976.

[15] S. Kawashima, Global existence and stability of solutions for discrete velocity models of the Boltzmann equation, Recent Topics in Nonlinear PDE, Lecture Notes in Num. Appl. Anal., **6**, Kinokuniya, Tokyo, 1983, 59–85.

[16] S. Kawashima, Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics, Doctoral Thesis, Kyoto University, 1984.

[17] S. Kawashima, Large-time behaviour of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **106A** (1987), 169–194.

[18] S. Kawashima, Large-time behavior of solutions of the discrete Boltzmann equation, Commun. Math. Phys., **109** (1987), 563–589.

[19] S. Kawashima, Boltzmann equation and thirteen moments, Japan. J. Appl. Math., **7** (1990), 301–320.

[20] S. Kawashima, A. Matsumura and T. Nishida, On the fluid-dynamical approximation to the Boltzmann equation at the level of the Navier-Stokes equation, Commun. Math. Phys., **70** (1979), 97–124.

[21] S. Kawashima and Y. Shizuta, On the normal form of the symmetric hyperbolic-parabolic systems associated with the conservation laws, Tôhoku Math. J., **40** (1988), 449–464.

[22] S. Kawashima and Y. Shizuta, The Navier-Stokes equation in the discrete kinetic theory, J. Mécan. théor. appl., **7** (1988), 597–621.

[23] S. Kawashima and W.-A. Yong, Dissipative structure and entropy for hyperbolic systems of balance laws, Arch. Rational Mech. Anal., **174** (2004), 345–364.

[24] S. Kawashima and W.-A. Yong, Decay estimates for hyperbolic balance laws, preprint.

[25] P.D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws, II, Comm. Pure Appl. Math., **10** (1957), 537–556.

[26] P.D. Lax, Shock waves and entropy, Contribution to Nonlinear Functional Analysis, ed. by E.H. Zarantonello, Academic Press, New York, 1971, 603–634.

[27] A. Majda, Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables, Applied Mathematical Sciences, **53**, Springer, New York, 1984.

[28] A. Matsumura, An energy method for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, MRC Technical Summary Report, Univ. of Wisconsin-Madison, #**2194** (1981).

[29] A. Matsumura and T. Nishida, The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases, J. Math. Kyoto Univ., **20** (1980), 67–104.

[30] A. Matsumura and T. Nishida, The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, Proc. Japan Acad., **55** (1979), 337–342.

[31] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **22** (1959), 115–162.

[32] T. Nishida and K. Imai, Global solutions to the initial value problem for the nonlinear Boltzmann equatyion, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **12** (1976), 229–239.

[33] R. Racke, Lecture on Nonlinear Evolution Equations: Initial Value Problems, Braunschweig, Wiesbaden, Vieweg, 1992.

[34] Y. Shizuta and S. Kawashima, Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation, Hokkaido Math. J., **14** (1985), 249–275.

[35] Y. Ueda and S. Kawashima, Large time behavior of solutions to a semilinear hyperbolic system with relaxation, J. Hyperbolic Differential Equations, **4** (2007), 147-179.

[36] S. Ukai, On the existence of global solutions of mixed problem for the nonlinear Boltzmann equation, Proc. Japan Acad., **50** (1974), 179–184.

[37] S. Ukai, Les solutions globales de l'équation nonlinéaire de Boltzmann dans l'espace tout entier et dans le semi-espace, C. R. Acad. Sci. Paris, **282**A (1976), 317–320.

[38] T. Umeda, S. Kawashima and Y. Shizuta, On the decay of solutions to the linearized equations of electro-magneto-fluid dynamics, Japan J. Appl. Math., **1** (1984), 435–457.

[39] W.-A. Yong, Entropy and global existence for hyperbolic balance laws, Arch. Rational Mech. Anal., **172** (2004), 247–266.